ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ “ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА”

Донецк 2016

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ “ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА”

(для студентов направления подготовки
09.03.02 "Информационные системы и технологии")

Рассмотрено на заседании кафедры
Программная инженерия
Протокол №4 от 15.12.2016 г.

Утверждено на заседании
учебно-издательского совета ДонНТУ
Протокол № от ___.___.____г.

Донецк 2016

УДК 004.021

Методические указания и задания к лабораторным работам по курсу «Дискретная математика» (для студентов направления подготовки 09.03.02 "Информационные системы и технологии", специальность "Системы автоматизированного проектирования”)/ Сост.: И.А. Назарова, Л.В. Незамова - Донецк: ДонНТУ, 2016. - 129с.

Методические указания и задания к лабораторным работам по курсу "Дискретной математики" включают лабораторные работы по следующим основным темам курса:

- теория множеств и отношений;
- комбинаторика;
- булева алгебра;
- исчисление высказываний и предикатов;
- теория графов;
- анализ и синтез конечных автоматов.

Составители: Назарова И.А., к.т.н., доцент
Незамова Л.В., асс.

Рецензент:

Лабораторная работа № 1

Способы задания множеств. Операции над множествами. Основные соотношения алгебры множеств

Цель работы: изучение способов задания множеств. Приобретение практических навыков в выполнении операций над множествами.

Теоретическая справка

Множество - объединение в одно целое различимых между собой элементов.

Конечное множество - множество, состоящее из конечного числа элементов.

Бесконечное множество - множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Способы задания множеств

1) Перечисление элементов.

Например:

A = {1,3,5,6,889,-10}

2) Задание определяющего свойства.

Например:

X = { **x** | 1 > **x** > 5, **x** є Z };
A = {$\mathbf{a}^2$ | **a** - четное число}.

Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается ∅.

Универсальное – множество, содержащее все возможные элементы. Универсальное множество обозначается **U.**

Операции над множествами

Объединением множеств **A** и **B** (обозначается **A** ∪ **B**) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств, т.е

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ или } \mathbf{a} \in \mathbf{B}\}.$$

Пересечением множеств **A** и **B** (обозначается $\mathbf{A \cap B}$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из этих множеств, т.е.

$$\mathbf{A \cap B} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{a} \in \mathbf{B}\}.$$

Разностью множеств **A** и **B** (обозначается $\mathbf{A \setminus B}$) называется множество, состоящее из всех элементов множества **A** , не принадлежащих множеству **B**, т.е.

$$\mathbf{A \setminus B} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{a} \notin \mathbf{B}\}.$$

Дополнением множества **A** в универсальном множестве **U** (обозначается $\overline{\mathbf{A}}$, $\neg$A) называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества **U**, не принадлежащих множеству **A**, т.е.

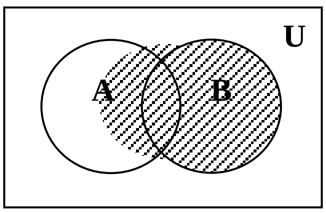
$$\neg\mathbf{A} = \mathbf{U \setminus A}$$

Симметрической разностью множеств **A** и **B** (обозначается $\mathbf{A \oplus B}$ или $\mathbf{A \,\Delta\, B}$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих в точности одному из этих множеств, т.е.

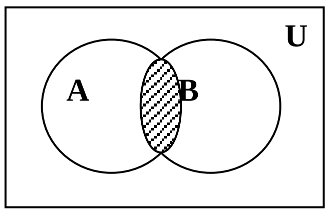
$$\mathbf{A \,\Delta\, B} = \{\mathbf{a} \mid \text{ либо } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{a} \notin \mathbf{B}, \text{ либо } \mathbf{a} \notin \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{a} \in \mathbf{B}\}$$

$$\mathbf{A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

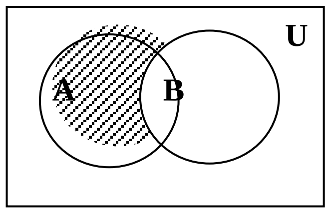
Операции над множествами можно проиллюстрировать графически с помощью **кругов Эйлера** (их также называют **диаграммами Венна**). В этом случае исходные множества изображают кругами, а множество-результат выделяют штриховкой.



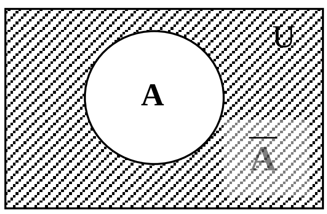
$\mathbf{A \cup B}$

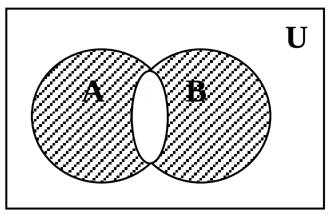


$\mathbf{A \cap B}$



$\mathbf{A \setminus B}$





$\mathbf{A \,\Delta\, B}$

Основные законы алгебры множеств:

1) Коммутативные законы

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A}$$
$$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$$
$$\mathbf{A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A}$$

2) Ассоциативные законы

$$\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$$
$$\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$$

3)Дистрибутивные законы

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$
$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

4)Законы с $\varnothing$ и **U**

$\mathbf{A \cup \varnothing = A}$ $\quad$ $\mathbf{A \cap U = A}$ $\quad$ $\mathbf{A \cup \overline{A} = U}$

$\mathbf{A \cap \varnothing = \varnothing}$ $\quad$ $\mathbf{A \cup U = U}$ $\quad$ $\mathbf{A \cap \overline{A} = \varnothing}$

$\mathbf{\overline{U} = \varnothing}$ $\quad$ $\mathbf{\overline{\varnothing} = U}$

6) Законы идемпотентности

$\mathbf{A \cap A = A}$ $\quad$ $\mathbf{A \cup A = A}$ $\quad$ $\mathbf{\overline{\overline{A}} = A}$

7) Законы поглощения

$\mathbf{A \cup (A \cap B) = A}$ $\quad$ $\mathbf{A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B}$

$\mathbf{A \cap (A \cup B) = A}$ $\quad$ $\mathbf{A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B}$

8) Законы де Моргана

$$\mathbf{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

$$\mathbf{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

9) Законы склеивания

$$\mathbf{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B}$$
$$\mathbf{(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = B}$$

Задание к лабораторной работе.

Заданы множества **X**, **Y**, **Z**, **U**.

Правило образования множеств **X, Y, Z** и **U**:

X - множество букв имени студента;

Y - множество букв отчества студента;

Z - множество букв фамилии студента;

U - универсальное множество = **X** ∪ **Y** ∪ **Z** ∪ { ъ,ё, гласные , отсутствующие в множествах **X, Y, Z**}

1. Вычислить:
   - $\mathbf{X \cap Y}$ **,** $\mathbf{Y \cap Z}$ **,** $\mathbf{X \cap Z}$**,** $\mathbf{X \cap Y \cap Z}$;
   - $\mathbf{Y \cup Z}$ **,** $\mathbf{X \cup Y \cup Z}$;
   - $\mathbf{X \setminus Z}$;

- $\mathbf{X} \cup \overline{Z}$;
- $\mathbf{X}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{Z}$;
- $\mathbf{X} \cap \overline{Y}$, $\mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$;
- $(\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \setminus \mathbf{Z})$.

2. Нарисовать диаграммы Эйлера для:
   - $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$;
   - $(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cup \overline{Z}$;
   - $(\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \setminus \mathbf{Z})$.

3. Записать булеан для произвольного подмножества множества **Z (**мощности 4). Выписать все возможные разбиения и привести примеры 3х покрытий этого подмножества.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение множества.
2. Привести примеры конечных и бесконечных множеств.
3. Указать существующие способы задания множеств.
4. Дать определения пустого и универсального множеств.
5. Что называют подмножеством множества?
6. Ввести понятия операций над множествами.
7. Привести примеры операций над множествами с помощью кругов Эйлера.
8. Записать основные законы и теоремы алгебры множеств.

Лабораторная работа № 2

Отношения на множествах

Цель работы: изучение способов задания отношений, приобретение практических навыков в проверке основных свойств отношений, классификация отношений.

Теоретическая справка

Прямое (декартово) произведение множеств X и Y – множество упорядоченных пар, таких что: $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$.

При **X = Y** множество **X** x **X** называется **декартовой степенью** множества **X** и обозначается $\mathbf{X^2}$**.**

Бинарное отношение на множествах **X** и **Y** – произвольное подмножество прямого произведения двух множеств $\rho \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$.

Если $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$, то отношение ρ **задано на множестве X**.

Если $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho$, то $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ **находятся** в отношении ρ или **связаны** отношением ρ: $\mathbf{x}\ \rho\ \mathbf{y}$ или $\mathbf{y} = \rho(\mathbf{x})$.

Область определения $\mathbf{D}_\rho$ бинарного отношения - множество первых элементов каждой упорядоченной пары $\mathbf{D}_\rho = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho\}$.

Область значений $\mathbf{J}_\rho$ бинарного отношения - множество вторых элементов каждой упорядоченной пары $\mathbf{J}_\rho = \{\mathbf{y} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \rho\}$.

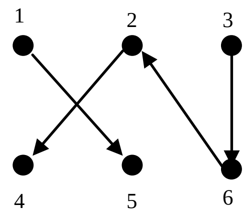
Способы задания отношений

1) Список пар
   $\rho = \{(1,5), (2,4), (3,6), (6,2)\}$ на $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$, $\mathbf{X} = \{1,2,3,4,5,6\}$

2) Характеристическая функция
   $\rho = \{(n,m) \mid n = 2*m\}$

3) Графическое изображение

ρ ={(1,5), (2,4), (3,6), (6,2)} на $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$, $\mathbf{X}$ = {1,2,3,4,5,6}



4) Матрица отношения

ρ ={(1,5), (2,4), (3,6), (6,2)} на $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$, $\mathbf{X}$ = {1,2,3,4,5,6}

$\mathbf{A}_\rho$=

x \ x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0

Свойства бинарных отношений

Пусть ρ задано на множестве **X**, $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$

Рефлексивность: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{x}$.

Антирефлексивность: $\neg\exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{x}$.

Нерефлексивность: $\exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \notin \rho$.

Симметричность: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}\ \rho\ \mathbf{x}$.

Антисимметричность: $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y},\ \mathbf{y}\ \rho\ \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Транзитивность: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y}, \mathbf{y}\,\rho\,\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{z}$.

Отношение порядка – антисимметрично, транзитивно.

Отношение нестрого порядка ($\preceq$) - рефлексивно,
антисимметрично,
транзитивно.

Отношение строгого порядка ($\prec$) - антирефлексивно,
антисимметрично,
транзитивно.

В отношениях **полного** порядка все элементы сравнимы между собой, а в отношениях **частичного** порядка не все элементы сравнимы между собой.

Отношение эквивалентности (~) - рефлексивно,
симметрично,
транзитивно .

Класс эквивалентности для **x :** $[\,\mathbf{x}\,] = \{\ \mathbf{y} \in \mathbf{X} \mid \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\ \}$

Обратное отношение получается путём перестановки значений в парах исходного отношения.

Композиция отношений $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ - отношение, состоящее из пар

$$\boldsymbol{\rho \circ \gamma = \{(x, z) \mid x \rho y,\ y \gamma z\}}$$

Например:

Отношения ρ и γ заданы на множестве X = {1, 2, 3, 4, 5, 6,}.

ρ = {(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (6,3)},

γ = {(1,1), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,6)}.

Область определения D_ρ = {1, 2, 3, 4, 6}.

Область значений J_ρ = {1, 3, 4, 5, 6}.

Обратное отношение ρ^{-1} = {(4,1), (5,2), (6,3), (1,4), (3,6)}.

Отношение ρ - антирефлексивно, не симметрично, не транзитивно.

Область определения D_γ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Область значений J_γ = {1, 3, 4, 5, 6}.

Отношение γ - не рефлексивно, антисимметрично, не транзитивно.

Композиция $\rho \circ \gamma$ = {(1,5), (2,6), (3,6), (4,1), (6,4)}.

Например:

Отношение ρ= { (x, y) | сравнение по модулю m, x,y $\in$ N }.

Отношение сравнения по модулю m на множестве натуральных чисел: x = y mod m, что означает x и y имеют одинаковый остаток при делении на m (классы вычетов по модулю m).

Отрезок натурального ряда N_4={1,2,3,4}.

Отношение сравнения по модулю 2 на N_4 :

δ = { (1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2) ,(4,4)}.

Область определения D_δ = {1, 2, 3, 4}.

Область значений J_δ = {1, 2, 3, 4}.

Отношение δ - рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Отношение δ - отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности: [1]={ 1,3 }=[3]
[2]={ 2,4 }=[4].

Например:

Отношения φ и ν заданы на множестве N_4.

φ ={ (1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (1,4) }

ν={ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4) }.

Область определения D_φ = { 1, 2, 3 }.

Область значений J_φ = { 2, 3, 4 }.

Отношение φ - антирефлексивно,антисимметрично,транзитивно.

Отношение φ - отношение строгого порядка.

Область определения D_ν = { 1, 2, 3 ,4 }.

Область значений $J_\nu = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Отношение ν - рефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно.

Отношение ν - отношение нестрогого частичного порядка.

Отношение ν - отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности : $[1]=\{ 1 \}$
$[2]=\{ 2 \}$
$[3]=\{ 3 \}$
$[4]=\{ 4 \}$.

Функциональные отношения

Пусть $\rho \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Функциональное отношение – бинарное отношение $\boldsymbol{\rho}$, для которого
$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{D}_\rho \;\; \exists\, !\, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\!: \mathbf{x}\, \boldsymbol{\rho}\, \mathbf{y}$.

Всюду определённое отношение – бинарное отношение ρ, для которого $\mathbf{D}_\rho = \mathbf{X}$ ("нет одиноких **x**").

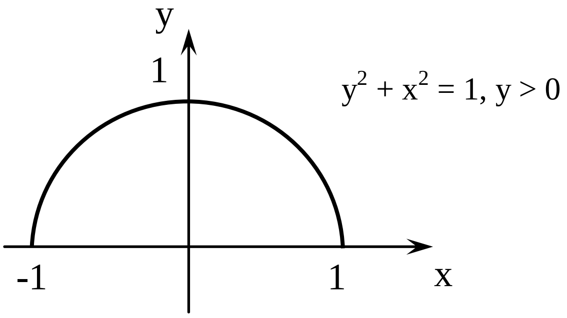
Сюръективное отношение – бинарное отношение ρ, для которого $\mathbf{J}_\rho = \mathbf{Y}$ ("нет одиноких **y**").

Инъективное отношение – бинарное отношение, в котором разным **x** соответствуют разные **y**.

Биекция – функциональное, всюду определённое, инъективное, сюръективное отношение, задаёт взаимно однозначное соответствие множеств.

Например:

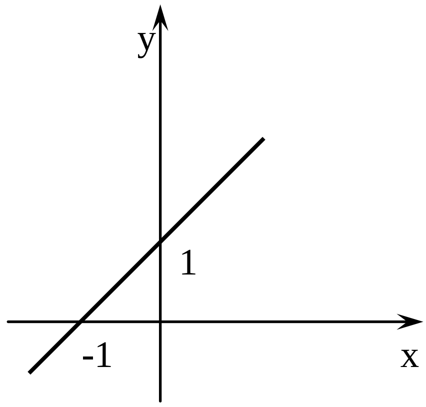
Пусть $\rho = \{ (x, y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 = 1, y > 0 \}$.



Отношение ρ - функционально,
не всюду определено ("есть одинокие **x** "),
не инъективно (есть разные **x,** которым соответствуют одинаковые **y**),
не сюръективно ("есть одинокие **y** "),
не биекция.

Например:

Пусть $\wp = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x+1\}$



Отношение $\wp$ - функционально,
Отношение $\wp$ - всюду определено ("нет одиноких **x** "),
Отношение $\wp$ - инъективно (нет разных **x,** которым соответствуют одинаковые **y**),
Отношение $\wp$ - сюръективно ("нет одиноких **y** "),
Отношение $\wp$ - биективно, взаимно-однородное соответствие.

Например:

Пусть $\varphi=\{(1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (1,4)\}$ задано на множестве N_4.
Отношение φ - не функционально, x=1 соответствует три y: (1,2), (1,3), (1,4)
Отношение φ - не всюду определенно $D_\varphi=\{1,2,3\}\neq N_4$
Отношение φ - не сюръективно $I_\varphi=\{1,2,3\}\neq N_4$
Отношение φ - не инъективно, разным x соответствуют одинаковые y, например (2,3) и (1,3).

Задание к лабораторной работе

1. Заданы множества **N1** и **N2**. Вычислить множества:

$$(N1 \times N2) \cap (N2 \times N1);$$
$$(N1 \times N2) \cup (N2 \times N1);$$
$$(N1 \cap N2) \times (N1 \cap N2);$$
$$(N1 \cup N2) \times (N1 \cup N2),$$

где **N1 = {**цифры номера зачетной книжки, три последние**};**
N2 = {цифры даты и номера месяца рождения**}.**

2.Отношения **ρ** и **γ** заданы на множестве $\mathbf{N_6=\{1,2,3,4,5,6\}}$.
Описать отношения **ρ**, **γ**, **ρ ○ γ** списком пар.
Найти матрицы отношений **ρ** и **γ**.
Для каждого отношения определить область определения и область значений.
Определить свойства отношений.
Выделить отношения эквивалентности и построить классы эквивалентности.
Выделить отношения порядка и классифицировать их.

1) $\rho = \{ (m, n) \mid m > n \}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 2$\}$
2) $\rho = \{ (m, n) \mid m < n \}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 3$\}$
3) $\rho = \{ (m, n) \mid (m + n)$ - четно$\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m^2 = n \}$
4) $\rho = \{ (m, n) \mid m / n$ - степень 2 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m = n \}$
5) $\rho = \{ (m, n) \mid m / n$ - четно$\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \geq n \}$
6) $\rho = \{ (m, n) \mid m / n$ - нечетно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 4$\}$
7) $\rho = \{ (m, n) \mid m * n$ - четно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$
8) $\rho = \{ (m, n) \mid m$ - четно, n - четно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m$ делитель $n \}$
9) $\rho = \{ (m, n) \mid m = n \}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid (m + n) \leq 5 \}$
10) $\rho=\{(m, n) \mid m$ и n имеют одинаковый остаток от деления на 3$\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid (m - n) \geq 2 \}$
11) $\rho = \{ (m, n) \mid (m + n)$ делится нацело на 2 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid 2 \leq (m - n) \leq 4 \}$
12) $\rho = \{ (m, n) \mid (m + n)$ делится нацело на 3 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \neq n \}$
13) $\rho = \{ (m, n) \mid (m - n)$ делится нацело на 2 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m < n + 2 \}$
14) $\rho = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 4 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$
15) $\rho = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 3 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid 1 \leq (m - n) \leq 3 \}$
16) $\rho = \{ (m, n) \mid (m - n)$ делится нацело на 4 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \neq n \}$
17) $\rho = \{ (m, n) \mid m$ - нечетно, n - нечетно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid m \leq n$, n-четно $\}$
18) $\rho = \{ (m, n) \mid m$ и n имеют нечетный остаток от деления на 3 $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid (m - n) \geq 1 \}$
19) $\rho = \{ (m, n) \mid m * n$ - нечетно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid$ сравнение по модулю 2 $\}$
20) $\rho = \{ (m, n) \mid m * n$ - четно $\}$
$\gamma = \{ (m, n) \mid 1 \leq (m - n) \leq 3 \}$

3. Определить является ли заданное отношение **f** - функциональным, всюду определенным, инъективным, сюръективным, биекцией.

Построить график отношения, определить область определения и область значений.

1) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y=1/x +7x \}}$
2) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid x \ge y \}}$
3) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y \ge x \}}$
4) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y \ge x, x \ge 0 \}}$
5) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 = 1 \}}$
6) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid 2| y | + | x | = 1 \}}$
7) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid x + y \le 1 \}}$
8) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid x = y^2 \}}$
9) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = x^3 + 1\}}$
10) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = -x^2 \}}$
11) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid | y | + | x | = 1 \}}$
12) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid x = y^{-2} \}}$
13) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 \ge 1, y > 0 \}}$
14) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 = 1, x > 0 \}}$
15) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 \le 1, x > 0 \}}$
16) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid x = y^2 , x \ge 0 \}}$
17) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = 2| x | + 3 \}}$
18) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = | 2x + 1| \}}$
19) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = 3^x \}}$
20) $\mathbf{f=\{ (x, y) \in R^2 \mid y = 3x^2 - 2 \}}$

Контрольные вопросы

1. Декартово или прямое произведение множеств.
2. Определение бинарного отношения.
3. Способы описания бинарных отношений.
4. Область определения и область значений.
5. Свойства бинарных отношений.
6. Отношение эквивалентности и классы эквивалентности.
7. Отношения порядка: строгого и нестрого, полного и частичного.
8. Классы вычетов по модулю m.
9. Функциональные отношения.
10. Инъекция, сюръекция, биекция.

Лабораторная работа № 3

Основные понятия комбинаторики

Цель работы: приобретение практических навыков в решении задач пересчета для основных видов комбинаторных соединений.

Теоретическая справка

Правила суммы и произведения

Важную роль при решении многих комбинаторных задач играют правила суммы и произведения.

Сформулируем эти правила с точки зрения теории множеств и комбинаторики.

Правило суммы

Теоретико-множественная формулировка правила суммы

Пусть A и B – конечные множества, $|A| = m$; $|B| = n$; $A \cap B = \varnothing$. Тогда объединение множеств: $A \cup B$ содержит $m + n$ элементов.

В общем случае.

Пусть $|M_1| = m_1$, $|M_2| = m_2$, … , $|M_k| = m_k$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$, $\forall\, i,j=1..k$, $i \neq j$. Тогда, $|M| = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Комбинаторная формулировка правила суммы

Если объект a может быть выбран m способами, а объект b – n другими способами, то выбор "a или b" может быть осуществлен m + n способами. Выбор a и b – взаимоисключающий: выбор a исключает выбор b; выбор a не совпадает с каким-либо способом выбора b.

В общем случае.

Если объект a_1 может быть выбран m_1 способами; a_2 – m_2 способами; … ; a_k – m_k способами. Выбор "a_1 или a_2…или a_k " может быть осуществлен $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ способами.

Например:

Из Киева в Донецк в течение суток отправляется 3 поезда, 1 самолет и 2 автобуса. Сколько существует способов выехать из Киева в Донецк?

Решение:

По правилу суммы имеем N= 3+1+2 = 6 способов.

Правило произведения

Теоретико – множественная формулировка правила произведения

Если A и B – конечные множества и $| A | = m$, $| B | = n$, то мощность множества $A \times B$ равна $m \times n$.
В общем случае.

Если $| M_1 | = m_1$, $| M_2 | = m_2$, … , $| M_k |=m_k$, то $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k | = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$.

Комбинаторная формулировка правила произведения

Если объект a может быть выбран m способами, и после этого объект b может быть выбран n способами, то выбор пары (a, b) может осуществляться $m \times n$ способами (выбор a и b независимы).

В общем случае.

Пусть объект a_1 может быть выбран m_1 способом, объект a_2 – m_2 способами; объект a_k – m_k способами, причем выбор a_1 не влияет на число способов выбора a_2, … ,a_k, выбор a_2 на число способов выбора a_3, … ,a_k и т.д. Тогда, выбор упорядоченного множества объектов (a_1, a_2 …a_k) – в указанном порядке можно осуществить $m_1 \times m_2 \times_{\ldots} \times m_k$ способами.

Например:
Сколько различных танцующих пар можно составить из 3-х девушек и 2-х юношей?
Решение:
Число способов выбрать одну девушку из трех равно 3, при каждом способе выбора девушки число способов выбрать юношу постоянно и равно 2.По правилу произведения имеем $N = 3 \times 2 = 6$ пар.

Сложный выбор объектов

Часто в комбинаторных задачах выбор объектов происходит в несколько ступеней, на некоторых работает правило суммы, на других – правило произведения. При сложном выборе объектов важно обеспечить полный перебор всех возможных случаев.

Например:
Имеется три различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее, чем из 2-х флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок сигналов учитывается?
Решение:
Сигнал может состоять либо из 2-х флагов, либо из 3-х. Одновременное выполнение 2-х действий невозможно. Пусть N – общее число способов поднять сигнал, состоящий не менее, чем из 2 флагов; N_2 – число способов поднять сигнал, состоящий ровно из 2 флагов; N_3 – ровно из 3 флагов.
По правилу суммы имеем: $N = N_2 + N_3$. Далее N_2 и N_3 находим по правилу произведения:

$N_2=3\times2=6$;
$N_3=3\times2\times1=6$.
В итоге имеем: N=12.

Соединения без повторений

Соединения – простые комбинаторные объекты, к которым относятся перестановки, сочетания и размещения.

Перестановки

Перестановка из n элементов – упорядоченная последовательность элементов n-элементного множества (кортеж).
Различные перестановки отличаются только порядком элементов в них.

Число **перестановок** из **n** различных элементов равно: $P_n = n!$

Определим 0!=1

Пусть A = {1,2,3}.Число различных перестановок равно 3!=6.
Сгенерируем все перестановки во множестве A: {123, 132, 213, 231, 312, 321}.

Например:
1) Число способов стать в очередь за стипендией из 17 человек? $P_{17}=17!$
2) Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг? $P_5=5!$
3) Сколько различных слов можно образовать, переставляя буквы в слове “ковш”? $P_4=4!$

Размещения из n элементов по m

Размещения – упорядоченная последовательность из m элементов множества, содержащего всего n элементов.
Различные размещения отличаются составом элементов и (или) порядком их следования.

Число **размещений** из **n** различных элементов по **m** равно $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Пусть A={1,2,3}. Сгенерируем всевозможные размещения из 3 по 2:
{12, 21, 13, 31, 23, 32}.

Например:
1) Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг из 7?
Решение:
Поскольку порядок книг на полке имеет значение, то число способов равно $A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!}$.
2) Сколько различных четырёхсимвольных идентификаторов можно получить в алфавите {A,B,C,D,E}.

Решение:
С учетом того, что порядок символов в идентификаторе имеет значение, получим $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!}$.

Замечание: Формула A_n^m верна для всех $m \le n$. При $m = n$ $A_n^n = \frac{n!}{0!} = P_n$.

Сочетания

Сочетания из n по m – последовательность из m элементов, взятых из n-элементного множества, без учета порядка следования элементов.

Сочетание – произвольное (неупорядоченное) m-подмножество из n элементов. Различные сочетания отличаются составом элементов, но не их порядком.

> Число **сочетаний** из **n** различных элементов по **m** равно:
> $$C_n^m = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}, \ m \le n.$$

Свойства сочетаний

1) $A_n^m = C_n^m \cdot m! \ \Rightarrow \ C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;

2) $C_n^n = 1; C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1; C_n^m = 0$, при $m \le 0$ и $m \ge n$.

3) Симметричность числа сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

4) Правило Паскаля.
Для числа сочетаний из n по m справедливо следующее рекуррентное соотношение: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

5) Бином Ньютона.
$$(a+x)^n = C_n^0 \cdot a^n \cdot x^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot x^2 + \ldots + C_n^n \cdot a^0 \cdot x^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot x^k.$$

При $a = x = 1$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^1 + C_n^n = 2^n$,где
C_n^k, $k = 0,1\ldots n$ - биномиальные коэффициенты.

Пусть A={1,2,3}. Сгенерируем всевозможные сочетания из 3 по 2: {12, 31, 32}.

Например:
1) Сколькими способами можно выбрать 4 человека из 52 в президиум собрания?
Решение:
Поскольку порядок выбора не имеет значения, получим: $C_{52}^4 = \frac{52!}{4! \cdot 48!}$

2) Определить число способов, которыми можно выбрать 5 карт из 36 так, чтобы среди них были 3 карты одного достоинства?

Решение:

В колоде из 36 карт четыре масти и в каждой 9 достоинств (короли, тузы…). Число способов выбрать одно достоинство равно 9 или C_9^1.

Тогда, число способов выбрать 3 карты одного достоинства равно 9* C_4^3

Оставшиеся две карты могут быть любыми из 33 карт, то есть C_{33}^2. По правилу произведения имеем: $C_9^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{33}^2$.

Соединения с повторениями

До сих пор рассматривали соединения из множеств, состоящих из различных элементов. Часто на практике имеют место случаи, когда среди рассматриваемых элементов есть одинаковые.

Пусть дано множество А, состоящее из n элементов, в котором n_1 элементов принадлежит первому типу; n_2 элементов принадлежит второму типу элементов, n_k - k-тому типу. Элементы одного и того же типа неразличимы между собой.

Спецификацией множества А называется набор (n_1, n_2, … ,n_k).

Следствие: Если множество А, | A | = n, состоит из объектов 2 типов: m-одного типа, (n – m) –другого:

Число перестановок с повторениями n - элементного множества с заданной спецификацией равно

$$P(n;n_1,n_2,...,n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}, \text{ где } \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

$$P(m, n-m) = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m.$$

В общем случае:

$$P(n;n_1,n_2,...,n_k) = C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot ...\cdot C_{n_k}^{n_k}.$$

Например:

Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 12341234?

Решение:

В числе 8 цифр: две-“1”; две-“2”; две-“3”; две-“4”. $P(8;2,2,2,2) = \frac{8!}{(2!)^4}$.

Например:

Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова “Миссисипи”?

*Решение:*Всего в слове 9 букв, из них – 4 буквы “и”, три буквы ”с”, одна буква ”м” и одна буква ”п”. $P(9;4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!}$.

Размещения с повторениями

(m перестановки с неограниченными повторениями)

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – “представители” 1-го, 2-го, … n-го типа элементов. Объектов каждого типа имеется в неограниченном количестве, элементы одного типа неразличимы между собой. Рассмотрим следующую схему выбора упорядоченной последовательности из m элементов: выбираем элемент на 1-е место, имеется n вариантов выбора. После этого элемент возвращается обратно и может быть выбран еще, т.е. на 2-е место имеется n претендентов и т.д. На m-е место также имеется n претендентов.

Число различных **размещений с повторениями** из **n** по **m** равно

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Здесь может быть m > n, m < n, m = n.

Например:
Сколько различных сигналов могут дать 4 светофора одновременно?
Решение:
Число различных сигналов на одном светофоре равно 3. Разные светофоры могут подавать одинаковые сигналы. Тогда, N- число различных сигналов, равно числу различных размещений с повторениями из 3 по 4:

$$N = \tilde{A}_3^4 = 3^4.$$

Сочетания с повторениями

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - “представители” 1-го, 2-го, …, n-го типа элементов. Объектов каждого типа имеется в неограниченном количестве, элементы одного типа неразличимы между собой.

Сочетания с повторениями отличаются составом элементов, входящих в выбираемое множество. Порядок элементов не имеет значения. Имеет значение, сколько элементов каждого типа вошло в сочетание. Рассмотрим определенное сочетание.

Пусть в него входят: r_1 объектов 1-го типа,
r_2 объектов 2-го типа,
. . . .
r_n объектов n-го типа;

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = m.$$

Некоторые r_i могут быть равны 0. Сочетанию можно поставить в соответствие следующую схему:

$$\underbrace{00\ldots0}_{\mathbf{r_1}}|\underbrace{0\ldots0}_{\mathbf{r_2}}|\ldots|\underbrace{00..0}_{\mathbf{r_n}}$$

Вертикальные черточки отделяют элементы одного типа от элементов другого. Если элементов какого-либо типа нет, две черты будут рядом. Количество черточек равно (n-1). Каждому сочетанию с повторениями соответствует схема и наоборот, каждая подобная схема соответствует некоторому сочетанию с повторениями.

Количество сочетаний с повторениями из n по m равно числу таких схем.

Всего в схеме (n – 1) + m объектов, (n – 1) – черточек и m – нулей. Число схем равно числу различных перестановок из (n + m – 1) – элементов, среди которых (n – 1) – одинаковых “ | ” и m – одинаковых “0”.

$$P(n+m-1; n-1, m) = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!} = C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}$$

Число различных **сочетаний с повторениями** из **n** по **m** равно:

$$\tilde{C}_n^m = P(n+m-1; n-1, m) = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!} = C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}$$

Например:

1) В кондитерской продают 4 вида пирожных. Сколькими способами один человек может купить 8 пирожных?

$$\tilde{C}_4^8 = C_{4-1+8}^{4-1} = C_{11}^{3}$$

2) В кондитерской продают 4 вида пирожных. Сколькими способами 8 различных человек могут купить по 1 пирожному?

$$\tilde{A}_4^8 = 4^8$$

Формулы пересчета для основных видов комбинаторных соединений

Соединения	Без повторений элементов	С повторениями элементов
Сочетания	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$\tilde{C}_n^m = C_{n-1+m}^{n-1} = C_{n-1+m}^{m}$
Размещения	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$\tilde{A}_n^m = n^m$
Перестановки	$P_n = n!$	$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$

Принцип включения-исключения

Пусть имеется n объектов и множество свойств $H = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Каждый объект может обладать или не обладать одним или несколькими свойствами α_i.

Введем ряд обозначений.

$N(\alpha_i)$ – количество объектов, обладающих свойством α_i.

$N(\overline{\alpha}_i)$– количество объектов, не обладающих свойством α_i.

$N(\alpha_i, \alpha_j)$ – количество объектов, обладающих двумя свойствами α_i, α_j.

$N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ – количество объектов, обладающих тремя свойствами $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$.

$N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – количество объектов, обладающих всеми n свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n)$ – количество объектов, не обладающих ни одним из n свойств $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Формула включений и исключений определяет количество объектов, не обладающих ни одним из n свойств, заданных множеством H.

При произвольном n справедлива следующая формула включений и исключений:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i \le j \le n} N(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + ... +}$$

$$\mathbf{+ (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)}$$

Например:

На фирме работает 67 сотрудников. Из них 47 владеют английским языком, 35 -немецким, 20-французским; одновременно английским и немецким владеют – 23 человека, английским и французским-12, немецким и французским-11, тремя языками владеют 5сотрудников. Сколько человек не владеют ни одним языком?

Решение:

Определим следующие свойства:

α_1 – “владеть английским языком”;

α_2 – “владеть немецким;

α_3 – “владеть французским”.

По формуле включений и исключений имеем:

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = N - \sum_{i=1}^{3} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} N(\alpha_i, \alpha_j) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$$= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =$$

$$= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6.$$

Шесть человек не владеют ни одним из перечисленных языков.

Частные случаи формулы включений и исключений

1. Если все свойства α_i попарно несовместны, т.е. $N(\alpha_i,\alpha_j)=0, i\neq j$, то формула имеет вид: $N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,...,\overline{\alpha}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i)$

2. Если каждое число $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2},..., \alpha_{i_k})$ зависит не от характера свойств, от их количества, то формула приобретает вид:

$$N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots,\overline{\alpha}_n) = N - C_n^1 \cdot N^{(1)} + C_n^2 \cdot N^{(2)} + \ldots + (-1)^k \cdot C_n^k \cdot N^{(k)} + \ldots + \\ + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot N^{(n)},$$

где $N^k = N(\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ik})$ - число объектов, обладающих k свойствами.

3. Для упрощения применения формулы включений и исключений предлагается следующий формальный прием:

обозначим $\overline{\alpha}_i := 1-\alpha_i$, тогда $N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,...,\overline{\alpha}_n) = N[(1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha_n)]$.

Введем правила раскрытия скобок:

$N(1) = N; N(a+b) = N(a) + N(b); N(-a) = -N(a)$.

Например:

при $n = 3$ имеем:

$$N(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3) = N[(1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot(1-\alpha_3)] = N(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3- \\ -\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = N(1) - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

Такая формальная запись позволит найти число объектов, обладающих одними и не обладающих другими свойствами, например:

$$N(\alpha_1\overline{\alpha}_2\alpha_3) = N[\alpha_1\cdot(1-\alpha_2)\cdot\alpha_3] = N(\alpha_1\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Задача о беспорядках

Пусть множество $\mathbf{A = \{1,\ 2,\ 3,...,n\}}$. Рассмотрим перестановки элементов множества A.

Элемент a_i перестановки называется **неподвижным**, если $a_i = i$, т.е. элемент стоит на своем месте.

Например:

при $n = 5$

5 2 4 3 1 – элемент “2” – неподвижный;

1 2 3 4 5 – все элементы неподвижны.

Беспорядком называется перестановка, не имеющая неподвижных элементов, т.е. $\forall i = \overline{1,n} \quad a_i \neq i$.

Постановка задачи:

Определить D_n - количество беспорядков в n-элементном множестве, или количество перестановок чисел $1,2,\ldots,n$ таких, что $\forall i=\overline{1,n}\quad a_i \neq i$? D_n называют **субфакториалом**.

Решение:

Общее число перестановок – $n!$.

Обозначим через α_i такое свойство перестановки, когда i-й элемент стоит на своем месте, т.е. $a_i = i$.

$N(\alpha_i)$- число перестановок, обладающее свойством α_i, т.е. $a_i = i$.

$N(\alpha_i) = (n-1)!$ - в этих перестановках только один элемент находится на своем месте, остальные – в беспорядке. $N(\alpha_1)=N(\alpha_2)=\ldots=N(\alpha_n)=(n-1)!=N^1$, т.к. число перестановок не зависит от того, какой именно элемент находится на своем месте.

Обозначим через N^2 - количество перестановок, в которых только два элемента находятся на своих местах, $N^2=(n-2)!$, … , N^k– количество перестановок, в которых только k элементов находятся на своих местах $N^k=(n-k)!$.

По формуле включений-исключений имеем:

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)! \tag{1}$$

Распишем формулу:

$$\begin{aligned} D_n &= n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! = \\ &= n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Задача о встречах

Постановка задачи:

Определить количество таких перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1,2,\ldots,n$, что точно k элементов из n находятся на своих на местах (т.е. $a_i = i$), а остальные $n-k$ $(k \le n)$ находятся в беспорядке.

Иначе: нас интересуют перестановки, в которых точно k элементов неподвижны.

Решение:

Из общего числа элементов некоторым образом выбирается k, которые остаются на своих местах, остальные $n-k$ элементов находятся в беспорядке. Количество способов, которыми можно переставить n элементов при таких условиях, равно $D_{n,k} = C_n^k \cdot D_{n-k}$.

Распределения объектов по ячейкам

Даны m объектов (предметов) и k ячеек (ящиков). Требуется определить количество способов, которыми объекты могут быть распределены по ячейкам. При этом в зависимости от условия задачи необходимо учитывать следующие варианты:

- объекты могут быть одинаковыми или различными;
- ячейки могут быть одинаковыми или различными;
- возможно ограничение на количество объектов в ячейках;
- возможен учёт порядка объектов в ячейках или порядка ячеек.

Прежде чем рассмотреть решения различных вариантов постановки задачи распределения объектов по ячейкам, введём условные обозначения:

0 0 0 …0 – объекты (m штук);

/ – перегородка, отделяющая одну ячейку от другой (всего перегородок k-1 штук).

Приведём несколько примеров распределения объектов по ячейкам с учётом введённых обозначений:

$\underbrace{///.../}_{k-1}\underbrace{00...0}_{m}$ - все объекты попали в последнюю ячейку;

$\underbrace{000}_{3}\underbrace{//.../}_{k-1}\underbrace{00...0}_{m}$ - три объекта в первой ячейке, все остальные в последней.

Перейдём к обзору методов решения основных задач распределения объектов по ячейкам.

Распределение одинаковых объектов

Во всех следующих задачах (кроме пункта 5.4) предполагается, что ячейки различны и различают их по номерам: $1,2,3,\ldots,k$.

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки не могут быть пустыми

Ввиду условных обозначений, данная задача может быть переформулирована следующим образом: необходимо в $m-1$ интервале между объектами разместить $k-1$ перегородку так, чтобы две перегородки не стояли рядом. Это можно сделать C_{m-1}^{k-1} способами (до первой перегородки – в первую ячейку, между первой и второй – во вторую, и т.д.).

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки могут быть пустыми

При данной формулировке задачи перегородки (т.е./) могут стоять произвольным образом, т.е. возможны следующие варианты:

/ / 0 0 / 0…0 – два объекта в третьей ячейке, все остальные – в последней;

……………

/…/ 0…0 – все объекты в последней ячейке.

Следовательно, из имеющихся $m+k-1$ мест необходимо выбрать места для $k-1$ перегородки. Количество способов, которыми это можно сделать равно

$$C_{m+k-1}^{k-1} = \tilde{C}_m^k = C_{m+k-1}^m$$

Получаем – сочетания с повторениями.

Возможен другой способ рассуждений. Любому объекту ставится в соответствие номер ячейки, в которую он попал. Таких номеров k. Нужно набрать сочетания из k номеров по m (сочетания – так как объекты одинаковы, имеет значение число объектов, получивших номер 1, номер 2 и т.д., а не их порядок). Результатом данного способа также являются сочетания с повторениями.

Вместимость каждой ячейки не менее, чем j объектов

Сначала в каждую ячейку помещаем по $\mathbf{j}$ объектов, а затем оставшиеся $(\mathbf{m-k\cdot j})$ объектов распределяем без ограничения на число объектов в ячейках. Получаем количество способов распределения:

$$\mathbf{\tilde{C}_k^{m-k\cdot j} = C_{m-k\cdot j+k-1}^{m-k\cdot j} = C_{m-k\cdot j+k-1}^{k-1}}.$$

Распределение различных объектов по ячейкам без учёта порядка объектов в ячейке

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки могут быть пустыми

Любой объект может попасть в любую ячейку. Т.е. первый объект можно поместить в любую из k ячеек, второй (независимо от первого) также поместить в любую из k ячеек и т.д. По правилу произведения результат будет следующим:

$$k * k * \ldots * k = k^m$$

Вместимость ячеек задана

Пусть вместимость первой ячейки – n_1, вместимость второй ячейки – n_2, …вместимость k-ой ячейки – n_k. Причём $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$. Объект для первой ячейки может быть выбран $C_n^{n_1}$ способами, для второй – $C_n^{n_2}$ и т.д.

По правилу произведения число способов заполнения всех ячеек равно:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} = P(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки не могут быть пустыми

Рассмотрение данной задачи сводится к рассмотрению принципа включения и исключения.

Обозначим через α_i – свойство распределения, заключающееся в том, что ячейка с номером i пуста.

$N = k^m$ – число всех распределений m объектов по k ячейкам;

$N^{(1)} = N(\alpha_1) = (k-1)^m$ – число распределений m объектов по (k-1) ячейке (одна пустая), …, соответственно,(i – пустых): $N^{(i)} = (k-i)^m$.

По формуле включений и исключений получим:

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_k) = k^m - C_k^1 \cdot (k-1)^m + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^m = \\ = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot C_k^i \cdot (k-i)^m$$

Распределение различных объектов по ячейкам с учётом их порядка в различных ячейках

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки могут быть пустыми

Если объекты не различать, то число распределений:

$$C_{k+m-1}^{k-1} = \tilde{C}_m^k = C_{k+m-1}^m$$

Каждому способу распределению одинаковых объектов по ячейкам соответствует m! способов распределения различных объектов с учётом их порядка. По правилу произведения получаем:

$$\tilde{C}_k^m \cdot m! = C_{m+k-1}^{k-1} \cdot m! = \frac{(m+k-1)! \cdot m!}{(k-1)! \cdot m!} = A_{m+k-1}^m$$

Вместимость ячеек неограниченна, ячейки не могут быть пустыми

Без учёта порядка (для не различных объектов) имеем C_{m-1}^{k-1} способов распределений. Каждое такое распределение порождает m! распределений с учётом порядка. Таким образом, по правилу произведения число способов распределения объектов по ячейкам при заданных условиях будет вида:

$$C_{m-1}^{k-1} \cdot m! = \frac{(m-1)! \cdot m!}{(k-1)! \cdot (m-k)!}$$

Распределение различных объектов по одинаковым ячейкам

Через S_m^k обозначим количество способов распределения m различных объектов по k одинаковым ячейкам. Каждая из этих ячеек не может быть пустой. Из каждого такого распределения можно получить k! способов распределения по различным ячейкам. Следовательно, распределить m различных объектов на k одинаковых ячеек можно

$$S_m^k = \frac{1}{k!}\left(k^m - C_k^1 (k-1)^m + C_k^2 (k-2)^m + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}\right) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_k^i (k-i)^m$$

способами .

Примечание: $k > m \Rightarrow S_m^k = 0$.

Задания к лабораторной работе

В соответствии с заданным вариантом решить задачу пересчета.

Вариант №1.

1.Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами это можно сделать?

2.Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

3.В утреннике участвуют 12 детей. У деда Мороза имеется 15 одинаковых подарков. Сколько способов раздать детям подарки, если каждый ребенок должен получить хотя бы по одному подарку?

4.Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичанина, 3 француза и 3 турка так, что никакие три соотечественника не сидели рядом?

Вариант №2.

1.Десять кресел поставлены в ряд. Сколькими способами на них могут сесть два человека? Сколькими способами эти два человека могут сесть рядом? Сколькими способами они могут сесть в ряд так, чтобы между ними было, по крайней мере, одно кресло?

2. Сколькими способами можно распределить 6 разных ящиков на 8 этажей, чтобы на восьмом этаже было не менее двух ящиков?

3.Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по 5 различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

4.На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42 человека, и с сыром и с колбасой – 28 человек, и с колбасой и с ветчиной – 31 человек, и с сыром и с ветчиной – 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

Вариант №3.

1.Из группы в 20 солдат каждую ночь выделяется наряд, состоящий из 3 человек. Сколько ночей подряд командир может выделять наряд, не совпадающий ни с одним из предыдущих? Сколько раз при этом в наряд войдет какой-то определенный солдат?

2.Сколько существует пятизначных чисел? Во скольких из них все цифры четные? Во сколько не входят цифры, меньшие, чем 6?

3.Сколькими способами можно расставить 12 книг в шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 12 книг?

4. В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 — немецкий, 8 — французский, 5 знают английский и немецкий, 4 — немецкий и французский, 3 — французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько человек знает ровно 1 язык?

Вариант №4.

1.Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова “уравнение”?

2.Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

3.Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?

4. Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Вариант №5.

1. 1.В автомашине семь мест. Сколькими способами могут 7 человек усесться в машину, если место водителя могут занять толькоо трое из них?

2.Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?

3.Сколькими способами 10 полтинников можно разложить по 4 различным пакетам, если пакеты могут быть пустыми?

4. Сколько существует целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Вариант №6.

1.Сколькими способами можно распределить 15 различных предметов между тремя лицами, если первый должен получить 2 предмета, второй – 3 предмета и третий – 10 предметов?

2.Сколькими способами можно расположить в ряд 5 красных мячей, 4 черных, 5 белых мячей так, чтобы мячи лежащие на краях, были одного цвета?

3. Сколько слов, состоящих из двух гласных и двух согласных, можно образовать из слова «функция»?

4. Сколько существует перестановок 9 различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 2 или ровно 6 предметов?

Вариант №7.

1. Сколько трехзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

2.Найти число всех возможных перестановок букв слова «зоология». Сколько среди них таких, в которых 3 буквы «о» стоят рядом? Сколько среди них таких, в которых в точности 2 буквы «о» стоят рядом?

3.Бросают 7 игральных костей. Сколько может получиться различных результатов, если на каждой кости нанесены 1,2,3,4,5,6 очков и результаты отличающиеся только порядком очков, считаются одинаковыми?

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «тартар», чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

Вариант №8.

1.У филателиста 8 различных канадских марок и 10 марок США. Сколькими способами он может отобрать 3 канадские и 3 американские марки и наклеить их в альбом на 6 пронумерованных мест?

2.Симфония записана на 4 пластинках, причем для записи использовались обе стороны каждой пластинки. Сколько существует способов проиграть эту симфонию так, чтобы, по крайней мере, одна ее часть попала не на свое место?

3. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел, по крайней мере, один человек?

4. В группе 25 студентов. Языком программирования Си из них владеют 19 человек, Паскалем – 12 человек, Ассемблером – 8 человек; Си и Паскалем владеют 10 человек, Си и Ассемблером – 7 человек, Паскалем и Ассемблером – 6 человек. Всеми тремя приведенными языками программирования владеют 5 человек. А несколько студентов не владеют ни одним из этих языков. Сколько таких студентов?

Вариант №9.

1. Пассажирский поезд состоит из двух багажных вагонов, четырех плацкартных и трех купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться вначале, а купированные – в конце? Если вагоны могут следовать в любом порядке?

2. Сколькими способами 3 человека могут распределить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 финик, 1 лимон, 1 айву и 1 грушу?

3.Вступительные экзамены сдают 20 человек, сколькими способами они могут распределиться по 4 аудиториям, если вместимость аудиторий не менее 4 человек?

4. Сколько способами можно переставить цифры числа 123512345 так, чтобы две одинаковые цифры не шли друг за другом?

Вариант №10.

1.Некто имеет 8 различных пар перчаток. Сколькими способами он может отобрать одну перчатку для правой руки и одну перчатку для левой, чтобы они не принадлежали одной паре?

2.В течение 10 недель студенты сдают 10 экзаменов, в том числе 2 по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены так, чтобы экзамены по математике не следовали один за другим?

3.В парикмахерской 6 мастеров, сколькими способами могут обслужиться 11 клиентов, если каждый из мастеров должен обслужить хотя бы одного клиента?

4.Имеется 5 писем, каждое из которых адресовано одному из пяти различных адресатов. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем так, что ни одно из писем не попадет по назначению?

Вариант №11.

1.Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр от 1 до 9, если каждое число должно состоять из 3 четных и 3 нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза?

2.Выходя из вагона, некто обнаружил в кармане никель, дайм, квотер, полдоллара. Сколькими способами он может дать на чай носильщику?

3.Сколькими способами можно распределить 15 одинаковых ручек между 4 клерками, если каждый должен получить не менее 3?

4. Сколько двузначных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Вариант №12.

1.Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают 2-х дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый дежурит ровно один раз?

2.В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде четырех человек при условии, что все они поедут:

- в разных вагонах;
- в одном вагоне?

3.Сколькими способами можно надеть пять различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

4. Некто желает послать своему другу 8 различных фотографий. Сколькими способами он может это сделать, используя 5 конвертов? Пустые конверты посылать нельзя.

Вариант №13.

1.Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв, составляющих слово «гипотенуза», равно числу всех возможных перестановок букв, составляющих слово «призма».

2.Сколько существует пятизначных чисел? Сколько среди них таких, которые начинаются цифрой 4? Которые не содержат цифры 5? Которые делятся на 5?

3.Сколькими способами могут распределиться 5 экзаменаторов между 40 абитуриентами, если каждый из них должен принять не менее 5 человек?

4.Берутся перестановки 5 чисел 1,2,3,4,5. Во скольких из них ни одно число не стоит на своём месте?

Вариант №14.

1.Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать две одной масти и три карты другой масти?

2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «молоко» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке и две буквы «о» не шли подряд?

3.Сколькими способами можно распределить 15 человек по 3 бригадам, если каждая из бригад выполняет отдельный вид работ?

4. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5, ни на 9?

Вариант №15.

1. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

2. Музыкальный концерт состоит из трех песен и двух скрипичных пьес. Сколькими способами можно составить программу концерта так, чтобы он начинался и заканчивался исполнением песни, и чтобы скрипичные пьесы не исполнялись подряд?

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «комиссия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

4. Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро — фрукты, пятеро — печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое — бутерброды и печенье, двое — фрукты и печенье, а один — и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?

Вариант №16.

1.Сколькими способами из колоды в 52 карты можно выбрать 2 с одинаковыми номерами и 3 с другими одинаковыми между собой номерами?

2.Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами можно это сделать, если для передачи писем можно послать 3 курьеров и каждое письмо можно дать любому из них?

3.Сколькими способами можно разложить в 9 луз 7 белых и 2 черных шара, если часть может быть пустой, лузы считаются различными?

4. Сколько существует целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Вариант №17.

1.У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

2.Сколькими способами можно переставить буквы слова «огород» так, что три буквы «о» не стояли рядом?

3.Имеется 3 курицы, 4 утки, и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

4. Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 123132, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.

Вариант №18.

1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «перестановка», чтобы слово начиналось с буквы «п» и заканчивалось буквой «а»?

2.У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более 3 имен? (Назвать можно одним, двумя и тремя именами).

3.Бильярдный стол имеет 6 луз. Сколькими способами можно разбросать в них 15 ненумерованных шаров?

4. Сколько способами можно переставить буквы слова «особенность» так, чтобы две одинаковые буквы не шли друг за другом?

Вариант №19.

1. В урне 7 шаров, три из них белых. Наугад выбирают 3 шара. Сколькими способами это можно сделать? В скольких случаях среди них будет ровно один белый?

2.Сколькими способами можно переставить буквы в слове «пастухи», так чтобы между двумя гласными были две согласные?

3. Каждая из пяти разных по конструкции деталей должна пройти независимую обработку на трех разных станках. Сколькими способами можно одновременно загрузить все станки?

4.Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр числа 1233145254 так, чтобы две одинаковые цифры не шли друг за другом?

Вариант №20.

1.Сколькими способами из колоды в 36 карт можно вытянуть 4 карты с подряд идущими номерами одной масти и 4 карты другой масти?

2.Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы? В группу могут входить 1, 2, …, 15 человек.

3.В конкурсе участвуют 5 человек. Имеется 8 наград различных уровней. Сколькими способами можно распределить награды между участниками конкурса?

4. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основное правило комбинаторики: правило суммы в теоретико-множественной и комбинаторной формулировках.
2. Сформулировать основное правило комбинаторики: правило произведения в теоретико-множественной и комбинаторной формулировках.
3. Дать определения следующим понятиям: перестановка, размещение, сочетание.
4. Дать определение перестановки с повторениями и вывести формулу пересчета.
5. Дать определение размещений с повторениями и вывести формулу пересчета.

Лабораторная работа № 4

Булевы функции. Законы алгебры логики. Аналитические способы описания.

Цель работы: изучение способов описания булевых функций, практическое применение законов алгебры логики, представление функций в различных базисах.

Теоретическая справка

Определение функции алгебры логики

Пусть множество **X** состоит из двух элементов 0 и 1, $\mathbf{X=\{0,1\}}$; множество $\mathbf{Y=X^n = \{(x_1, \ldots,x_n) \mid \forall i = \overline{1 \ldots n}, x_i \in X\}}$.

Двоичный набор – совокупность координат некоторого фиксированного вектора $\mathbf{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n}$. Каждому двоичному набору можно поставить в соответствие некоторый номер, равный двоичному числу соответствующему данному набору.

Пусть $\mathbf{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ – логический набор, тогда $\mathbf{x_1*2^{n-1}+x_2*2^{n-2}+\ldots+x_n*2^0}$ – номер набора.

Например: $(0,1,1) = 0{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 3$ $(0,0,1,1) = 0{\cdot}2^3+0{\cdot}2^2 +1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 3$

Замечание. Чтобы восстановить набор по номеру – нужно знать количество аргументов.

Логическая переменная – это переменная, которая может принимать только два значения: истина или ложь (TRUE/FALSE, 1/0).

Функция алгебры логики (булева функция, ФАЛ) – $\mathbf{f(x_1,x_2, \ldots,x_n)}$ – это функция, у которой все аргументы есть логические переменные, и сама функция принимает только логические значения.

Количество всевозможных, различных двоичных наборов длиной n равно 2^n.

Например:

Построим всевозможные двоичные наборы длиной n = 3.
По теореме, приведенной выше, их количество равно $2^n = 2^3 = 8$.

Номер двоичного набора	Двоичный набор		
	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Существуют следующие способы описания ФАЛ
- табличный
- графический
- аналитический
- словесный

Табличный способ представления ФАЛ

Любую булеву функцию можно представить таблицей, имеющей 2^n строк. Такая таблица называется **таблицей истинности.**

В левой части таблицы перечисляются всевозможные двоичные наборы значений аргументов, а в правой части – значения некоторой булевой функции.

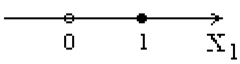
№	x_1	x_2	**…**	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	0	…	0	α_1
1	0	0	…	1	α_2
…	…	…	…	…	**…**
2^n-1	1	1	…	1	α_{2^n}

Число различных ФАЛ, зависящих от n аргументов конечно и равно 2^{2^n}

Графическое представление ФАЛ

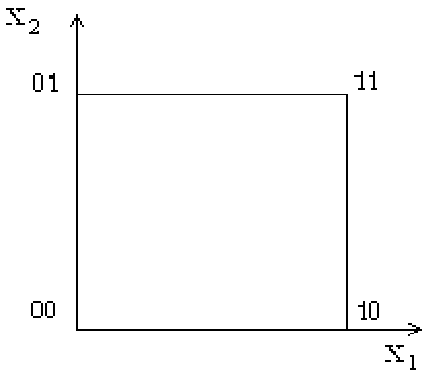
ФАЛ можно представить в виде n-мерного единичного куба: если наборам значений аргументов сопоставить точки n-мерного пространства, то множество 2^n наборов определяет множество вершин n-мерного куба.

Одномерный куб (n = 1)

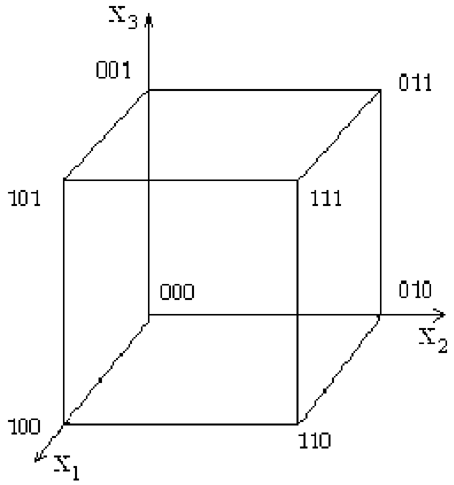


Функция принимает значения либо 0, либо 1.
F=0 – пустой кружёчек,
F=1 – закрашенный кружёчек.

Двумерный куб (n = 2)

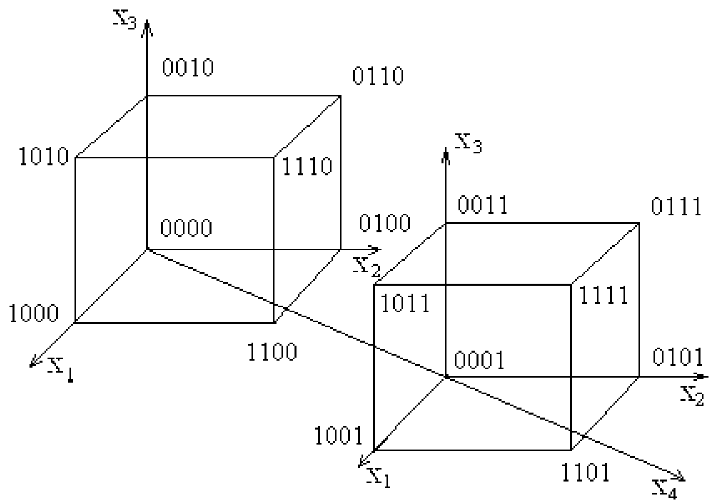


Трехмерный куб (n = 3)



Таким же способом можно задать функцию от четырех переменных, в виде четырехмерного куба.

Четырехмерный куб (n = 4)



Функции алгебры логики одного аргумента

Количество функций от одного аргумента равно 2^{2^1} = 4.

Функции алгебры логики одного аргумента

x	**f_0(x)**	**f_1(x)**	**f_2(x)**	**f_3(x)**
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f_0(x) ≡ 0 – константа 0 («ложь»)
f_1(x) ≡ 1 – константа 1 («истина»)
f_2(x) = x – переменная x
f_3(x) = $\bar{x}$ - отрицание x (инверсия x)

Функции алгебры логики двух аргументов

Количество различных ФАЛ от двух аргументов равно $2^{2^2} = 16$.

Элементарные функции алгебры логики

x_1x_2	**00**	**01**	**10**	**11**	**Обозначение ФАЛ**
f_0	0	0	0	0	тождественный 0, const 0.
f_1	0	0	0	1	x_1 и x_2, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \& x_2$, $x_1 \wedge x_2$ – конъюнкция, логическое «и»
f_2	0	0	1	0	$x_1 \Delta x_2$ - запрет x_2; x_1, но не x_2
f_3	0	0	1	1	x_1 повторение первого аргумента
f_4	0	1	0	0	$x_2 \Delta x_1$ - запрет x_1; не x_1, но x_2
f_5	0	1	0	1	x_2 повторение второго аргумента
f_6	0	1	1	0	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \Delta x_2$ - сложение по модулю 2, неравнозначность
f_7	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция, сумма, логическое «или»
f_8	1	0	0	0	$x_1 \downarrow x_2$ – стрелка Пирса, функция Вебба, $\overline{\vee}$; логическое “или-не”
f_9	1	0	0	1	$x_1 \equiv x_2$ – эквивалентность, равнозначность, тождество
f_{10}	1	0	1	0	$\overline{x}_2$ - отрицание, инверсия второго аргумента
f_{11}	1	0	1	1	$x_2 \rightarrow x_1$ – обратная импликация
f_{12}	1	1	0	0	$\overline{x}_1$ - отрицание первого аргумента
f_{13}	1	1	0	1	$x_1 \rightarrow x_2$ – импликация
f_{14}	1	1	1	0	$x_1 \mid x_2$ – штрих Шеффера, логическое «и-не », $\overline{\&}$
f_{15}	1	1	1	1	тождественная 1, константа 1

Условные приоритеты булевых функций

Каждая булева функция имеет свой приоритет при выполнении элементарных функций.

1. **( )**
2. **отрицание ($\bar{x}$)**
3. **&** $\mid \downarrow$
4. $\vee$ $\oplus$ $\rightarrow$ $\equiv$

Замечание. В пределах одного приоритета операции в выражении выполняются слева направо.

Например:

Дана функция $F(x,y,z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \& (\overline{z \to x})$.
Составить таблицу истинности функции 3-х переменных: F (x, y, z).
Изобразить функцию графически.

Решение:

Расставим порядок выполнения действий, соблюдая приоритеты.

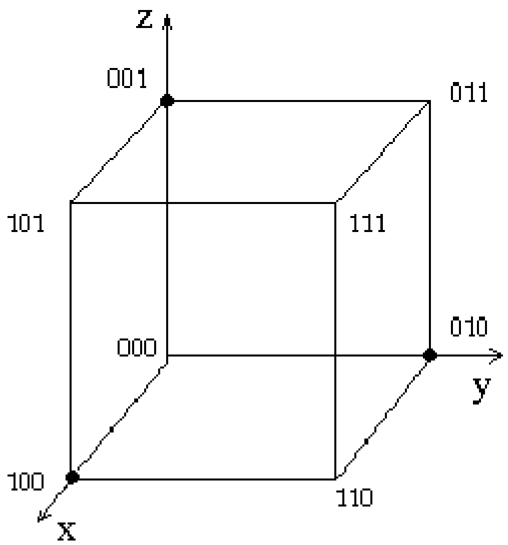
$$F(x,y,z) = x \underset{5}{\equiv} y \underset{3}{\downarrow} z \underset{6}{\oplus} y \underset{4}{\&} (\overset{2}{\overline{z \underset{1}{\to} x}})$$

Выполним операции согласно порядку от 1 до 6.

Таблица истинности функции F(x, y, z)

x	y	z	1	2	3	4	5	F(x,y,z)
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Изобразим функцию на кубе:



Законы булевой алгебры

Коммутативность

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$
$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$$

Ассоциативность

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3$$
$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

Дистрибутивность

$$x_1 \& (x_2 \vee x_3) = x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3$$
$$x_1 \vee (x_2 \& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$$

Идемпотентность

$$x \vee x = x$$
$$x \& x = x$$

Закон отрицания отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Закон исключающего третьего

$$x \vee \overline{x} = 1$$

Закон противоречия

$$x \& \overline{x} = 0$$

Свойства констант

$$x \vee 1 = 1$$
$$x \vee 0 = x$$
$$x \& 1 = x$$
$$x \& 0 = 0$$

Законы де Моргана

$$\overline{x_1 \& x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$$
$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \& \overline{x}_2$$

Законы поглощения

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$$
$$x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$$

Правила склеивания

$$x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 = x_1$$
$$(x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee \overline{x}_2) = x_1$$

Обобщенное склеивание

$$x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 = x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x}_3$$

Правило вычеркивания

$$\overline{x}_1 \vee x_1 x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$$

Свойства $\downarrow, \mid, \oplus, \rightarrow$

Свойства импликации

$$x \rightarrow x = 1$$
$$x \rightarrow \overline{x} = \overline{x}$$
$$x \rightarrow 1 = 1$$
$$x \rightarrow 0 = \overline{x}$$
$$0 \rightarrow x = 1$$
$$1 \rightarrow x = x$$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x}_2 \rightarrow \overline{x}_1$$
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 = x_1$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{x}_1 \rightarrow x_2$$
$$x_1 \,\&\, x_2 = \overline{x_1 \rightarrow \overline{x}_2}$$

$$x_1 \rightarrow x_2 \neq x_2 \rightarrow x_1$$
$$x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3) \neq (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3$$

Свойства $\oplus$

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$
$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$$
$$x \oplus x = 0$$
$$x \oplus 0 = x$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}$$
$$x \oplus \overline{x} = 1$$
$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

Свойства функций Шеффера и стрелки Пирса

$$x_1 \mid x_2 = x_2 \mid x_1$$
$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$$

$$(x_1 \mid x_2) \mid x_3 \neq x_1 \mid (x_2 \mid x_3)$$
$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3)$$

$$x \mid x = \overline{x}$$
$$x \mid 1 = \overline{x}$$
$$x \mid \overline{x} = 1$$
$$x \mid 0 = 1$$

$$x \downarrow x = \overline{x}$$
$$x \downarrow 0 = \overline{x}$$
$$x \downarrow \overline{x} = 0$$
$$x \downarrow 1 = 0$$

Функции $\downarrow$ и $\mid$ связаны соотношениями аналогичными формулам де Моргана

$$x_1 \mid x_2 = \overline{\overline{x}_1 \downarrow \overline{x}_2}$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2}$$

Выражение одних элементарных функций через другие

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$$
$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \equiv x_2} = x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2)$$
$$x_1 \equiv x_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2)$$
$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2}$$
$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$$

Аналитическая запись ФАЛ

Рассмотрим методы перехода от табличного способа задания функций к аналитическому методу (в виде формул).

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Элементарная конъюнкция – конъюнкция, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Например:

Используя законы алгебры логики преобразовать по шагам функцию F(x,y,z) в ДНФ. Для полученного результата составить таблицу истинности.

Решение: Выполним преобразования по шагам:

1. $z \to x = \bar{z} \vee x$
2. $\overline{\bar{z} \vee x} = \bar{x}\, z$
3. $y \downarrow z = \overline{y \vee z} = \bar{y}\, \bar{z}$
4. $\bar{x}\, z \,\&\, y = \bar{x}\, y\, z$
5. $x \equiv \bar{y}\, \bar{z} = x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \overline{\bar{y}\, \bar{z}} = x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, z$
6. $(x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, z) \oplus \bar{x}\, y\, z =$

$$= (x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, z) \cdot \overline{\bar{x}\, y\, z} \vee \overline{(x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, z)} \cdot \bar{x}\, y\, z =$$

$$= (x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee (\overline{x\, \bar{y}\, \bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}\, y} \cdot \overline{\bar{x}\, z}) \cdot \bar{x}\, y\, z =$$

$$= (x \cdot x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee x\, \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, x\, z \vee x\, \bar{y}\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y\, \bar{y} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee$$

$$\vee \bar{x}\, z\, \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee \bar{z}) \cdot \bar{x}\, y\, z =$$

$$= (x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee \bar{z}) \cdot \bar{x}\, y\, z =$$

$$= (x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (x\, \bar{x}\, y\, z \vee \bar{z}\, \bar{x}\, y\, z) =$$

$$= (x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot 0 = x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z}$$

Составим таблицу истинности для полученного результата:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	F(x,y,z)
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Последний столбец этой таблицы совпадает со столбцом задания функции F(x,y,z), следовательно, перевод в ДНФ верен.

Дизъюнктивная совершенная нормальная форма (ДСНФ)

Любая таблично заданная ФАЛ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (кроме тождественного нуля) может быть представлена в следующем аналитическом виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{T_1} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n}$$

Представление ФАЛ в таком виде называется **дизъюнктивной совершенной нормальной формой** этой функции (ДСНФ).

Алгоритм перехода от табличного задания функции к ДСНФ

1. Выбрать в таблице все наборы аргументов, на которых функция обращается в единицу.
2. Выписать конъюнкции, соответствующие этим наборам аргументов. При этом если аргумент x_i входит в данный набор как 1, он вписывается без изменения в конъюнкцию, соответствующую данному набору. Если x_i входит в данный набор как 0, то в конъюнкцию вписывается его отрицание.
3. Полученные конъюнкции соединить операцией дизъюнкция.

Конъюнктивная совершенная нормальная форма

Любая таблично заданная ФАЛ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (кроме тождественной единицы) может быть представлена в следующем аналитическом виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{T_0}{\&} \left(\overline{x_1^{\alpha_1}} \vee \overline{x_2^{\alpha_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_n^{\alpha_n}} \right)$$

Представление ФАЛ в таком виде называется **конъюнктивной совершенной нормальной формой** этой функции (КСНФ).

Алгоритм построения конъюнктивной совершенной нормальной формы

1. Выбрать в таблице все наборы аргументов, на которых функция обращается в 0.
2. Выписать дизъюнкции, соответствующие этим наборам аргументов. При этом если аргумент x_i входит в данный набор как 0, он вписывается без изменения в дизъюнкцию, соответствующую данному набору. Если x_i входит в данный набор как 1, то в дизъюнкцию вписывается его отрицание.
3. Полученные дизъюнкции соединить операцией конъюнкция.

Например:

Построить ДСНФ и КСНФ для функции F(x,y,z).

$$F(x,y,z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \,\&\, \overline{(z \rightarrow x)}$$

Решение:

Для нахождения ДСНФ выбираем из таблицы №4 только те строки, в которых стоят наборы значений аргументов, обращающие функцию в единицу. Это вторая, третья и пятая строки. Выпишем конъюнкции, соответствующие выбранным строкам:

$$\bar{x}\,\bar{y}\,z,\ \ \bar{x}\,y\,\bar{z},\ \ x\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

Соединяя эти конъюнкции знаками дизъюнкции, получаем:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\,\bar{y}\,z \lor \bar{x}\,y\,\bar{z} \lor x\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

Для нахождения КСНФ выбираем из таблицы №4 только те строки, в которых стоят наборы значений аргументов, обращающие функцию в ноль. Выпишем соответствующие дизъюнкции и соединим их знаками конъюнкции.

Получим: $F(x,y,z) = (x \lor y \lor z)(x \lor \bar{y} \lor \bar{z})(\bar{x} \lor y \lor \bar{z})(\bar{x} \lor \bar{y} \lor z)(\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z})$.

Полные системы ФАЛ

Система ФАЛ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется полной в некотором классе функций, если любая функция из этого класса может быть представлена суперпозицией этих функций.

Система ФАЛ, являющаяся полной в некотором классе функций, называется **базисом.**

Минимальным базисом называется такой базис, для которого удаление хотя бы одной из функций f_i, которые его образуют, превращает эту систему функций в неполную.

Любая функция может быть представлена с помощью элементарных функций **$\{\neg, \&, \lor\}$**. Эта система ФАЛ образует **универсальный базис**.

Наиболее популярными в алгебре логики являются базисы $\{\vee,\neg\}, \{\&,\neg\}, \{\downarrow\}, \{|\}$, которые являются минимальными.

Например:

Представить функцию $F(x,y,z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \,\&\, \overline{(z \to x)}$ в базисах **$\{\vee, \neg\}$, $\{|\}$**. Для проверки результата составить таблицу истинности.

Решение:

Для перевода в базис **$\{\vee, \neg\}$** применим закон де Моргана к ДСНФ функции: $F(x,y,z) = x\,\bar y\,\bar z \vee \bar x\,\bar y\, z \vee \bar x\, y\, \bar z = \overline{\bar x \vee y \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee \bar z} \vee \overline{x \vee \bar y \vee z}$.

Задание к лабораторной работе

1. По заданному варианту, составить таблицу истинности функции трех переменных F(x,y,z). Изобразить графически F(x,y,z) на кубе.
2. Построить ДСНФ и КСНФ.
3. Используя законы алгебры логики, пошагово преобразовать заданную функцию в ДНФ. Построить таблицу истинности.
4. Наиболее простую аналитическую форму перевести в базисы $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\&\}$.

1. $x \,|\, (z \equiv y \oplus z) \to zy \downarrow y$
2. $x \to y \downarrow z(\overline{x \,|\, y} \oplus x \equiv z)$
3. $x \equiv y \downarrow x \oplus (y \,|\, z \to \bar x) | y$
4. $x \,|\, z \oplus \overline{y \downarrow z} \vee \bar x \to z \equiv y$
5. $x\bar y \to z\bar x \equiv z \downarrow x \,|\, y\bar x$
6. $x \,|\, z \oplus (y \downarrow z) \vee x \to z$
7. $x \downarrow y \vee (y \equiv y \,|\, z) \oplus \overline{zx} \to x$
8. $z \,|\, (x \equiv y \oplus x) \to \overline{xy} \downarrow y$
9. $z \,|\, y \oplus \overline{x \downarrow y} \vee z \to y \equiv x$
10. $z\bar x \to y\bar z \equiv y \downarrow z \,|\, x\bar z$
11. $z \downarrow x \vee (x \equiv x \,|\, y) \oplus \overline{yz}$
12. $\overline{xz} \oplus z \to \bar y \downarrow x \vee y$
13. $(x \,|\, z \oplus y \downarrow z) \vee x \to \bar z \equiv y$
14. $x\bar z \to z\bar x \oplus z \downarrow x \vee y\bar x$
15. $x \oplus z \,|\, (y \downarrow z \vee x) \to y \equiv z$
16. $x \vee y \downarrow (y \equiv z \,|\, y) \oplus x\bar z \to y$
17. $z \equiv x \,|\, y \oplus x \to \overline{xz} \downarrow y$
18. $x \,|\, y \equiv y \oplus z \to z\bar x \downarrow y$
19. $x \to y \downarrow \overline{zx \,|\, y} \oplus y \equiv z$
20. $x \equiv y \downarrow z \oplus y \,|\, \overline{z \to x} \,|\, y$

Контрольные вопросы

1. Определение двоичного набора.
2. Определение булевой функции или функции алгебры логики (ФАЛ).
3. Область определения и область значений ФАЛ.
4. ФАЛ от одной переменной.
5. Элементарные ФАЛ от двух переменных.
6. Основные законы алгебры логики.
7. Полные системы функций, минимальный базис.
8. Аналитическое описание ФАЛ: дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

Лабораторная работа № 5

Методы минимизации функций алгебры логики.

Цель работы: получение практических навыков минимизации функций алгебры логики в классе ДНФ, изучение особенностей минимизации не полностью определенных функций.

Теоретическая справка

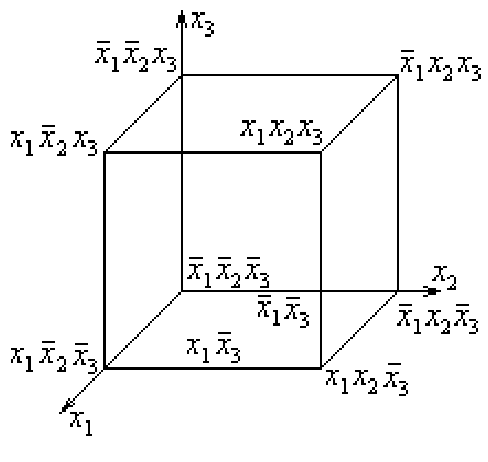
Основные определения

Буква - переменная или ее отрицание.
Элементарная конъюнкция – конъюнкция, в которой каждая буква встречается не более одного раза.
Дизъюнктивная нормальная форма(ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.
Ранг элементарной конъюнкции – количество переменных, которые ее образуют.
Дизъюнктивная совершенная нормальная форма (ДСНФ) – ДНФ, состоящая из конъюнкций ранга **n,** где **n –** количество переменных**.**
Длина ДНФ (L) – число конъюнкций, которые ее составляют.
Кратчайшая ДНФ – ДНФ, имеющая наименьшую длину **L** по сравнению с другими ДНФ, эквивалентными данной функции.
Суммарный ранг ДНФ(R) – сумма рангов конъюнкций ДНФ.
Минимальная ДНФ – ДНФ, имеющая наименьший суммарный ранг **R** по сравнению с другими **ДНФ**, эквивалентными данной функции.

Минимизация ФАЛ на кубе

Рассмотрим проблему минимизации для геометрического способа задания **ФАЛ** на кубе.

Сопоставим различным геометрическим элементам куба (вершинам, ребрам, граням и кубу) конъюнкции различных рангов. Сумма размерности геометрического эквивалента и ранга конъюнкции, ему соответствующей равна числу аргументов **ФАЛ**.



Каждый геометрический элемент меньшей размерности покрывается геометрическими элементами большей размерности.

Каждая конъюнкция большего ранга покрывается всеми конъюнкциями меньшего ранга.

Геометрические эквиваленты называют **интервалами.**

Интервал L-го ранга – подмножество вершин куба, соответствующих конъюнкции ранга **L**.

Например:

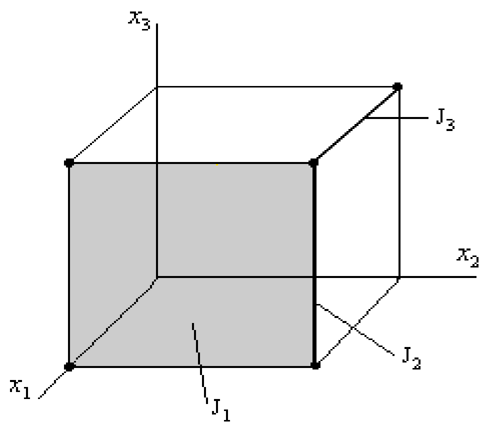
Конъюнкции х соответствует 4 вершины: 100, 101, 110, 111.

На кубе отмечают вершины, где **ФАЛ** равна **1**. Эти вершины образуют подмножество $\mathbf{T_1}$. Для того, чтобы задать **ДНФ** на кубе, необходимо задать покрытие всех вершин.

Максимальный интервал J – интервал, для которого не существует никакого другого интервала **J'** с рангом меньше, чем у **J**, и такого, что выполняется следующее соотношение $J \subset J' \subset T_1$**.**

Например:

Пусть есть функция, которая равна 1 в отмеченных точках.



$\mathbf{J_1=x_1}$

$\mathbf{J_2=x_1*x_2}$

$\mathbf{J_3=x_2*x_3}$

$\mathbf{J_1}$ и $\mathbf{J_3}$ – максимальные интервалы

$\mathbf{J_2}$ – не является максимальным

Сокращенная ДНФ (СДНФ) – ДНФ, которая соответствует покрытию множества $\mathbf{T_1}$ всеми максимальными интервалами.

Минимальная ДНФ получается из **СДНФ** путем выбрасывания из покрытия множества $\mathbf{T_1}$ максимальными интервалами некоторых "лишних" интервалов.

Графический метод минимизации: карты Карно и диаграммы Вейча

Карты Карно – графический метод отображения булевых функций.

Это специальные таблицы, задающие ФАЛ. Они сформированы так, чтобы облегчить процесс склеивания. Карты Карно используются при n=2,3,4,5,6, при n>6 они практически непригодны.

Диаграммы Вейча принципиально не отличаются от карт Карно. Различие состоит лишь в порядке следования наборов значений и в обозначениях (Карно – {0,1}; Вейча – { $x_1,...,x_n$ }).

Основные принципы построения карт Карно

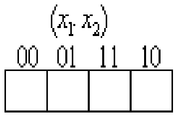
1) Карты Карно – это такие таблицы задания ФАЛ (плоская развертка n-мерных кубов), что склеивающиеся между собой конституенты единицы или нуля расположены в соседних клетках: по горизонтали и по вертикали клетки таблицы отличаются лишь значением одной переменной.

2) Клетки, расположенные по краям таблицы считаем соседними и обладают этим же свойством.

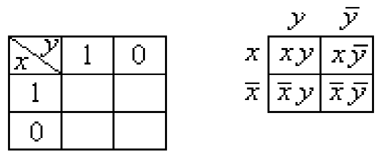
Например:

1) n=2

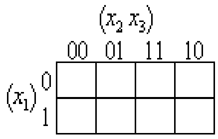
карты Карно

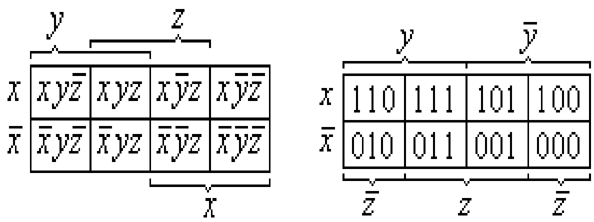


диаграммы Вейча

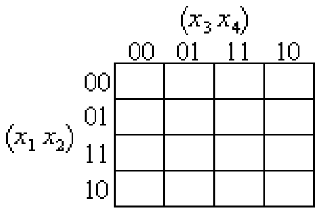


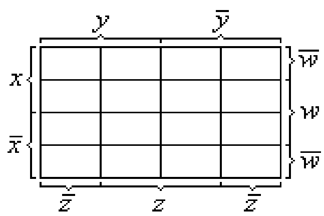
2) n=3





3) n=4





4) n=5

Для построения используют две карты Карно четырех переменных.

Например:

Минимизировать на картах Карно функцию $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, которая равна единице на наборах с номерами – 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15 (предыдущий пример).

Построим двоичные наборы, на которых задана функция.

№ набора	Наборы	f (x_1, x_2, x_3, x_4)
0	0000	1
1	0001	1
2	0010	1
3	0011	1
4	0100	1
6	0110	1
7	0111	1
8	1000	1
9	1001	1
11	1011	1
15	1111	1

Построим Карты Карно для заданной функции.

$\bar{x}_1\bar{x}_4$

	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11			**1**	
10	**1**	**1**	**1**	

$\bar{x}_2\bar{x}_3$ $\qquad$ x_3x_4

Таким образом, $f_{min} = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee x_3x_4$

Задание к лабораторной работе

1. Сгенерировать по указанному ниже алгоритму функции **Q(x_1, x_2, x_3, x_4), R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)**
2. Минимизировать функцию четырех переменных **Q(x_1,x_2,x_3,x_4)** с использованием куба и карт Карно.
3. Минимизировать функцию пяти переменных **R(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)** с использованием карт Карно.

Алгоритм генерации варианта

1. Записать строку **S = <ФИО>**.
2. Удалить в строке **S** все повторные вхождения букв.
3. Пронумеровать все буквы получившейся строки таким образом, что **n(S_i)** - номер буквы в русском алфавите.
4. Для генерации функции **Q(x_1,x_2,x_3,x_4)** оставить первые 7 неповторяющихся чисел, полученных после преобразования **n(S_i) = n(S_i) mod 16**. Полученные значения определяют единичные наборы функции **Q(x_1,x_2,x_3,x_4)**.

5. Для генерации функции **R(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)** оставить первые 11 неповторяющихся чисел, полученных после преобразования **n(S_i) = n(S_i) mod 32**. Полученные значения определяют единичные наборы функции **R(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)**.

Контрольные вопросы

1.Определение логической переменной и буквы.
2.Определение элементарной конъюнкции.
3.Нормальная и совершенная дизъюнктивные формы.
4.Ранг конъюнкции. Длина ДНФ.
5.Кратчайшая и минимальная ДНФ.
6.Сокращенная ДНФ.
7.Максимальные интервалы.
8.Карты Карно и диаграммы Вейча.
9.Метод Квайна: минитермы, импликанты (простые и существенные).

Лабораторная работа № 6

Исчисление высказываний

Цель работы: приобретение практических навыков в построении символьной записи предложений естественного языка. Усвоение основных понятий теории высказываний: тавтологичность, противоречие, опровержимость, выполнимость.

Теоретическая справка

Логическое высказывание (высказывание) - это повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Для обозначения истины (истинного высказывания) используется символ 1, а для обозначения лжи (ложного высказывания) используется символ 0.

Ниже приведены примеры простых высказываний:

A: «22 двузначное число» – истина;

B: «22 нечетное число» – ложь;

C: «3<3» – ложь;

D: «3=3» – истина;

Используя простые высказывания, можно образовывать сложные. Для обозначения грамматических связок вводят символы, которые называют **логическими связками**. Логические связки обозначают логические операции над высказываниями. Правила вывода новых высказываний, основанные на отношениях между высказываниями, представляют **исчисление высказываний.**

Логические операции

Логические операции бываю унарными и бинарными. Это определяется наличием одного или двух операндов. Результаты логических операций принадлежит множеству{0,1}, т.е. {ложь, истина}.

Отрицанием (¬A) высказывания A называется высказывание, которое истинно, если высказывание A ложно, и ложно, когда A истинно. Записывается: A или ¬A. Читается: «не A» («не верно, что A»). Пример. A:=«сегодня солнечно», ¬A:=«нет, неверно, что сегодня солнечно». Эта логическая связка (отрицание) может быть проиллюстрирована следующей таблицей (таблицей истинности):

A	$\neg A$
0	1
1	0

Конъюнкция (логическое умножение) двух высказываний A и B истинна только в случае истинности всех составляющих высказываний, в противном случае оно ложно. Обозначения: A&B, A^B. Читается: «A и B» («…также …», «как …, так…», «…несмотря на …» и др.)

A	*B*	*A*&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция (логическое сложение) двух высказываний A и B это логическое высказывание, которое ложно только в случае ложности всех составляющих высказываний, в противном случае оно истинно. Обозначается: A∨B, A+B. Читается: «или» («либо»).

A	*B*	*A*∨*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация (логическое следование) - сложное высказывание, образованное с помощью слов «если…, то…». Высказывание, расположенное после слова «если», называется *основанием* или *посылкой*, а высказывание после слова «то», называется *следствием* или *заключением*. Импликация высказываний ложна лишь в случае, когда A истинно, а B ложно. Обозначается: A→B, A ⇒B, A ⊃B. Читается: «если A, то B» («из ... следует ...», «... достаточно для … », «для ... , необходимо ....», «постольку ... , поскольку ....»).

A	*B*	*A*→*B*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (равнозначность, логическое тождество) двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно когда истинностные значения высказываний A и B совпадают, и ложно — в противном случае. Обозначается: A~ B , A↔B. Читается: «эквивалентно» («тогда и только тогда, когда», «равнозначно », «для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы …»).

A	*B*	*A*~*B*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Неравнозначность (исключающее «или») двух высказываний А и В называется высказывание, истинное, когда истинностные значения А и В не совпадают, и ложное — в противном случае. Обозначается: А⊕В. Читается: «либо А, либо В» (понимается — в разделительном смысле).

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Порядок старшинства логических операций следующий: ¬ , & ,∨ , ⊕, →, ~.

Пример1. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите высказывания на формальном языке алгебры высказываний:

1) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;
2) 45 кратно 3 и 12 не кратно 3;
3) $2 \leq 5$;
4) если 212 делится на 3 и на 4, то 212 делится на 12;
5) 212 – трехзначное число, которое делится на 3 и на 4.

1) $A \wedge B$, где А = «45 кратно 3», В = «42 кратно 3»;
2) $A \wedge \neg B$, где А = «45 кратно 3», В = «12 кратно 3» ;
3) $A \vee B$, где А = «2 < 5», В = «2 = 5» ;
4) $(A \wedge B) \rightarrow C$, где А = «212 делится на 3», В = «212 делится на 4» и С = «212 делится на 12»;
5) $A \wedge B \wedge C$, где А = «212 – трехзначное число», В = «212 делится на 3» и С = «212 делится на 4».

Любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний и, следовательно, можно рассматривать ее логические значения на различных наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных по таблицам истинности.

Формула, которая принимает значение «истина» при любых наборе значений истинности входящих в нее пропозициональных переменных, называется **тождественно истинной**, **тавтологией** или **законом логики.**

Формула, которая принимает значение «ложь» при любом наборе значений истинности, входящих в нее пропозициональных переменных, называется **тождественно ложной** или **противоречием**.

Формула, которая принимает значение «истина» хотя бы при одном наборе значений истинности входящих в нее пропозициональных переменных, называется **выполнимой (непротиворечивой)**.

Формула, которая принимает значение «ложь» хотя бы при одном наборе значений истинности входящих в нее пропозициональных переменных, называется **опровержимой**.

Установить является ли формула логики высказываний тождественно истинной, тождественно ложной или только выполнимой можно с помощью:

- построения таблиц истинности;
- равносильных преобразований.

Пример2.

Выяснить, является ли следующая формула тождественно истинной:

$$F = \left((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A\right).$$

Построим таблицу истинности заданной формулы, используя определения логических операций:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg B$	$(A \to B) \wedge \neg B$	F
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Так как последний столбец состоит только из 1, то формула тождественно истинна.

Пример3.

Выяснить, является ли следующая формула выполнимой:

$$F = (\neg A \vee B) \to (A \wedge C).$$

Построим таблицу истинности заданной формулы, используя определения логических операций.

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge C$	F
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Поскольку на трех наборах (достаточно хотя бы на одном) функция принимает значение, то формула выполнима. 1

Задание к лабораторной работе

1. Записать символически следующие сложные предложения, употребляя буквы для обозначения простых компонентов предложения (под простыми компонентами подразумеваются предложения, не содержащие связок).

1) Если инвестиции на текущий год не изменятся, то возрастут расходы бюджета или возникнет безработица, а если возрастут расходы бюджета, но налоги не будут снижены, то безработица не возникнет.

2) Если “Пираты” или “Щенки” проиграют, и “Великаны” выиграют, то “Увертыши” потеряют первое место и, кроме того, я проиграю пари.

3) Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном настроении или с головной болью.

4) Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены, и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникает.

5) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.

6) Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные канавы. Если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы.

7) Если процентная ставка снизится, то либо курс акций не понизится, либо курс ценных бумаг не возрастет. Следовательно, если налоги повысить, то не вырастет курс ценных бумаг, но вырастет курс акций.

8) Если “Шахтер” выиграет, то болельщики Донецка будут торжествовать, а если выиграет “Арарат”, то будет торжествовать Ереван. Выиграет или “Шахтер” или “Арарат”.

9) Если сегодня ясно, то сегодня не идут ни дождь, ни снег. Вчера было пасмурно, а сегодня идут или дождь или снег.

10) Цены высоки или применяется регулирование цен, а если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Если цены высоки, то и зарплата высока, а если зарплата высока, то наблюдается инфляция.

11) Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возникнут, то налоги будут снижены.

12) Если курс ценных бумаг растет или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг, и налоги растут.

13) Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.

14) Среди множества циклов графа существуют базовые циклы. Объединение базовых циклов формирует не базовые циклы. Поэтому для каждой вершины графа нужно выделить базовые циклы.

15) Распространение заведомо ложных сведений является клеветой. Умышленное извращение фактов представляет собой распространение заведомо ложных измышлений. Клевета уголовно наказуема. Следовательно, умышленное извращение фактов уголовно наказуемо.

16) Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться. Следовательно, если стройки будут расти быстрее, то стоимость строительства будет снижаться.

17) Если инвестиции на текущий год не изменятся, то возрастет расходная часть бюджета или возникнет безработица, если налоги не будут снижены и инвестиции не изменятся, то безработица не возникнет.

18) Если Петров не честен, то он не признает своей ошибки. Но Петров признает свои ошибки. Следовательно, он поступит согласно собственным убеждениям.

19) Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я не получу эту работу Если я не получу эту работу то я начну огорчаться и мне следует поехать домой.

20) Если 6 – составное число, то 12 – составное число. Если 6 делится на 2, то 6 - составное число. Число 12 – составное, следовательно, 6- составное число.

2. Доказать приведенные тавтологии, составив для них истинностные таблицы, причем входящие в формулы буквы следует рассматривать как простые предложения. Варианты заданий приведены в таблице 1 (столбец 2).

Номера вариантов включают в себя:

- порядковый номер студента в списке;
- номер тавтологической импликации;
- номер тавтологической эквиваленции;
- номер тавтологии для исключения связок.

Таблица1. Варианты заданий

Номер варианта	Номер тавтологии	Логическое предложение
1	1, 31	A≡¬ C →¬A
2	2, 32	A&B&C→¬C
3	3, 33	C≡A&¬B→A
4	4, 34	¬A&¬C→B
5	5, 35	A∨B∨¬C≡A
6	6, 36	¬A≡B→¬C
7	7, 37	A→¬B≡C
8	8, 30	C →¬B≡A
9	9, 28	A∨B→ B∨C
10	10, 25	¬A∨¬B∨¬C
11	11, 26	¬B→C&A
12	12 , 27	A&B≡B&C
13	13, 29	¬B→A≡¬C
14	14, 34	A& B&C ≡A
15	19, 33	C≡A∨¬B
16	20, 36	C →¬A&B
17	21, 32	¬A&C≡B
18	22, 35	B→A≡ A&C
19	23, 36	A→A→ B≡C
20	24, 37	A≡¬B→¬C

3. Для символически записанных высказываний привести примеры повествовательных предложений. Варианты заданий приведены в таблице 1 (столбец 3). Провести проверку высказываний на тавтологичность, противоречивость, опровержимость выполнимость.

ТАВТОЛОГИИ

Тавтологические импликации

1. $A \& (A \to B) \to B$
2. $\neg B \& (A \to B) \to \neg A$
3. $\neg A \& (A \& B) \to B$
4. $A \to (B \to A \& B)$
5. $A \& B \to A$
6. $A \to A \vee B$
7. $(A \to B) \& (B \to C) \to (A \to C)$
8. $(A \& B \to C) \to (A \to (B \to C))$
9. $(A \to (B \to C)) \to (A \& B \to C)$
10. $(A \to B \& \neg B) \to \neg A$
11. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$
12. $(A \to B) \to (A \& C \to B \& C)$
13. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
14. $(A \equiv B) \to (B \equiv C) \to (A \equiv C)$

Тавтологические эквиваленции

15. $A \equiv A$
16. $\neg\neg A \equiv A$
17. $(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)$
18. $(A \to B) \& (C \to B) \equiv (A \vee C \to B)$
19. $(A \to B) \& (A \to C \equiv (A \to (B \& C))$
20. $(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$
21. $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
22. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
23. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$
24. $A \vee A \equiv A$
25. $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$
26. $A \& B \equiv B \& A$
27. $(A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$
28. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$
29. $A \& A \equiv A$
30. $\neg (A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Тавтологии для исключения связок

31. $A \to B \equiv \neg A \vee B$
32. $A \to B \equiv \neg (A \& \neg B)$
33. $A \vee B \equiv \neg A \to B$

34. $A \to B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
35. $A \& B \equiv \neg(A \to \neg B)$
36. $A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
37. $(A \equiv B) \equiv (A \to B) \& (B \to A)$

Контрольные вопросы

1. Что называется высказыванием? Приведите примеры высказываний.
2. Сформулируйте определение конъюнкции высказываний.
3. Сформулируйте определение дизъюнкции высказываний.
4. Сформулируйте определение импликации высказываний.
5. Сформулируйте определение эквиваленции высказываний.
6. Что называется отрицанием высказывания? Приведите пример.
7. Что называется логической формулой?
8. Что называется формулой логики высказываний?
9. Какие формулы называются равносильными?
10. Какие формулы называются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми?
11. Перечислите основные законы логики высказываний.
12. Какая формула называется тавтологией?
13. Как составить таблицу истинности для формулы логики высказываний?

Лабораторная работа № 7

Исчисление предикатов

Цель работы: приобретение практических навыков в построении предваренной нормальной формы. Изучение алгоритмов генерации всех следствий из посылок.

.

Теоретическая справка

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на **субъект** и **предикат**. **Субъект** – это то, о чем что-то утверждается в высказывании; **предикат** – это то, что утверждается о субъекте.

Пример 1. «у *простое число*» - не является высказыванием. Чтобы это выражение стало высказыванием необходимо в нем переменную *у* заменить на определенное число. Если вместо у взять число 3, то получим истинное высказывание, а если вместо у взять число 8, то получим ложное высказывание.

Таким образом выражение: «у *простое число*» можно рассматривать как функцию *P(y)*, зависящую от переменной у. Область определения *P(y)* – множество чисел, а область значения – высказывание.

Пример 2. В высказывании "7 - простое число", "7" – субъект, "простое число" – предикат. Это высказывание утверждает, что "7" обладает свойством "быть простым числом".

Переменное высказывание, истинностное значение которого зависит от параметра, и называется предикатом. **Предикат** – это функция, значениями которой являются высказывания о *n* объектах, представляющих значения аргументов. Обозначают предикаты большими буквами латинского алфавита с приписанными предметными переменными или без них $A(x,x)$, B, $F(x,y)$, $P(x_1,x_2, x_n)$.

Одноместным предикатом *P(x)* называется такая функция одного переменного, в которой аргумент *x* принимает значения из некоторого множества М, а функция при этом принимает одно из двух значений: истина или ложь. Множество М, на котором задан предикат, называется **областью определения предиката.**

Предикат называется

- **тождественно истинным**, если значение его для любых аргументов есть «истина» (Предикат Р(х) называется тождественно истинным на множестве М, если если $I_p = M$)
- **тождественно ложным**, если значение его для любых аргументов есть «ложь» (Предикат Р(х) называется тождественно истинным на множестве М, если $I_p=\emptyset$);

- **выполнимым**, если существует, по крайней мере, одна n-система его аргументов, для которой значение предиката есть «истина».

Пример 3.

- Предикат “x+y=y+x” является тождественно истинным.
- Предикат “x+1=x” – является тождественно ложным.
- Предикат “x+y=5” – является выполнимым.

Кванторы

Квантор — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. Наиболее употребительны **квантор всеобщности** ∀ и **квантор существования** ∃.

Пусть $P(x)$ - предикат, определенный на множестве M, т.е. $x \in M$. Высказывание "*для всех* x *из* M $P(x)$ *истинно*" обозначается $\forall x\ P(x)$; знак $\forall x$ называется **квантором общности**. Высказывание "*существует такой* x *из* M, *что* $P(x)$ *истинно*" обозначается $\exists x\ P(x)$; знак $\exists x$ называется **квантором существования.**

Переход от $P(x)$ к $\forall x\ P(x)$ или $\exists x\ P(x)$ называется **связыванием** переменной *x*, или **навешиванием квантора** на переменную x (*или на предикат P*).

Переменная, на которую навешен квантор, называется **связанной**, несвязанная квантором переменная называется **свободной**.

Навешивать кванторы можно на многоместные предикаты и на любые логические выражения. Выражение, на которое навешивается квантор $\forall x$ или $\exists x$, называется **областью действия квантора**; все вхождения переменной x в это выражение являются связанными.

К предикату от двух переменных кванторные операции можно применить к одной переменной или к двум переменным. Получаем следующие высказывания:

$$\forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, P(x,y);\quad \exists x\, P(x,y);\quad \exists y\, P(x,y);$$

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y);\quad \forall x\, \forall y\, P(x,y);\quad \exists x\, \forall y\, P(x,y);\quad \exists x\, \exists y\, P(x,y);$$

$$\forall y\, \forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, \exists x\, P(x,y);\quad \exists y\, \forall x\, P(x,y);\quad \exists y\, \exists x\, P(x,y).$$

Равносильность формул логики предикатов

Две формулы логики предикатов А и В называются **равносильными** на области М, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области М. Как в алгебре высказываний, для равносильных формул принято обозначение А ≡ В.

Все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов. Рассмотрим основные из этих равносильностей. Пусть A(x) и B(x) – переменные предикаты, а C – переменное высказывание. Тогда

1. $\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$;
2. $\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$;
3. $\forall x A(x) \equiv \neg\exists x \neg A(x)$;
4. $\exists x\, A(x) \equiv \neg\forall x \neg A(x)$;
5. $\forall x\, A(x) \wedge \forall\, x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$;
6. $\exists x\, A(x) \vee \exists\, x\, B(x) \equiv \exists x (A(x) \wedge B(x))$;
7. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (C \wedge B(x))$;
8. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x (C \vee B(x))$;
9. $C \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x (C \wedge B(x))$;
10. $C \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (C \vee B(x))$;
11. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x (C \to B(x))$;
12. $C \to \exists x B(x) \equiv \exists x (C \to B(x))$;
13. $\forall x B(x) \to C \equiv \exists x (B(x) \to C)$;
14. $\exists x B(x) \to C \equiv \forall x (B(x) \to C)$;
15. $\exists x A(x) \wedge \forall y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge A(y))$

Приведем несколько комментариев к приведенным равносильностям.

Равносильность 1 означает то, что если не для всех x истинно A(x), то существует *x*, при котором будет истиной ¬ A(*x*).

Равносильность 2 означает то, что если не существует x, при котором истинно A(x), то для всех x будет истиной ¬ A(*x*).

Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов

Формула А логики предикатов называется **выполнимой** в области М, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области М, при которых формула А принимает истинные значения. Формула А называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима. Если формула выполнима, то это не означает, что она выполнима в любой области.

Формула *A* называется **тождественно истинной** в области М, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Формула *A* называется **общезначимой**, если она тождественно истинная на всякой области.

Формула A называется **тождественно ложной** в области М, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Пример 3. Формула $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ тождественно истинная в любой области М. Значит, она является общезначимой, то есть является логическим законом (закон исключенного третьего).

Пример 4. Формула $\forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$ тождественно ложная в любой области М, и поэтому она не выполнима.

Приведенная формула называется **нормальной,** если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят впереди (т. е. логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора).

Алгоритм преобразования формул в нормальную форму

1 Сначала избавляются от операций импликации, эквивалентности и неравнозначности, выразив их через логические связки ¬ , &, ∨ по законам:

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$
$$A \oplus B \equiv (A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \& B)$$
$$A \sim B \equiv (A \,\& B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B)$$

2 Использовать законы де Моргана, чтобы пронести знак отрицания внутрь формулы.

$$\neg (A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B,$$
$$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B,$$
$$\neg \left(\forall x\, P(x)\right) \equiv \exists x \left(\neg P(x)\right),$$
$$\neg \left(\exists x\, P(x)\right) \equiv \forall x \left(\neg P(x)\right),$$
$$\neg\neg A \equiv A.$$

3 Переименовать связанные переменные если это необходимо. Для формул, содержащих подформулы вида

и т. п., вводят новые переменные, позволяющие выносить знаки кванторов наружу. Например:

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y));$$
$$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y));$$
$$\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \exists y\, (P(x) \vee Q(y)).$$

4 Использовать равносильные формулы логики предикатов чтобы вынести кванторы в самое начало формулы для приведения ее к нормальной форме.

Примеры построения ПНФ

$F = (\forall x)P(x) \to (\exists x)R(x)$. $(\forall x)\ P(x) \to (\exists x)R(x) = \neg((\forall x)P(x)) \vee ((\exists x)R(x)) =$ $= (\exists x)\ \neg P(x) \vee (\exists x)R(x) = (\exists x)(\neg P(x) \vee R(x))$.	$\boldsymbol{F} = (\forall x)(\forall y)(((\exists z)P(x, z)\ \&\ P(y, z)) \to (\exists u)R(x, y, u))$. $(\forall x)(\forall y)(((\exists z)\ P(x, z)\ \&\ P(y, z)) \to (\exists u)R(x, y, u)) =$ $= (\forall x)(\forall y)(+((\exists z)\ P(x, z)\ \&\ P(y, z)) \vee (\exists u)R(x, y, u)) =$ $= (\forall x)(\forall y)((\forall z)(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee (\exists u)R(x, y, u)) =$ $= (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee R(x, y, u))$.

Задание к лабораторной работе

1. Для каждой из предметных областей привести примеры:
   - высказываний - тавталогия, противоречия, выполнимость;
   - одноместный предикат;
   - двухместный предикат;
   - трехместный предикат.

   Предметные области:
   1) арифметика целых чисел;
   2) геометрия на плоскости;
   3) политика;
   4) спорт ;
   5) экономика;
   6) учебный процесс в ВУЗеЕ;
   7) язык СИ;
   8) природа.

2. Найти все следствия из посылок (не включая тавтологии, эквивалентности).
   1) (A∨¬B), (¬A&B&C);
   2) ¬A,(A≡B), (C→A→ ¬B);
   3) ¬B, (C→ ¬B), (A≡ C & B);
   4) ¬ C, (¬A∨B), (¬A → ¬ B →C);
   5) (¬ B∨A), (A≡ ¬ B→ ¬ C);
   6) (A→ ¬ C), (A→ ¬ A →B ≡ C);
   7) ¬A, (A&¬ B), (B→A ≡ A&C);
   8) (¬C→¬B), (¬A&C ≡ B);
   9) ¬B, (B→¬A),(C→ ¬A&B);
   10) (A&¬B), (C ≡ A∨¬B);
   11) ¬C, (C∨¬A), (A&B&C ≡ A);
   12) (¬B & ¬C),(¬B →A ≡ ¬C);
   13) ¬A, (¬A∨¬B), (A&B ≡ B&C);
   14) (C&¬B), (¬B→ C&A);

15) ¬B, (A ≡ ¬C), (¬A ∨¬B ∨¬ C);
16) (¬A ∨¬ C), (A&B&C→C);
17) ¬C, (B&C), (A∨B→B∨C);
18) (B≡C), (C→¬ B≡A);
19) ¬A, (B∨ ¬ C), (A→ ¬B≡C);
20) (¬B∨¬C), (¬A≡B→ ¬ C).

3. Преобразовать предикатную формулу в предваренную нормальную форму.

1. $\forall x(P(x) \to \forall y P(y)) \equiv \neg\exists y \neg\exists z R(x,y,z)$
2. $\forall x(Q(x,y)) \to \forall y P(y) \to \neg\exists x R(x,y,z)$
3. $\neg(\exists y Q(x,y)) \equiv \forall x \forall z(R(x,y,z)) \to P(z))$
4. $\neg(\forall z R(x,y,z)) \equiv Q(x,y)) \equiv \forall x P(x)$
5. $\exists x Q(x,y) \to P(x,y) \to \forall x \forall y \forall z(R(x,y,z))$
6. $(\exists x P(x)) \equiv \forall x \forall y Q(x,y) \to \exists z R(x,y,z)$
7. $\forall x \forall y \forall z(R(x,y,z)) \equiv Q(x,y) \equiv \exists x P(x)$
8. $\neg(\forall x(P(x) \equiv Q(x,y))) \to \exists y \exists z R(x,y,z)$
9. $\forall x P(x) \to \forall x \forall y(Q(x,y)) \to \forall x \forall y \forall z(R(x,y,z))$
10. $\exists x P(x) \to \neg(\forall y Q(x,y)) \equiv \neg(\forall z R(x,y,z))$
11. $\neg(\exists x P(x)) \equiv \neg(\forall y Q(x,y)) \to \forall z R(x,y,z)$
12. $\forall x P(x) \to \neg y \neg\exists z R(x,y,z) \equiv \forall y Q(x,y,z)$
13. $\forall z R(x,y,z) \to \neg(\forall x P(x)) \equiv \forall x \forall z Q(x,y)$
14. $P(x) \equiv \forall x \forall z R(x,y,z) \to \neg(\exists y Q(x,y))$
15. $\exists y(Q(x,y) \to \neg\forall x P(x)) \equiv \forall x \forall z R(x,y,z)$
16. $\forall y Q(x,y) \equiv \neg\exists x P(x) \to \neg(\forall x R(x,y,z))$
17. $\neg(\forall x P(x)) \to \neg\exists z \forall y R(x,y,z) \to \forall y Q(x,y)$
18. $\neg(\forall x(Q(x,y)) \equiv \forall y P(y)) \to \neg(\forall z R(x,y,z))$

19. $\forall z(R(x,y,z) \equiv P(x)) \to \forall x \forall y Q(x,y)$

20. $\neg(\forall z R(x,y,z)) \to \forall y Q(x,y)) \equiv \forall x P(x)$

21. $\neg(\exists x(P(x) \equiv \neg \exists y Q(x,y))) \to \forall z R(x,y,z)$

22. $\forall y(Q(x,y) \to \forall x P(x)) \equiv \neg(\exists z R(x,y,z))$

23. $\neg(\exists z R(x,y,z)) \equiv \forall y Q(x,y) \equiv \forall x P(x)$

24. $\exists z R(x,y,z) \to \forall x P(x) \to \forall x \forall y Q(x,y)$

25. $\neg(\exists y Q(x,y)) \equiv \forall z R(x,y,z) \to \forall x P(x)$

4. Заданную совокупность предложений естественного языка представить на языке логики предикатов. Исследовать полученные предикатные выражения на тавтологичность, противоречивость, выполнимость.

Предложения

1) Курс акций падает, если предварительные ставки растут. Большинство людей несчастны, когда курс акций падает. Предварительные ставки растут, следовательно большинство людей несчастны.

2) Если исход скачек будет предрешен сговором, или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Полиция никогда не бывает довольна. Следовательно, исход скачек не предрешен сговором.

3) Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану ран, то я вынужден буду довольствоваться пятью часами сна. Следовательно, я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить на танцы.

4) Если 6-составное число, то 12- составное число. Если 12-составное число, то существует простое число, большее 12. Если существует простое число, больше 12, то существует составное число, большее 12. Если 6 делится на 2, то 6 - составное число. Число 12 – составное, следовательно, 6-составное число.

5) Для того чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник, или конспект, или нанять репетитора Я достану учебник, если мой приятель не уедет домой. Но он уедет домой только тогда, когда я достану конспект. Следовательно, я сдам экзамен.

6) Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, украдено было бы гораздо больше. Значит подозреваемый не виновен.

7) Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Следовательно если записка была найдена, то Генри покончил жизнь самоубийством.

8) Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет закончена, если только она не длится больше года и президент уходит фирмы уходит в отставку. Закончится ли забастовка, если конгресс отказывается действовать, и забастовка только что началась ?

9) Если Петр и Иван – братья, то они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Петр и Иван – однокурсники, то Иван и Михаил тоже однокурсники. Следовательно, или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил – однокурсники.

10) Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу эту работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я не получу эту работу.

11) Или Саша и Володя одного возраста, или Саша старше Володи. Если Саша и Володя одного возраста, то Нина и Володя не одного возраста. Если Саша старше Володи, то Володя старше Валентина. Следовательно, или Нина и Володя не одного возраста, или Володя старше Валентина.

12) Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы и возникает безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены, и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

13) Если Смит победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании. Но если он провалится на выборах, то он потеряет доверие партии. Смит или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему необходимо выйти из партии.

14) Если я пойду через болото, то смогу попасть в трясину, а если я пойду в обход, то не успею к поезду. Следовательно, я либо попаду в трясину, либо не успею к поезду.

15) Цены высоки, или применяется регулирование цен, а если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Если цены высоки, то и зарплата высока, а если зарплата высока, то наблюдается инфляция. Следовательно, нужно применять регулирование цен.

18) Если Петр ляжет сегодня спать поздно, то будет утром в отупении. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что не стоит жить. Следовательно, Петр будет завтра в отупении или ему будет казаться, что не стоить жить.

19) Если Шахтер выиграет, то болельщики Донецка будут торжествовать, а если выиграет Арарат, то будет торжествовать Ереван. Выиграет или Шахтер или Арарат. Однако, если выиграет Шахтер, то Ереван не будет торжествовать, а если выиграет Арарат, то не будет торжествовать Донецк. Итак, Донецк будет торжествовать, тогда и только тогда, когда не будет торжествовать Ереван.

20) Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные каналы. Если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы. Следовательно, если будут вырыты ирригационные канавы, то фермеры не оставят фермы.

Контрольные вопросы

1. Дать определение предиката, терма, квантора.
2. Что называется порядком предиката?
3. Ввести понятие п-местного предиката.
4. В чем различие свободных и связанных предметных переменных?
5. Привести примеры бинарных и тернарных отношений.
6. Указать основные типы высказываний связанных в записи с применением кванторов.
7. Дать определение общезначимой формулы.
8. Что называют предваренной нормальной формой?

Лабораторная работа № 8

Подграфы и изоморфизм

Цель работы: изучение основных понятий теории графов и приобретение практических навыков определения изоморфизма и изоморфной вложимости графов, построение подграфов, независимых, доминирующих множеств и клик.

Теоретическая справка

Пусть **V** – некоторое непустое множество ($\mathbf{V} \neq \varnothing$).

$\mathbf{V}^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств, $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ – неупорядоченная пара элементов множества $\mathbf{V}$. $\mathbf{V}^{(2)} = \{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} \mid \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$.

Неориентированный граф G – пара множеств (**V**,**E**), $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$, где

V – множество **вершин** графа **G**,

E – множество **рёбер** графа **G**.

Если **|V|=p**, а |**E**|=**q**, то обозначают граф **G,** как **(p,q)**-граф или **p**-граф.

Смежные вершины графа G – вершины, соединенные ребром.

Смежные ребра графа G – ребра, имеющие общую вершину.

Инцидентные ребро и вершина – вершина является одним из концов ребра.

Конечный граф – множество вершин графа конечно.

Способы задания графов

1. Явное перечисление множеств вершин **V** и ребер **E**.
2. Графический способ описания: прообраз вершины – точка, прообраз ребра – отрезок прямой или кривой.
3. Матричные способы описания.

1. **Матрица смежности**

$$A = \|a_{ij}\|,\ i, j = \overline{1, |V|},$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

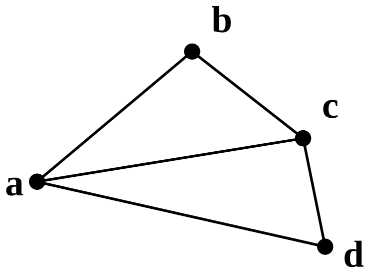
2. **Матрица инцидентности**

$$B = \|b_{ij}\|,\ i = \overline{1, |V|},\ j = \overline{1, |E|},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \vee e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & e_j \neq (v_i, v_k) \wedge e_j \neq (v_k, v_i). \end{cases}$$

Например:

Задан граф **G=(V, E),** где
V={a, b, c, d},
E={ab, bc, ac, ad, dc}.



Матрица смежности **A**

	a	**b**	**c**	**d**
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

Матрица инцидентности **B**

	ab	**bc**	**ac**	**ad**	**dc**
a	1	0	1	1	0
b	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1
d	0	0	0	1	1

Степени вершин графа

Степень вершины deg(v) графа **G** – число инцидентных ей ребер.
Максимальная степень всех вершин графа **G** – **Δ(G):**

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \{\deg(v)\}.$$

Минимальная степень всех вершин графа **G** – **δ(G):**

$$\delta(G) = \min_{v \in V} \{\deg(v)\}.$$

Лемма о рукопожатиях

Сумма степеней всех вершин графа G четна и равна удвоенному числу ребер

Изолированная вершина графа **G** – вершина, степень которой равна 0.
Висячая вершина графа **G** – вершина, степень которой равна 1.
Доминирующая вершина графа **G** – вершина, степень которой равна **p-1**, где **p** – количество вершин графа **G**.

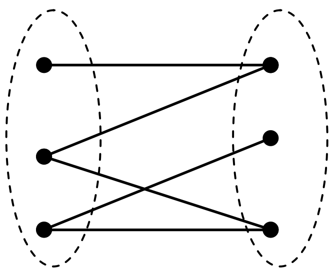
Например:

Двудольный граф (биграф) – множество вершин графа **V** можно разбить на два непересекающиеся подмножества $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$ таких, что каждое ребро графа имеет одну концевую вершину в $\mathbf{V_1}$, а вторую – в $\mathbf{V_2}$, причем $\mathbf{V_1 \cap V_2 = \varnothing}$, а $\mathbf{V_1 \cup V_2 = V}$.

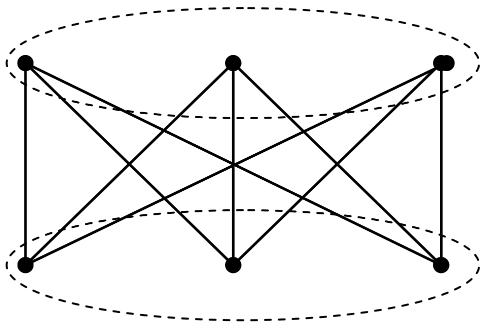
Полный двудольный граф – двудольный граф, у которого любые две вершины, входящие в разные доли $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$, смежны. Обозначается $\mathbf{K_{p,q}, p = |V_1|,\ q = |V_2|}$.

Звезда – полный двудольный граф $\mathbf{K_{1,q}}$.

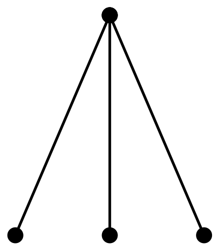
Двудольный граф



Полный двудольный граф $\mathbf{K_{3,3}}$



Звезда $\mathbf{K_{1,3}}$



Подграфы

Помеченный граф – граф, у которого каждой вершине поставлена в соответствие некоторая уникальная отметка (символ, цифра), иначе – **абстрактный.**

Дополнение графа G – граф $\mathbf{\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})}$, такой, что $\mathbf{V = \overline{V}}$, а $\mathbf{\overline{E} = V^{(2)} \setminus E}$ **(**вершины смежные в $\mathbf{\overline{G}}$ несмежны в G и наоборот).

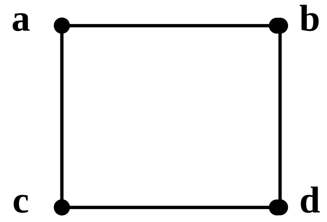
Подграф $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$ графа $\mathbf{G = (V, E)}$ – граф, у которого все вершины и ребра удовлетворяют следующим соотношениям $\mathbf{V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E}$.

Остовный подграф графа G - подграф, содержащий все вершины графа G, множество ребер есть подмножество ребер графа G.

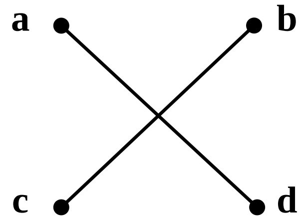
Порожденный подграф (порожденный подмножеством вершин $\mathbf{V_1}$) – подграф, множество вершин которого $\mathbf{V_1 \subseteq V}$, а множество ребер $\mathbf{E_1}$ содержит все ребра графа G, инцидентные выбранным вершинам $\mathbf{V_1}$.

Например:

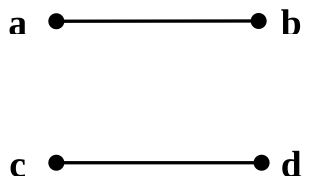
Граф **G**



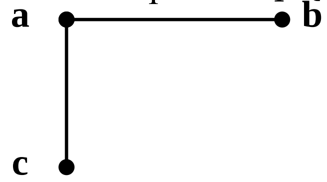
Дополнение



Остовный подграф



Подграф, порожденный множеством вершин $\mathbf{V_1=\{a,b,c\}}$

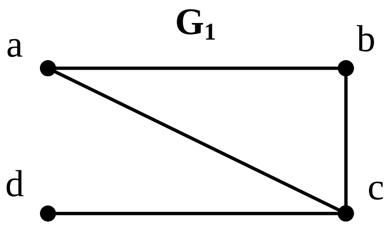


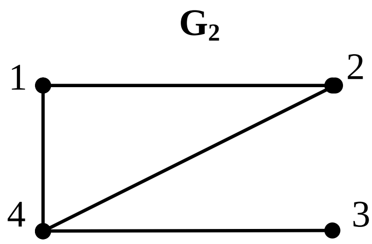
Изоморфизм графов

Изоморфные графы – существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин или **биекция**, сохраняющая отношение смежности. Изоморфизм графов **G** и **H**: $\mathbf{G \cong H}$.

Например:

Заданы два графа $\mathbf{G_1, G_2}$. Определить изоморфизм $\mathbf{G_1, G_2}$.





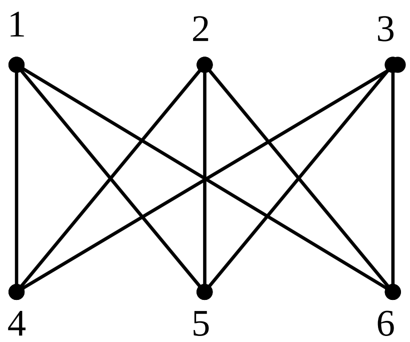
Решение:

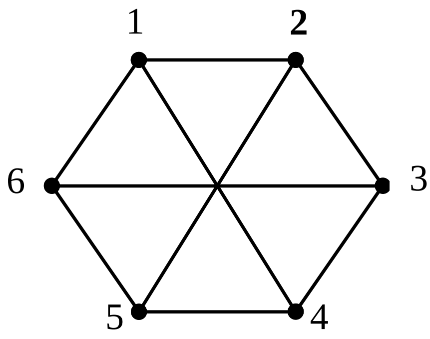
Граф $\mathbf{G_1}$ изоморфен графу $\mathbf{G_2}$, потому что существует биекция $\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{V_1 \to V_2}$, сохраняющая отношение смежности.

Биекция $\boldsymbol{\varphi}$**:**

$\mathbf{u \in V_1}$	a	b	c	d
$\mathbf{\varphi(u) \in V_2}$	2	1	4	3

Например: следующие графы изоморфны друг другу.





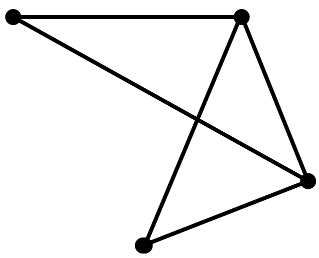
Биекция **φ:**

$\mathbf{u \in V_1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{\varphi(u) \in V_2}$	**1**	**3**	**5**	**2**	**4**	**6**

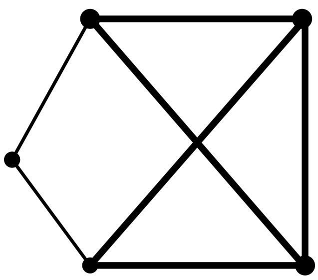
Граф $\mathbf{G_1}$ **изоморфно вложим** в граф $\mathbf{G}$, если граф $\mathbf{G_1}$ является изоморфным некоторому порожденному подграфу графа **G**.

Например: граф $\mathbf{G_1}$ изоморфно вложим в граф **G.**

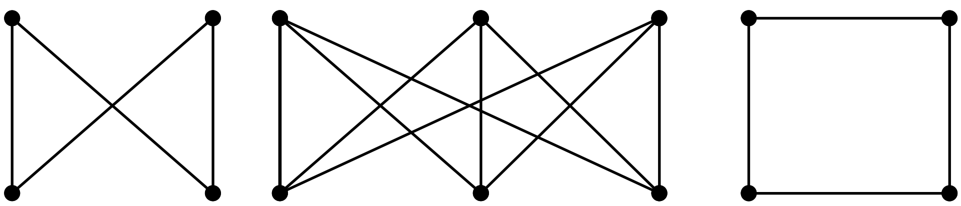
H



G



Например: граф $\mathbf{K_{2,2}}$ изоморфно вложим в $\mathbf{K_{3,3}}$.



Независимые множества

Независимое множество вершин – подмножество вершин графа **G**: **S**⊆**V** такое, что любые две вершины в нем несмежны, то есть никакая пара вершин не соединена ребром.

Подграф, порожденный независимым множеством – пустой граф.

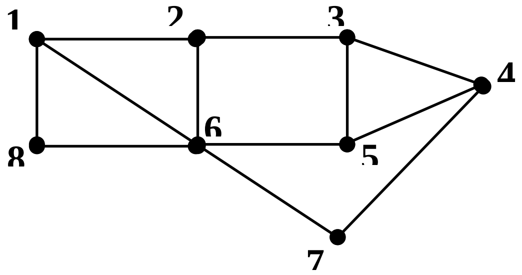
Максимальное независимое множество – не является собственным подмножеством другого независимого множества.

Наибольшее независимое множество – наибольшее по мощности среди всех независимых множеств.

Число независимости α(G) графа G – мощность наибольшего независимого множества.

Например:

Граф **G:**



Максимальные независимые множества

$S_1=\{1,3,7\}$; $S_2=\{1,4\}$; $S_3=\{1,5,7\}$;

$S_4=\{2,4,8\}$; $S_5=\{2,5,7,8\}$;

$S_6=\{3,7,8\}$; $S_7=\{3,6\}$;

$S_8=\{4,6\}$.

Наибольшее независимое множество графа **G:** $S_5=\{2,5,7,8\}$.

Число независимости графа **G:** **α(G)**=4.

Клика

Клика – подмножество вершин графа **G** такое, что любая пара из этого множества является смежной.

Подграф, порожденный кликой – полный граф.

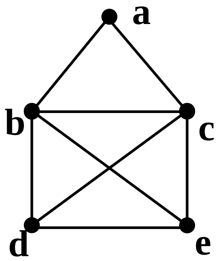
Максимальная клика – не является собственным подмножеством никакой другой клики графа **G**.

Наибольшая клика – наибольшая по мощности среди всех остальных клик графа **G**.

Кликовое число или плотность φ(G) графа G – мощность наибольшей клики.

Например:

Граф **G**



Максимальные клики: **S_1={a,b,c}, S_6={b,c,d,e}.**

Наибольшая клика: **S_6={b,c,d,e}.**

Кликовое число: **φ(G)**=4

Доминирующие множества

Доминирующее (внешне устойчивое) множество – подмножество **V'⊂V** вершин графа такое, что каждая вершина из **V\V'** смежна с некоторой вершиной из **V'**.

Иначе, каждая вершина графа находится на расстоянии не более одного ребра от данного множества.

Минимальное доминирующее множество – нет другого доминирующего множества, содержащегося в данном.

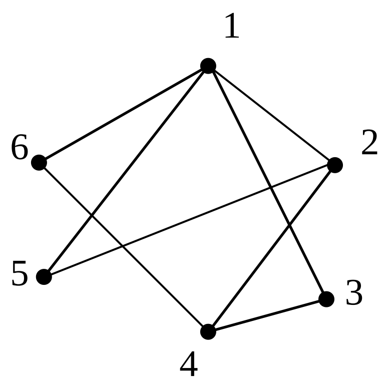
Наименьшее доминирующее множество – доминирующее множество с наименьшей мощностью.

Число доминирования β(G) – мощность наименьшего доминирующего множества.

Например:

Примеры минимальных доминирующих множеств графа **G** :

$S_1 = \{1,4\}$; $S_2 = \{4,5\}$; $S_3 = \{2,3,6\}$; $S_4 = \{3,5,6\}$



Пример наименьшего доминирующего множества: $S_1 = \{1,4\}$.

Число доминирования: **β(G)=2**.

Задание к лабораторной работе

1. Используя алгоритм генерации варианта **GV** (приложение А), построить неориентированный граф **G: GV(7,{2,3})**.
2. Описать граф матрицей смежности и матрицей инцидентности.
3. Изобразить графически граф **G** и его дополнение $\overline{\mathbf{G}}$**.**
4. Построить произвольный остовный подграф и подграф, порожденный вершинами {1,2,5,6,7};
5. Построить все помеченные 5-графы, изоморфно вложимые в граф **G**. Определить классы изоморфных графов, построив биекцию их вершин.

   Для каждого класса изоморфных графов привести рисунок абстрактного графа.
6. Найти все максимальные и наибольшие независимые множества исходного графа, определить число независимости.
7. Найти все максимальные и наибольшие клики данного графа. Определить плотность графа **G**.
8. Найти все минимальные и наименьшие доминирующие множества, определить число доминирования.

9. Найти полный двудольный подграф $\mathbf{K_{p,q}}$, изоморфно вложимый в **G** с максимальным количеством вершин **p+q** ($\mathbf{p \neq 1}$). Найти звезду $\mathbf{K_{1,q}}$, изоморфно вложимую в **G** с максимальным **q.**

Контрольные вопросы

1. Что такое неориентированный граф?
2. Определение подграфа, остовного и порожденного подграфа. Дополнение графа.
3. Изоморфизм графов.
4. Помеченные и абстрактные графы.
5. Максимальная и наибольшая клика. Кликовое число или плотность графа.
6. Максимальное и наибольшее независимое множество. Число независимости.
7. Полный, пустой, двудольный графы.
8. Число ребер в полном графе.
9. Число различных помеченных **p**-графов.
10. Число различных помеченных **(p,q)-**графов.

Лабораторная работа №9

Маршруты и связность в неориентированных графах

Цель работы: приобретение практических навыков в определении характеристик связности неориентированных графов, изучение различных алгоритмов нахождения кратчайших маршрутов.

Теоретическая справка

Маршруты в неориентированных графах

Маршрут $\mathbf{M=(v_0,e_1,v_1,e_2,...,e_n,v_n)}$ неориентированного графа **G=(V,E)** – чередующаяся, конечная последовательность вершин и рёбер такая, что начинается и заканчивается вершиной и каждое ребро в маршруте соединяет две вершины маршрута – предыдущую и последующую.

Обозначения $\mathbf{M=(v_0,e_1,v_1,e_2,...,e_n,v_n)}$ или $\mathbf{M=(v_0,v_1,...,v_n)}$ или $\mathbf{M=(e_1,e_2,...,e_n)}$, $M=(v_0-v_n)$-маршрут.

Концевые (терминальные) вершины маршрута – $\mathbf{v_0}$ и $\mathbf{v_n}$, **внутренние** – все остальные вершины.

Замкнутый маршрут $M=(v_0-v_n)$ – концевые вершины совпадают $(\mathbf{v_0=v_n})$, иначе – **открытый** $(\mathbf{v_0\neq v_n})$.

Цепь – маршрут, все ребра которого различны (кроме, возможно, концевых).

Простая цепь – маршрут, все вершины которого, а, следовательно, и ребра, различны (кроме, возможно, концевых).

Цикл – замкнутая цепь, замкнутый маршрут без повторяющихся ребер.

Простой цикл – замкнутая простая цепь, **p ≥ 3, p –** количество вершин.

Утверждение 1.

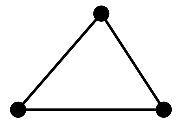
Любой **(u-v)**-маршрут неориентированном графе **G** содержит **(u-v)**-простую цепь.

Утверждение 2.

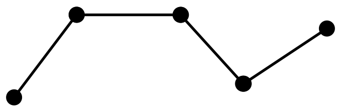
Любой цикл неориентированного графа содержит в себе простой цикл.

Граф, состоящий из одного простого цикла, обозначается $\mathbf{C_p}$, граф, состоящий из одной простой цепи, обозначается $\mathbf{P_p}$, здесь **p** – количество вершин графа.

C_3

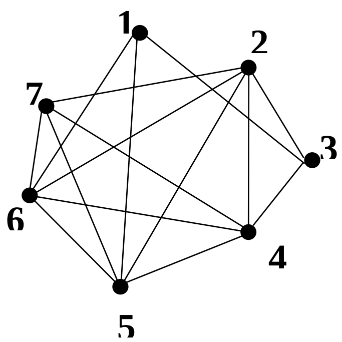


P_5



Например:

Дан граф **G.** Привести примеры маршрута, цепи, простой цепи, замкнутого маршрута, цикла и простого цикла.



Маршрут М1=(1,3,4,7,2,3,4,6).

Для маршрута М1 вершины 1 и 6 – концевые; 2,3,4,7 – внутренние.

Маршрут М1 – открытый маршрут, не цепь, не простая цепь (ребро (3,4) повторяется).

Маршрут М2=(1,3,4,7,2,3,4,6,1).

Маршрут М2 – замкнутый маршрут, не цикл, не простой цикл (ребро (3,4) повторяется).

Маршрут М3=(7,5,6,7,2,4).

Маршрут М3 – не простая цепь (вершина 7 повторяется).

Маршрут М4==(7,5,6,7,2,4,7).

Маршрут М4 – не простой цикл (вершина 7 повторяется).

Маршрут М5=(1,3,4,7,6,2).

Маршрут М5 – простая цепь.

Маршрут М6=(1,3,4,5,7,6,1).

Маршрут М6 – простой цикл.

Связность в неориентированных графах

Связный неориентированный граф **G** – любая пара вершин соединена маршрутом (либо простой цепью) в **G**.

Компонента связности или компонента графа **G** – максимальный связный подграф графа **G**.

Две вершины $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_j$ называются **связанными** в графе **G**, если в графе **G** существует маршрут между этими двумя вершинами. Вершина считается связанной сама с собой.

Связный граф состоит из одной компоненты связности.

Любой несвязный граф содержит, по крайней мере, две компоненты связности

Любой граф **G** является объединением своих компонент связности

Либо граф, либо его дополнение – связные графы

Число вершинной связности χ(G) – наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Например: [illegible]

Число реберной связности λ(G) – наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Например: [illegible]

Считается, что $\lambda(K_1)=0$.

Точка сочленения (разделяющая вершина) – вершина **v** графа **G**, удаление которой увеличивает количество компонент связности графа **G**.

Мост – ребро, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности.

Неразделимый граф – граф без точек сочленения.

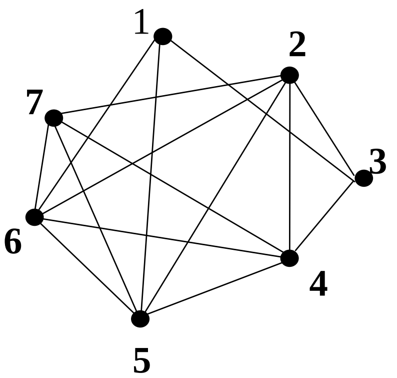
Блок – максимальный неразделимый подграф графа **G**.

Теорема Уитни

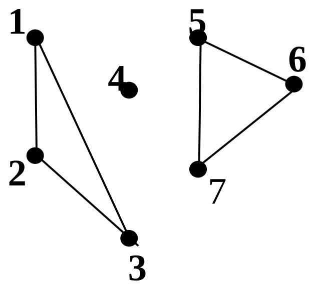
Для произвольного неориентированного графа справедливо неравенство: $\chi(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$, где $\delta(G)$ – минимальная степень вершин графа **G**

Например:

Граф **G**:

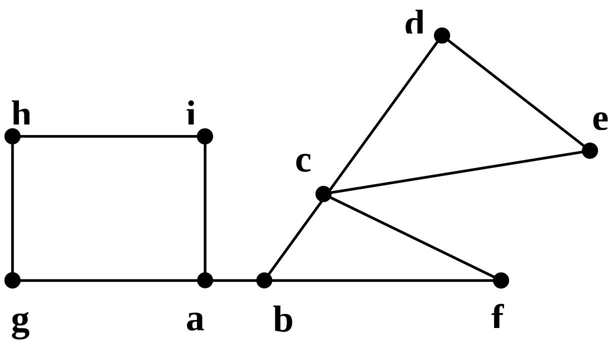


Граф **R**:



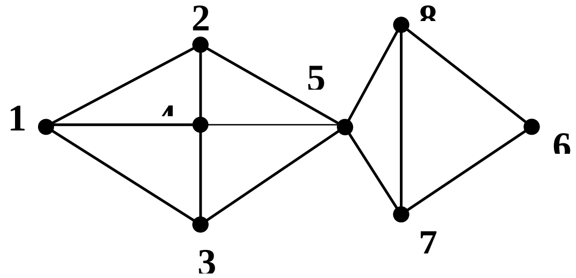
Граф **G** – связен. Граф **R** – несвязен, в графе **R** три компоненты связности, R_1 = **{1,2,3}, R2 ={4}, R3={5,6,7}.**

Граф **G1**:



Граф **G1**: точки сочленения – вершины **a, b, c**; мост – ребро **ab**. Граф **G1** не является неразделимым; блоки графа **G1: {c,d,e}, {c,b,f}, {a,g,h,i}, {a,b}.**

Граф **G2**:



Вершинная связность графа **G2** равна **χ(G2)**=1 (удаление вершины **5** приводит к нарушению связности графа **G2**). Реберная связность графа **G2** равна **λ(G2)=2** (удаление рёбер **(5,7)**, **(5,8)** приводит к нарушению связности графа **G2**).

Метрика в неорграфах

Длина маршрута – количество ребер, входящих в данный маршрут, каждое ребро учитывается столько раз, сколько раз оно входит в маршрут.

Обхват графа G – длина минимального простого цикла графа **G** (если он существует).

Окружение графа G – длина наибольшего простого цикла графа **G** (если он существует).

Расстояние d(u,v) между двумя несовпадающими вершинами **u** и **v –** длина кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины.

Геодезическая σ(u,v) – кратчайшая простая цепь между вершинами **u** и **v,** доставляющая расстояние между этими вершинами.

Матрица расстояний

Матрица расстояний D(G) – квадратная матрица **p*p**, где **p** – количество вершин графа **G:** $\mathbf{D(G)=\|\, d_{ij}\,\|, i, j=\overline{1,p}, |V|=p, |E|=q}$,

$$\mathbf{d_{ij}=\begin{cases} 0, & i=j \\ d(i,j), & i\neq j, \exists\, M=(i\text{ - }j) \\ \infty, & i\neq j, \nexists\, M=(i\text{ - }j) \end{cases}}$$

Эксцентриситет e(v) вершины **v** графа **G** – длина максимальной геодезической, исходящей из вершины **v:**

$$\mathbf{e(v)=\underset{u\in V}{MAX}\ d(v,u)}.$$

Диаметр D(G) графа **G** – максимальный среди всех эксцентриситетов вершин графа **G**:

$$\mathbf{D(G)=\underset{v\in V}{MAX}\ e(v)}.$$

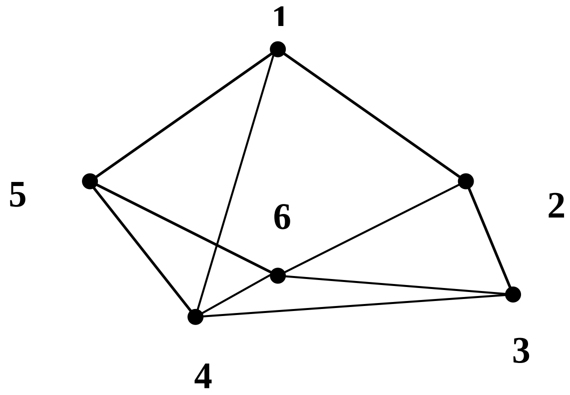
Радиус R(G) графа **G** – минимальный среди всех эксцентриситетов вершин графа **G**:

$$\mathbf{R(G)=\underset{v\in V}{MIN}\ e(v)}.$$

Периферия графа **G –** множество вершин графа **G**, у которых эксцентриситет равен диаметру**.**

Центр графа **G –** множество всех вершин графа **G,** у которых эксцентриситет равен радиусу.

Например: Граф **G**: вес каждого ребра равен 1.



Матрица расстояний D_G

j / i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**e(j)**
1	0	1	2	1	1	2	**2**
2	1	0	1	2	2	1	**2**
3	2	1	0	1	2	1	**2**
4	1	2	1	0	1	1	**2**
5	1	2	2	1	0	1	**2**
6	2	1	1	1	1	0	**2**

Диаметр **G: D(G)**=2. Радиус **G: R(G)**=2.
Периферия графа **G=**{1,2,3,4,5,6}.
Центр графа **G =** {1,2,3,4,5,6}.
Обхват графа **G = 3**.
Окружение графа **G = 6,** максимальный простой цикл, который содержит все вершины графа **G (**1,2,3,4,6,5,1**).**

Задание к лабораторной работе

Исходные данные: граф **G1: GV(13,{6,7})**
Алгоритм генерации варианта **GV(p,X)** описан в приложении А.

1. Определить, является ли граф **G1** связным.
2. Для максимальной компоненты графа **G1**:
   a) выделить маршрут не цепь, замкнутый маршрут не цепь, цепь, простую цепь, цикл, простой цикл;
   b) определить обхват и окружение;
   c) найти вершинную и реберную связность.
3. Для каждой компоненты графа **G1**:

а) построить матрицу расстояний, определить эксцентриситеты вершин, радиус, диаметр, центр, периферию, диаметральную цепь;

б) определить, является ли она неразделимой, выделить блоки, найти точки сочленения и мосты.

Контрольные вопросы

1. Привести пример графа, удовлетворяющего строгому неравенству теоремы Уитни.
2. Привести примеры графов, которые имеют все периферийные и все центральные вершины.
3. Что такое эксцентриситет?
4. Чем диаметр графа отличается от его радиуса (дайте их определения)?
5. Чем простая цепь отличается от цикла?
6. Что такое маршрут?
7. Что такое число рёберной связности?
8. Дайте определения моста и цикла.

Лабораторная работа № 10

Поиск кратчайших маршрутов

Алгоритм нахождения кратчайших маршрутов

Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины (**s**) до заданной конечной вершины (**t**), при условии, что такой путь существует.

Задачи данного типа имеют следующие модификации:

- для заданной начальной вершины **s** найти кратчайшие пути от **s** ко всем другим вершинам графа;
- найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

Для решения этих задач рассмотрим граф $\mathbf{G=(V,E),|V|=p,|E|=q}$, ребра которого имеют определенные веса (стоимости).

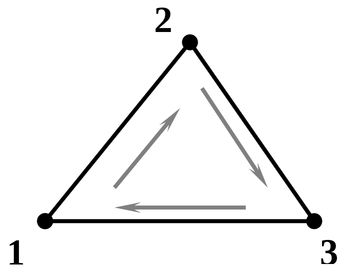
Веса ребер задаются матрицей $\mathbf{C=\|c_{ij}\|, i,j=\overline{1,p}}$. Элементы $\mathbf{c_{ij}}$ матрицы весов **C** могут быть положительными, отрицательными или нулями, поэтому для большинства алгоритмов поиска кратчайших маршрутов существует ограничение: в **G** не должно быть циклов с суммарным отрицательным весом (в этом случае кратчайшего маршрута не существует).

Например, если веса ребер графа **G1** составляют соответственно $\mathbf{c_{12}=2, c_{23}=2, c_{13}=-5}$, то имеется цикл суммарного отрицательного веса $\mathbf{c_{12}+c_{23}+c_{13}=-1}$ и задача не имеет решения.

Введем обозначения, пусть $\mathbf{\Gamma(v_i)}$ – множество вершин графа **G**, которые смежны с вершиной $\mathbf{v_i}$.

Так, для графа **G1** имеем **Г(1)={2,3}.**

G1:



Алгоритм Дейкстры ($\mathbf{c_{ij} \geq 0}$)

В общем случае этот метод основан на том, что вершинам приписываются временные пометки. Пометки обозначают длины путей от начальной вершины **s** к данной вершине (причем временные пометки являются верхними границами длин путей).

Величины этих пометок постепенно уменьшаются с помощью итерационной процедуры (т.е. процедуры, в которой постоянно повторяется некоторый набор операций).

На каждом шаге итерации одна из временных пометок становится постоянной, т.е. такой, которая обозначает точную длину кратчайшего пути от **s** к рассматриваемой вершине.

Рассмотрим этот алгоритм для случая, когда вес каждого ребра графа неотрицателен ($\mathbf{\forall i,j=\overline{1,p}: c_{ij}\geq 0}$ **).**

Алгоритм Дейкстры

Пусть **l(i)** – пометка вершины **i**.

Шаг 1. Положить $\mathbf{l(s)=0}$ и считать эту пометку постоянной.

Положить $\mathbf{l(i)=\infty}$ для всех $\mathbf{i \neq s}$ и считать эти пометки временными.

Положить **p=s**.

Шаг 2. Для всех $\mathbf{i \in \Gamma(p)}$, <u>пометки</u> которых <u>временные</u>, заменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$\mathbf{l(i) \leftarrow \min[l(i);\ l(p)+c(p,i)]}.$$

Шаг 3. Среди всех вершин со <u>временными пометками</u> найти такую, для которой: $\mathbf{l(i^*) = \min[l(i)]}$.

Шаг 4. Считать пометку вершины $\mathbf{i^*}$ постоянной и положить $\mathbf{p = i^*}$.

Шаг 5.

Шаг 5. 1. Необходимо найти кратчайший маршрут только от $\mathbf{s}$ к $\mathbf{t}$.

При $\mathbf{p = t}$ алгоритм заканчивает работу, $\mathbf{l(p)}$ является длиной кратчайшего маршрута от **s** к $\mathbf{t}$. При $\mathbf{p \neq t}$ перейти к шагу 2.

Шаг 5.2. Необходимо найти кратчайшие маршруты от **s** ко всем остальным вершинам графа.

Если все вершины получили постоянные пометки, то алгоритм заканчивает работу.

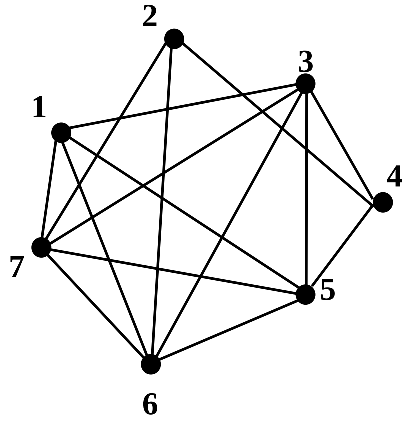
Если некоторые вершины имеют временне пометки, то перейти к шагу 2.

Как только длины кратчайших путей будут найдены, сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры с использованием соотношения: **l(i’)+c(i’,i)=l(i)**. Поскольку вершина **i’** непосредственно предшествует вершине **i** в кратчайшем пути от **s** к **i**, то для любой вершины **i** соответствующую вершину **i’** можно найти как одну из оставшихся вершин, для которой выполняется: **l(i’)+c(i’,i)=l(i).**

Например: граф **G** задан графически и матрицей весов.

Найти кратчайшие расстояние в графе от первой вершины ко всем остальным.

Замечание: постоянные пометки будем выделять знаком +.



Матрица весов для графа $\mathbf{C_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	0	4	0	15	13	1
2	0	0	0	4	0	5	7
3	4	0	0	9	12	13	2
4	0	4	9	0	3	0	0
5	15	0	12	3	0	2	11
6	13	5	13	0	2	0	12
7	1	7	2	0	11	12	0

Шаг 1. **l(1)=0**

Устанавливаем нулевую пометку для вершины **1**, считаем ее постоянной.

l(2)=l(3)=...=l(7)=∞

Устанавливаем временные пометки для вершин (**2,...,7**).

p=1

Шаг 2. [illegible] – все вершины, смежные вершине **1** имеют временные пометки

l(3)=min(∞,0+4)=4
l**(5)= min(∞,0+15)=15**
l(6)= min(∞,0+13)=13
l(7)= min(∞,0+1)=1

Изменяем временные пометки в соответствии с выражением: [illegible]

Шаг 3.

[illegible], соответствует вершине $\mathbf{i^* = 7}$.

Шаг 4.

l(7)=1⁺ – вершина **7** получает постоянную пометку

p=7

Шаг 5. Не все вершины имеют постоянные пометки, а только **{1,7}**, алгоритм продолжает работу, переходим к шагу 2.

Шаг 2. [illegible] среди них только вершина **1** имеет постоянную пометку.

l(2)=min(∞, 1^++7)=8
l(3)= min(4, 1^++2)=3
l(5)= min(15, 1^++11)=12
l(6)= min(13, 1^++12)=13

Шаг 3.

$\mathbf{l(i^*) = min\,(8,3,\infty,12,13) = 3}$, соответствует вершине $\mathbf{i^* = 3}$.

Шаг 4.

l(3)=3^+ – вершина **3** получает постоянную пометку.

p=3

Шаг 5. Не все вершины имеют постоянные пометки, а только **{1,3,7}**, алгоритм продолжает работу, переходим к шагу 2.

Шаг 2. [illegible]. Постоянные пометки имеют вершины **{1,3,7}**, их исключаем из рассмотрения.

l(4)= min(∞, 3^++9)=11
l(5)= min(12, 3^++12)=12
l(6)= min(13, 3^++13)=13

Шаг 3. Среди всех вершин с <u>временными</u> пометками, а это множество **{2,4,5,**, находим:

$\mathbf{l(i^*) = min\,(8,11,12,13) = 8}$, вершина 2 получает постоянную пометку.

Шаг 4.
l(2)=8^+ – вершина **2** получает постоянную пометку.
p=2

Шаг 5. Не все вершины имеют постоянные пометки, а только **{1,2,3,**, алгоритм продолжает работу, переходим к шагу 2.

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(2)=\{4,6,7\}$, вершина **7** имеет постоянную пометку, поэтому исключается из рассмотрения.
l(4)= min(12, 8^++4)=12
l(6)= min(13, 8^++5)=13
l(4)=l(5)=12^+
p=4, 5
Можно выбирать как вершину 4, так и вершину **5.** Выбираем вершину 4.
l(4)=12^+

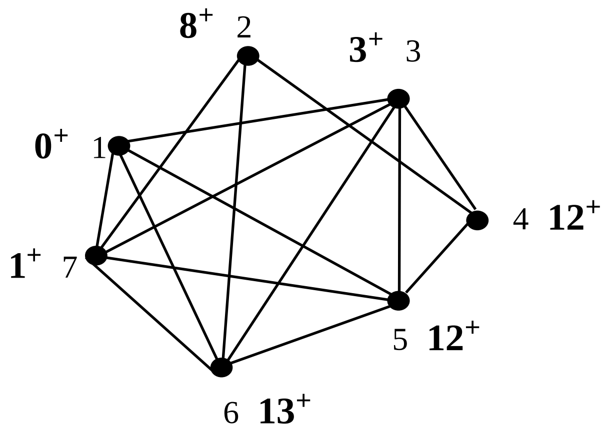
p=4
Множество вершин с постоянными пометками равно **{1,2,3**.

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(4)=\{2,3,5\}$, вершины 2 и 3 имеют постоянную пометку, следовательно, не рассматриваются.
l(5)= min(12, 12^++3)=12
$\mathbf{l(i^*)=min\,(12{,}13)=12}$, вершина 5 получает постоянную пометку.
l(5)=12^+

p=5
Множество вершин с постоянными пометками равно **{1,2,3**.

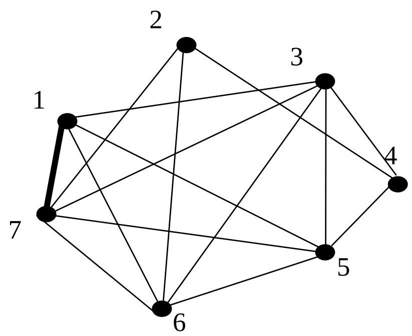
Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(5)=\{3,4,6\}$, все вершины, кроме **6** имеют постоянные пометки.
l(6)= min(13,12^++2)=13
l(6)=13^+
p=6
Множество вершин с постоянными пометками равно **{1,2,3**.

Шаг 5. Все вершины имеют постоянные пометки, алгоритм закончил работу. Найдены кратчайшие расстояния от вершины **1** ко всем остальным вершинам в графе.

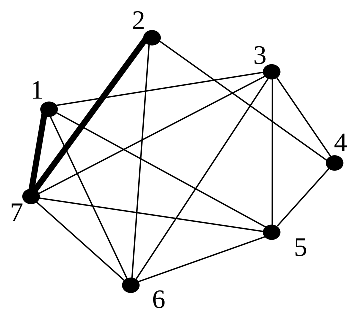


Таким образом, кратчайшие маршруты от вершины 1:

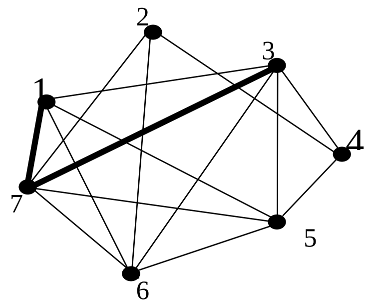
1-7=(1,7)=1;



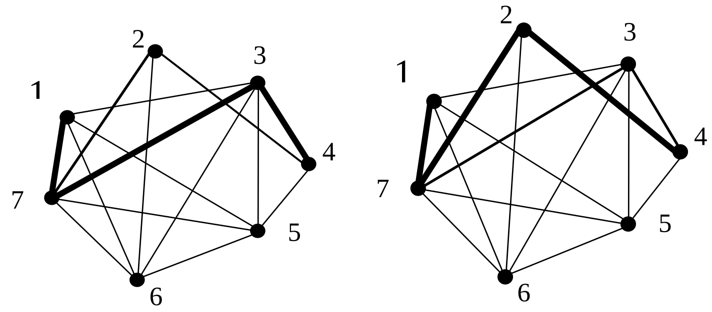
1-2=(1,7,2)=8;



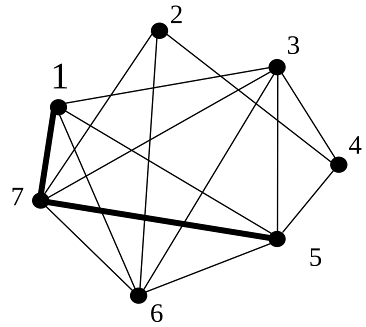
1-3=(1,7,3)=3;



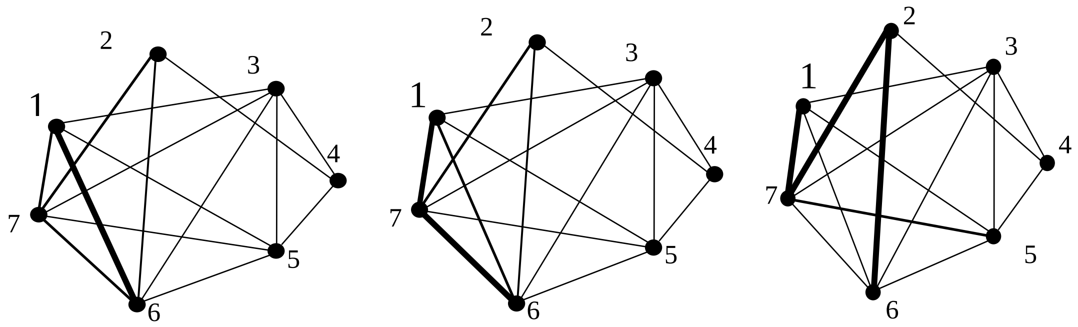
1-4=(1,7,3,4)=(1,7,2,4)=12;



1-5=(1,7,5)=12;



1-6=(1,6)=(1,7,6)=(1,7,2,6)=13;



Задание к лабораторной работе

Исходные данные: граф **G2: GV(7,{2,3}).**
Ребра графа **G2** взвешены соответствующими элементами матрицы **Y**.

В графе **G2** построить кратчайшие маршруты от первой вершины ко всем остальным при помощи алгоритма Дейкстры.

Контрольные вопросы

1. Назначение алгоритма Дейкстры.
2. Чем временные пометки отличаются от постоянных пометок?
3. Какие ограничения применяют к алгоритмам?
4. Сформулируйте по шагам алгоритм Дейкстры.

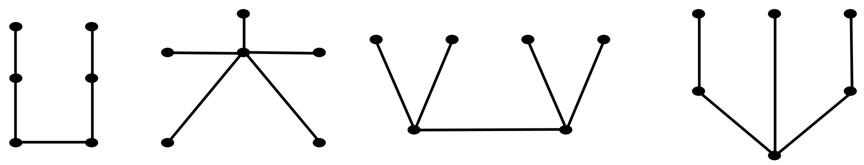
Лабораторная работа № 11

Деревья и остовы неориентированных графов

Цель работы: приобретение практических навыков в работе с деревьями неориентированных графов, изучение различных алгоритмов нахождения остовов кратчайших маршрутов.

Теоретическая справка

Дерево – связный граф, не содержащий циклов.
Лес (ациклический граф) – произвольный граф, не содержащий циклов.
Компонентами леса являются деревья.



Теорема о дереве (5 различных определений дерева)

Для любого $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-графа $\mathbf{G}$ следует, что утверждения (1-5) эквивалентны:

1. Граф $\mathbf{G}$ – дерево, связный ацикличный граф.
2. Любые две несовпадающие вершины графа $\mathbf{G}$ соединены единственной простой цепью.
3. Граф $\mathbf{G}$ – связен, и количество ребер в нем на 1 меньше, чем количество вершин: $\mathbf{q}=\mathbf{p}-\mathbf{1},\mathbf{p}=\mathbf{q}+\mathbf{1}$.
4. Граф $\mathbf{G}$ – ацикличен, и $\mathbf{q}=\mathbf{p}-\mathbf{1},\mathbf{p}=\mathbf{q}+\mathbf{1}$.
5. Граф $\mathbf{G}$ – ацикличен, и если любую пару его несовпадающих несмежных вершин соединить ребром $\mathbf{e}$, то полученный граф $\mathbf{G}+\mathbf{e}$ будет содержать ровно один цикл.

Теорема о висячих вершинах дерева

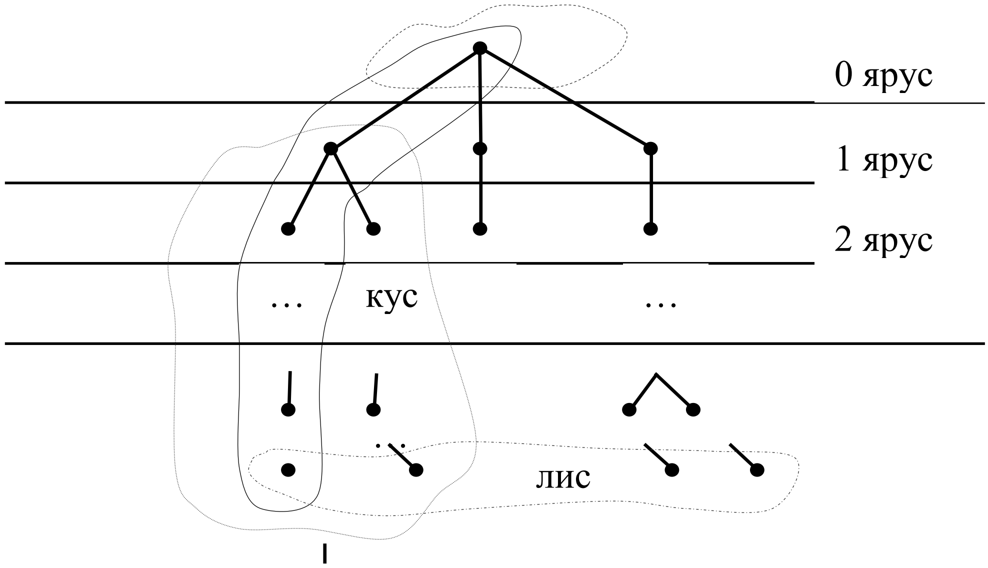
В любом нетривиальном $(\mathbf{p}\geq\mathbf{2})$ дереве имеется, по крайней мере, 2 висячие вершины.

Теорема о центре дерева.

Центр любого дерева состоит либо из 1, либо из 2 смежных вершин.

Ярусная форма представления деревьев

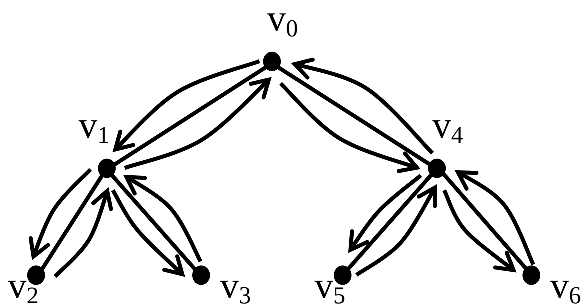
Пусть существует вершина $\mathbf{v}_0$ – корень графа $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$, $\mathbf{v}_0\in\mathbf{V}$. Эту вершину сориентируем. На $\mathbf{i}$-й ярус помещаются вершины с расстоянием от корня, равным $\mathbf{i}$. Концевые висячие вершины будем называть **листами**, а геодезические от корня к листу называют **кустом**.



Способы обхода деревьев

1.**Способ обхода в глубину**

Поиск в глубину подразумевает просмотр ветвей дерева.



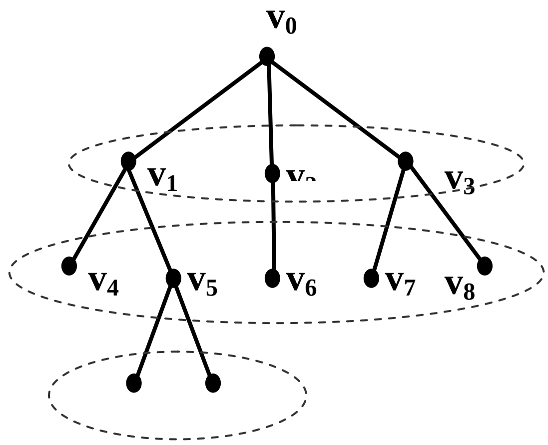
Начинаем поиск с некоторой фиксированной вершины $\mathbf{v_0}$.

Находим вершину $\mathbf{u}$ смежную с $\mathbf{v_0}$ и повторяем весь процесс, начиная с вершины $\mathbf{u}$:

- если существует не просмотренная вершина, смежная с вершиной $\mathbf{u}$, рассматриваем ее и, начиная с нее, выполняем поиск;
- если не существует ни одной новой вершины, смежной с $\mathbf{u}$, то говорят, что вершина $\mathbf{u}$ использована, и делается возврат в вершину, из которой мы попали в вершину $\mathbf{u}$ и продолжаем процесс;
- если на каком-то шаге $\mathbf{u} = \mathbf{v_0}$, и нет ни одной использованной вершины, то алгоритм заканчивает работу.

2.**Способ обхода в ширину**

Подразумевает просмотр вершин по ярусам в иерархическом представлении. Здесь под использованием вершины подразумевается просмотр всех «соседей» данной вершины.



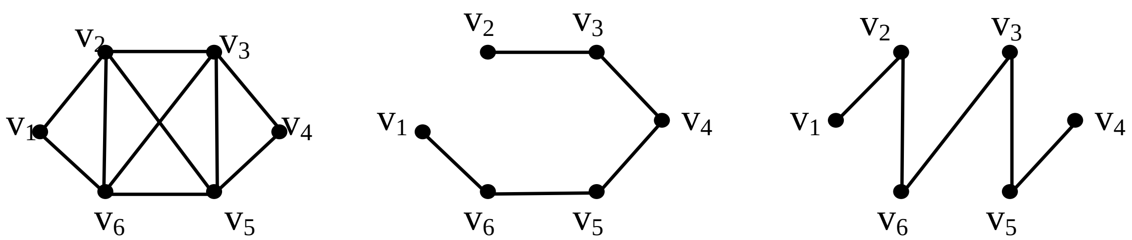
Остовы
(наличие деревьев в произвольном графе)

Остов (каркас, скелет) графа G – это остовный подграф графа G, задающий дерево на каждой компоненте связности графа G.

Для связного графа **остов** – это дерево, покрывающее все вершины исходного графа.

Пусть есть некоторый граф $\mathbf{G}$:

$\mathbf{G}$: остовы:



Ребра остова $\mathbf{T}$ некоторого графа $\mathbf{G}$ называются **ветвями**, а ребра графа $\mathbf{G}$, не вошедшие в ост, называются **хордами**.

Алгоритмы поиска остовов кратчайших маршрутов

Имеется граф, заданный матрицей весов, т.е. существует $\mathbf{G=(V,E)}$, $\mathbf{C=\|c_{ij}\|, i,j=\overline{1,p}}$, где $\mathbf{p}$ – количество вершин графа, $\mathbf{c_{ij}}$ – вес ребра $\mathbf{\{i,j\}}$, если оно существует. Требуется найти остов с минимальным суммарным весом ребер.

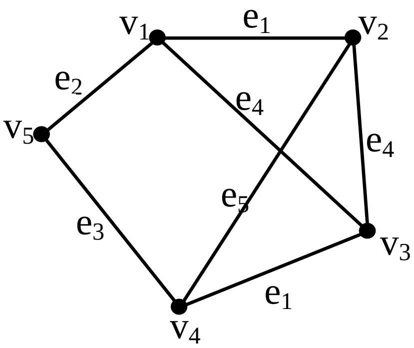
Алгоритм Краскала

1. Упорядочиваем ребра графа $\mathbf{G=(V,E)}$ в порядке неубывания их весов.

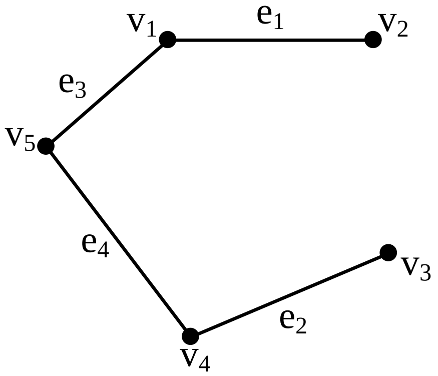
2. Строим пустой граф $\mathbf{O_p}$, где $\mathbf{p}$ – количество вершин исходного графа

3. На каждом шаге к уже сформированному текущему графу, добавляется ребро из списка ребер исходного графа с минимальным весом. Добавляемое ребро не должно приводить к образованию цикла.

4. Алгоритм заканчивает работу, если количество ребер в формируемом графе станет равным $\mathbf{p-1}$.



Пример: алгоритм Краскала
Список ребер
e_1=(1, 2), (4, 3) – 1
e_2=(1, 5) – 2
e_3=(4, 5) – 3
e_4=(1, 3), (2, 3) – 4
e_5=(2, 4) – 5



Остов кратчайших маршрутов:
M=((1, 2), (4,3),(1, 5), (4,5))

Общий суммарный вес $\sum$ = 7.

Алгоритм Прима

Отличается от алгоритма Краскала тем, что на каждом шаге строится не просто граф без циклов, но дерево.

1. Упорядочиваем ребра графа $\mathbf{G}$ в порядке неубывания их весов.

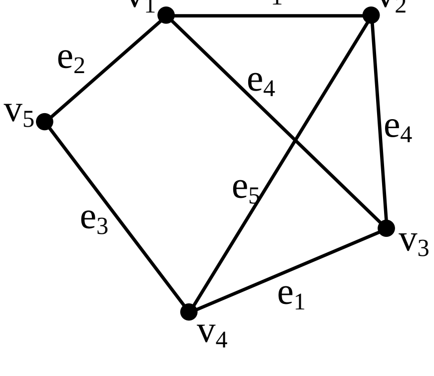
2. Строим пустой граф $\mathbf{O_p}$, где $\mathbf{p}$ – количество вершин исходного графа

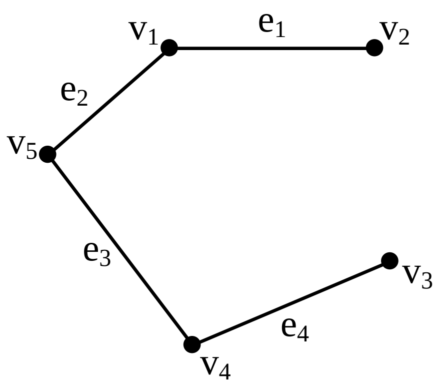
3. На каждом шаге к текущему, уже сформированному графу, добавляем ребро исходного графа с минимальным весом. Ребро не должно образовывать цикл и нарушать связность. Для этого список ребер каждый раз просматривается, начиная с 1 ребра.

4. Алгоритм заканчивает работу, если количество ребер в формируемом графе станет равным $\mathbf{p-1}$.

Пример: алгоритм Прима

Список ребер
e_1=(1, 2), (4, 3) – 1
e_2=(1, 5) – 2
e_3=(4, 5) – 3
e_4=(1, 3), (2, 3) – 4
e_5=(2, 4) – 5





Остов кратчайших маршрутов: M=((1, 2), (1, 5),(5,4), (4,3))
Общий суммарный вес $\sum$ = 7.

Задание к лабораторной работе

Исходные данные: граф $\mathbf{G2 = GV\ (13,\{6,7\})}$.

1. Для графа **G2** построить дерево обхода вершин графа (использовать алгоритм в ширину, в глубину).
2. Для графа **G2** решить задачу построения остовов кротчайших маршрутов, используя алгоритмы Прима и Краскала. В качестве весов ребер использовать элементы вспомогательной матрицы **Y**.
3. Сгенерировать все различные абстрактные, не изоморфные друг другу деревья с количеством вершин от 4 до 7 (22 графа). Отметить на графах одну или две центральные вершины.

Алгоритм генерации варианта **GV(p,X)** описан в приложении А.

Контрольные вопросы

1. Привести определение дерева и леса.
2. Способы обхода деревьев.
3. Какие вершины дерева называются центром?
4. Что называется остовом?
5. Как можно определить число остовных деревьев?
6. Чем отличаются алгоритмы Краскала и Прима?

Лабораторная работа № 12

Циклы и обходы

Цель работы: приобретение практических навыков в нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов в неориентированных графах, решение задач «китайского почтальона» и коммивояжера

Теоретическая справка

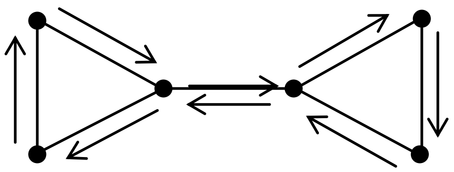
Обходы графа
Эйлеровы циклы

Эйлеров цикл – цикл, содержащий все рёбра исходного графа (каждое ребро используется ровно 1 раз).

Эйлеров граф – связный граф, содержащий эйлеров цикл.

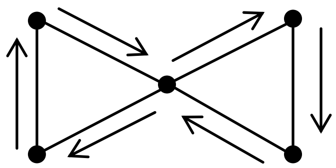
Например:

G_1:



2раза

G_2:



Теорема Эйлера или критерий существования в графе эйлерового цикла

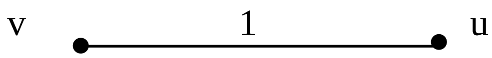
Связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны

Следствие №1. Для связного графа G множество ребер можно разбить на простые циклы, если граф эйлеров.

Следствие №2. Для того чтобы связный граф G покрывался единственной эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он содержал ровно 2 вершины с нечетной степенью. Тогда цепь начинается в одной из этих вершин и заканчивается в другой.

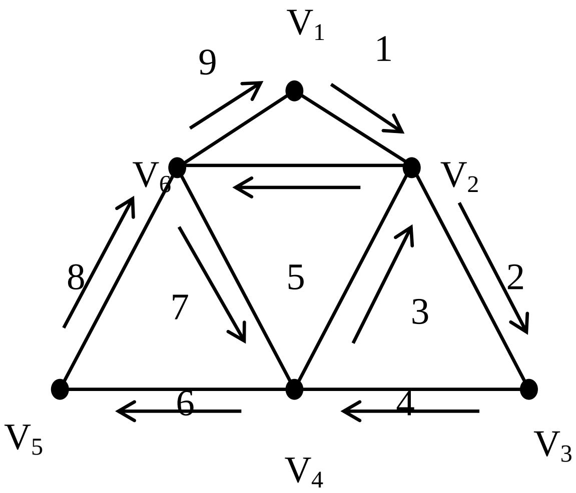
Алгоритм построения эйлерового цикла или алгоритм Флёри

1. Начиная с любой вершины v, присваиваем ребру vu №1. Вычеркиваем это ребро из списка ребер и переходим к вершине u.



2. Пусть w – вершина, в которую мы пришли в результате выполнения шага 1 и k – номер, присвоенный очередному ребру на этом шаге. Выбираем произвольное ребро инцидентное вершине w, причем мост выбираем только в крайнем случае, если других возможностей выбора ребра не существует. Присваиваем ребру номер k+1 и вычеркиваем его. Процесс длится до тех пор, пока все ребра не вычеркнуты.

Например:



Эйлерова цепь – цепь с концевыми вершинами (a, b), начинающаяся в вершине a, заканчивающаяся в вершине b и содержащая каждое ребро исходного графа ровно 1 раз**.**

Гамильтоновы циклы

Гамильтонов цикл – простой цикл, содержащий каждую вершину графа.

Гамильтонов граф – граф, содержащий гамильтонов цикл.

Достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе

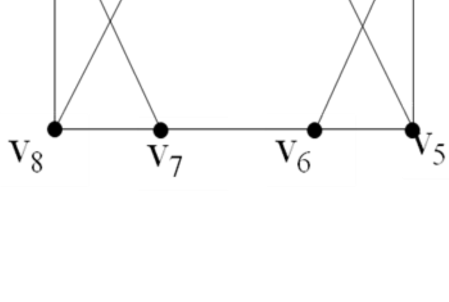
Теорема Дирака

Если число вершин графа $p \geq 3$ и для любой вершины выполняется условие $\forall v_i$, $i = \overline{1,p}$; $\deg v_i \geq \frac{p}{2}$, то граф G – гамильтонов

Теорема Оре

Если число вершин графа $p \geq 3$ и для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство: $\deg u + \deg v \geq p$, то граф G – гамильтонов

Например:



$p=8$, $\deg v_i = 3$, $3 \ngeq \frac{8}{2} = 4$.

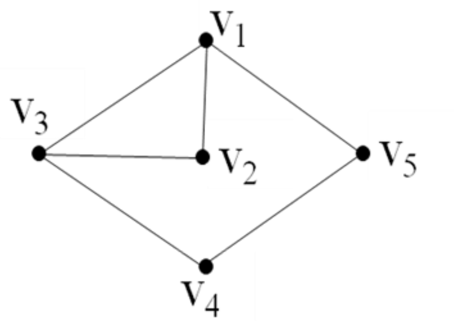
В данном графе не выполняется условие теоремы Дирака, но существует гамильтонов цикл: $M = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1)$.

Дерево полного перебора

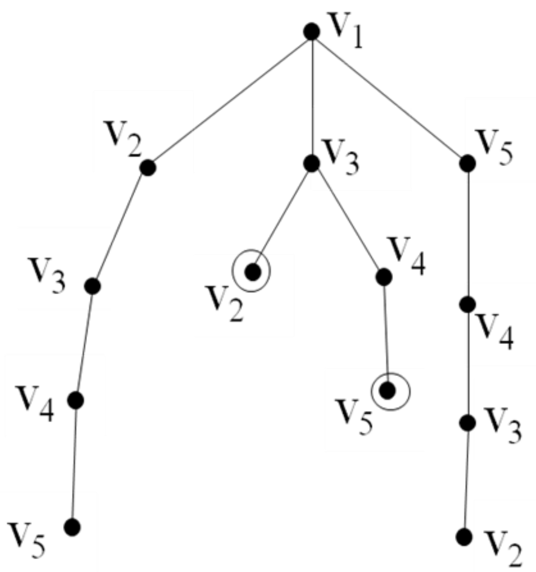
Дерево полного перебора строится для определения гамильтоновых циклов в графе и используется при небольшом количестве вершин данного графа.

Построение дерева производится слева направо:

Граф G:



Дерево полного перебора



Гамильтоновы циклы графа G:

1. $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$;
2. $(v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$

Задание к лабораторной работе

Исходные графы G1: (13, {5, 6})
G2: (7,{3,4})

1. Определить, является ли граф G1 эйлеровым.
   Если граф G1 – эйлеров, то построить эйлеров цикл по алгоритму Флёри;

Если G1 не является эйлеровым, то добавить минимальное число ребер, делающих его эйлеровым и найти эйлеров цикл по алгоритму Флёри;

2. Определить, является ли граф G2 гамильтоновым.

   Если граф – гамильтонов, то построить гамильтонов цикл, используя дерево полного перебора;

   Если граф не является гамильтоновым, то добавить минимальное число ребер, делающих его гамильтоновым и построить гамильтонов цикл, используя дерево полного перебора.
3. Привести примеры гамильтоновых графов, не удовлетворяющих теоремам Оре и Дирака.

Контрольные вопросы

1. Определение эйлерова цикла, графа.
2. Сформулировать критерий существования в графе эйлерового цикла.
3. Какой граф называется гамильтоновым? Дать определение гамильтонова цикла.
4. Сформулировать теоремы Оре, Дирака

Лабораторная работа № 13

Ориентированные графы или орграфы

Цель работы: изучение основных понятий для ориентированных графов, получение практических навыков нахождения сильных компонент, построения конденсации, базы и антибазы, нахождения ядра.

Теоретическая справка

Определение орграфа

Ориентированный граф или орграф G = **(V, A)** – пара множеств **V** и **A** таких, что **V** – конечное непустое множество, а **A** –некоторое подмножество декартового квадрата **V:**

$$\mathbf{A \subseteq V^2, V^2 = V \times V}.$$

Вершины графа G – элементы множества **V** .

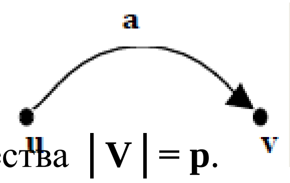
Дуги графа G – элементы множества **A**.

Дуга – упорядоченная пара вершин **a** = **(u, v)** .

Начало дуги – вершина **u, конец дуги –** вершина **v**.

Дуга **исходит** из своего начала и **заходит** в свой конец.

Орграф **G** – **орграф p-го порядка,** если мощность множества $\mathbf{|V| = p}$.



Способы описания орграфов

1. Матрица смежности

$$\mathbf{A = \| a_{ij} \|, i, j = \overline{1,p}, \quad |V| = p, |A| = q,}$$

$$\mathbf{a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in A; \\ 0, & (i,j) \notin A. \end{cases}}$$

2. Матрица инцидентности

$$\mathbf{B = \| b_{ij} \|, i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}, |A| = q, |V| = p.}$$

$$\mathbf{b_{ij} = \begin{cases} 1, & i, v \in V, \quad j = (i,v) \in A; \\ -1, & i, v \in V \quad j = (v,i) \in A; \\ 0, & else. \end{cases}}$$

Степени вершин орграфа

Полустепень захода вершины **v** графа **G –** число дуг, заходящих в вершину **v**

$$\mathbf{deg^-(v) = |X|; \quad X = \{x \mid x = (u,v) \in A\}.}$$

Полустепень исхода вершины **v** графа **G** – число дуг, исходящих из вершины **v**

$$\mathbf{deg^+(v) = |Y|; \quad Y = \{y \mid y = (v,u) \in A\}.}$$

Степень вершины v орграфа **G** – сумма полустепеней захода и исхода вершины **v :**

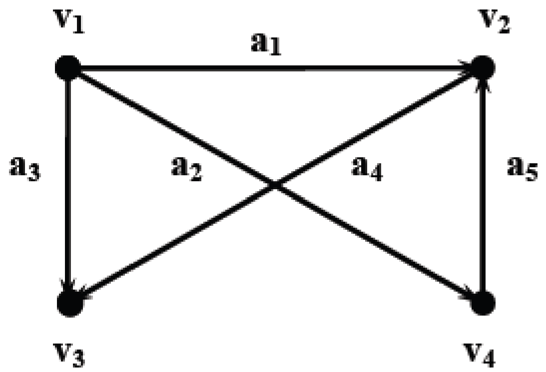
$$\mathbf{deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v)}.$$

Лемма о рукопожатиях для орграфа

Сумма полустепеней захода всех вершин орграфа **G** равна сумме полустепеней исхода, и равна количеству дуг.

$$\sum_{i=1}^{p} \deg^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \deg^{-}(v_i) = q, \quad q = |A|, \quad p = |V|.$$

Например: орграф **G** = **(V, A).**



Матрица смежности $\mathbf{A_G}$

	v_1	v_2	v_3	v_4	$\deg^{+}(v_i)$
v_1	0	1	1	1	3
v_2	0	0	1	0	1
v_3	0	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0	1
$\deg^{-}(v_i)$	0	2	2	1	

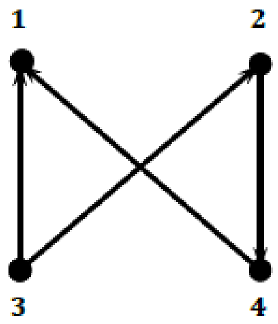
Матрица инцидентности B_G

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	-1	0	0	1	-1
v_3	0	0	-1	-1	0
v_4	0	-1	0	0	1

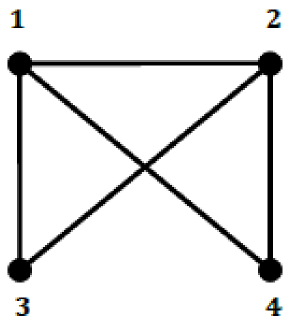
Основание – неориентированный граф, получившийся в результате снятия ориентации дуг орграфа.

Обратный граф $\mathbf{G^{-1}} = (\mathbf{V}, \mathbf{A^{-1}})$ – орграф, у которого множество вершин совпадает с исходным графом, и дуга

$$(u,v) \in A^{-1} \leftrightarrow (v,u) \in A.$$



Обратный орграф G^{-1}



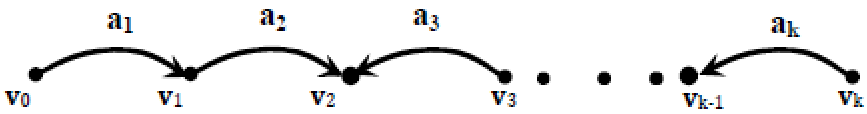
Основа **G**

Маршруты в орграфах

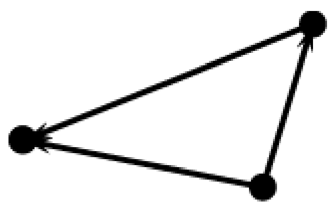
Ориентированный маршрут (ормаршрут) – конечная чередующаяся последовательность вершин и дуг орграфа таких, что каждая дуга исходит из предыдущей вершины ормаршрута и заходит в последующую вершину $\mathbf{a_i} = (\mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}})$.

Ориентированная цепь (орцепь) – ориентированный маршрут бе повторяющихся дуг.
Путь – цепь без повторяющихся вершин.
Ориентированный цикл – замкнутая ориентированная цепь.
Контур – замкнутый путь или замкнутый маршрут без повторения дуг и вершин (кроме концевых).
Пример контура:

Длина ориентированного маршрута – число дуг, составляющих ормаршрут, с учетом повторения.
Полумаршрут (маршрут основания) – последовательность вершин и дуг орграфа, что: $\mathbf{a_i} = (\mathbf{v_{i+1}}, \mathbf{v_i})$ или $\mathbf{a_i} = (\mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}})$.



Аналогично вводятся понятия **полуцепь, полупуть, полуконтур.**
Пример полуконтура:



Типы связности орграфа

Орграф G – сильносвязный (сильный), если любые две вершины в нём взаимнодостижимы.

Орграф G – одностороннесвязный (односторонний), если для каждойm пары его вершин**,** по крайней мере, одна достижима из другой.

Орграф G – слабосвязный (слабый), если любые две его вершины соединены полумаршрутом (полупутем).

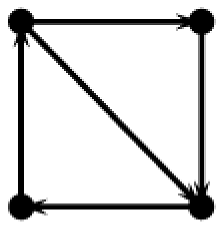
Орграф G – несвязен, если не связно его основание.

Сильная компонента – максимальный относительно включения вершин сильный подграф исходного орграфа.

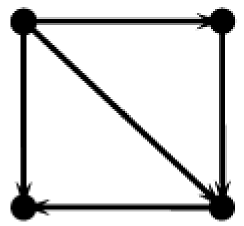
Односторонняя компонента – максимальный относительно включения односторонний подграф исходного орграфа.

Слабая компонента – максимальный относительно включения слабый подграф исходного орграфа.

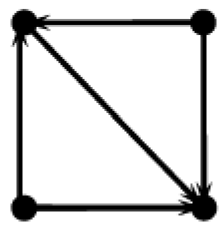
Например:



Сильный орграф



Односторонний орграф



Слабый орграф

Критерии сильной, односторонней и слабой связности

Орграф является **сильным** тогда и только тогда, когда в нём есть остовный циклический маршрут Орграф является **односторонни**м тогда и только тогда, когда в нём есть остовный маршрут Орграф является **слабым** тогда и только тогда, когда в нём есть остовный полумаршрут

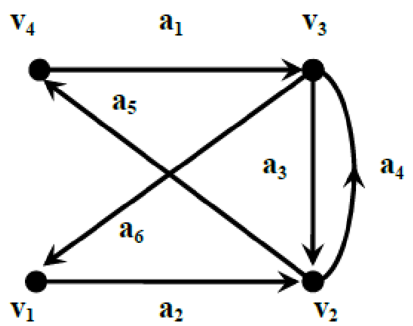
Остовный маршрут – маршрут, содержащий все вершины исходного графа.

Обходы орграфа

Эйлеров цикл – цикл, содержащий каждую дугу орграфа.

Эйлеров орграф – связный орграф, содержащий эйлеров цикл.

Например:



Эйлеров цикл орграфа: **(a1, a3, a4, a6, a2, a5)** .

Критерий эйлеровости для орграфов

Для связного орграфа следующие условия эквивалентны:

1) орграф **G** – эйлеров;

2) для любой вершины справедливо: $\mathbf{deg}^{+}(\mathbf{v}) = \mathbf{deg}^{-}(\mathbf{v})$.

Следствие из критерия эйлеровости для орграфов

Орграф **G** является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.

Гамильтонов контур орграфа G – контур, содержащий все вершины данного орграфа.

Гамильтонов орграф G – орграф, содержащий гамильтонов контур.

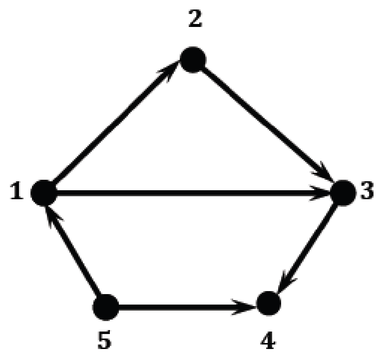
Ядро графа

Доминирующее множество вершин S графа G = (V, A) – подмножество вершин такое, что для любой вершины **w** ∈ **V-S** существует такая вершина **v** ∈ **S**, что **(v,w)** ∈ **A.**

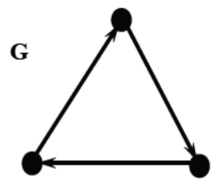
Независимое множество вершин графа G – подмножество вершин графа **G,** в котором никакие две вершины не смежны между собой.

Ядро графа – множество вершин, которое одновременно является доминирующим и независимым множеством.

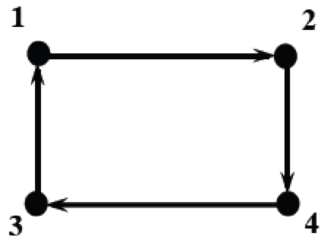
Например: Множество вершин {2,5} - ядро орграфа.



Пример орграфа, в котором ядра не существует.



Пример орграфа, в котором два ядра: {1, 4}, {2, 3}.



Задание к лабораторной работе

1. Используя алгоритм генерации варианта **GV**, построить ориентированный граф **G**: **GV (9,{3,4}).** Ориентацию дуг установить произвольно.
2. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности заданного орграфа. Проверить выполнение леммы о рукопожатиях для орграфа.
3. Построить основание и обратный граф.
4. Построить, если это возможно, ормаршрут (не орцепь), выделить в нем цепь (не путь), путь, замкнутый маршрут (не цикл), цикл (не контур) и контур, полумаршрут (не полуцепь), полуцепь (не полупуть), полупуть. Обосновать отсутствие какого-либо из маршрутов.
5. Определить тип связности орграфа.
6. Выделить ядро орграфа.
7. Найти в графе контур Эйлера и Гамильтона.

Контрольные вопросы

1. Определение орграфа.
2. Дуги орграфа. Начало и конец дуги.
3. Матричные способы описания орграфов и их особенности. Матрица смежности и матрица инцидентности.
4. Основание и обратный орграф. Симметричный орграф.
5. Полустепень исхода и полустепень захода вершин орграфа. Степень вершины орграфа.
6. Лемма о рукопожатиях для орграфа.
7. Ориентированный маршрут, ориентированная цепь, путь.
8. Ориентированный замкнутый маршрут, ориентированный цикл и контур.
9. Полумаршрут, полуцепь, полупуть, полуцикл, полуконтур. Длина ормаршрута.
10. Сильная, односторонняя и слабая связность. Компоненты связности.
11. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа. Остовный маршрут.
12. Дать определение ядра графа.
13. Гамильтонов контур и Эйлеров цикл в орграфе.

Лабораторная работа № 14

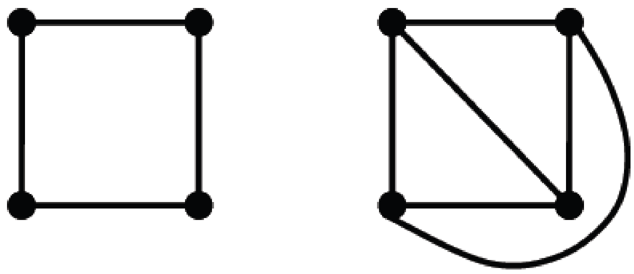
Плоские и планарные графы

Цель работы: приобретение практических навыков в определение планарности графов на основе критериев Понтрягина-Куратовского и Вагнера, построении плоской укладки и определении числовых характеристик непланарных графов.

Теоретическая справка
Плоские и планарные графы

Плоским называется такой граф **G** , у которого вершины – точки плоскости, а ребра − непрерывные плоские линии без пересечений и самопересечений, причем соединяющие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентных им обоим вершин.

Пример:

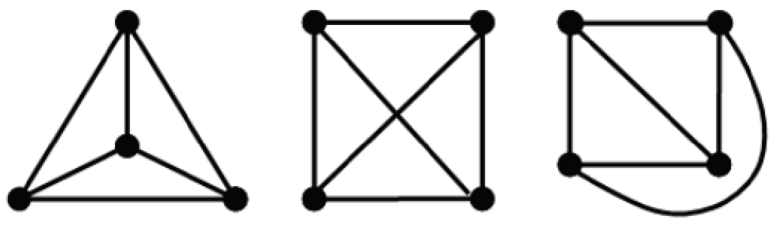


Планарный граф − это граф, который изоморфен плоскому.
О планарных графах говорят, что они имеют **плоскую укладку** или **укладываются на плоскости**.

Утверждение 1. Всякий подграф планарного графа − планарен.

Утверждение 2. Если некоторый граф содержит непланарный подграф, то и сам граф не планарен.

На рисунке приведено три изображения графа **K4** .



G_1 G_2 G_3

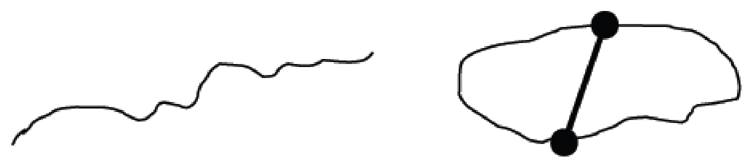
Графы **G1 ,G3** являются плоскими по определению, а граф **G2** −планарен, так как изоморфен плоскому графу.

Теорема Жордано

Жорданова кривая − это непрерывная спрямляемая линия, не имеющая самопересечений.

Теорема Жордано

> Замкнутая Жорданова кривая **L** на плоскости делит область на две области, так, что любая линия, соединяющая точки в различных подобластях пересекает Жорданову кривую



Гранью плоского графа называется максимальное по включению количество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена Жордановой кривой, не пересекающей ребра графа.

Граница грани − это множество вершин и ребер, принадлежащих грани.

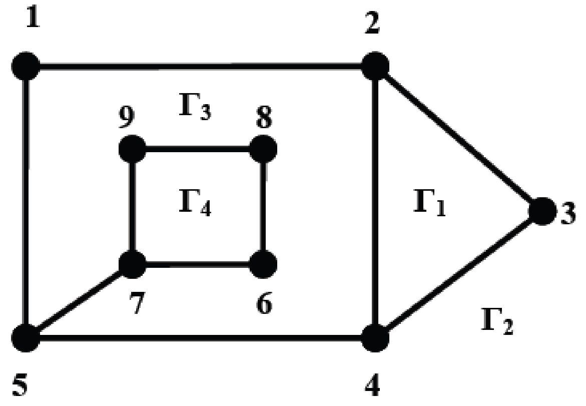
Всякий плоский граф имеет одну единственную неограниченную **внешнюю** грань**,** остальные – **внутренние.**

Следствие из теоремы Жордано

> Любые две вершины, принадлежащие одной грани, могут быть соединены цепью произвольной длины таким образом, что выбранная грань разбивается на две грани

Например

Грани Г**1, **Г**3, **Г**4** – внутренние, грань Г**2** – внешняя.



Границы граней:

Г**1** = **{2,3,4}** или **{23, 24, 34}**;

Г**2** = **{1, 2, 3, 4, 5}→{12, 23, 34, 45, 15}** ;

Г**3** = **1){1, 2, 4, 5}→{12,15, 24, 45};**

2){5, 6, 7, 8, 9}→{57, 67, 68, 79, 89};

.Г**4** =**{6,7,8,9}→{67,68,79,89}**.

.

Теорема Эйлера для плоского графа

Для любого связного графа $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, $|\mathbf{V}| = \mathbf{p}, |\mathbf{E}| = \mathbf{q}$,
являющегося плоским, справедливо соотношение:

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{f} = \mathbf{2},$$

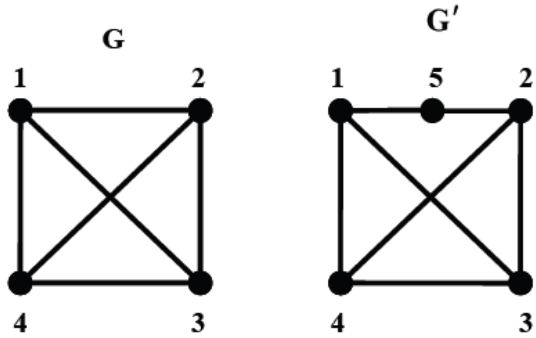
где $\mathbf{p}$ – количество вершин, $\mathbf{q}$ – количество ребер,
$\mathbf{f}$ – количество граней плоского графа

Графы $\mathbf{K_5}$ и $\mathbf{K_{3,3}}$ – непланарны.

Критерии планарности графов

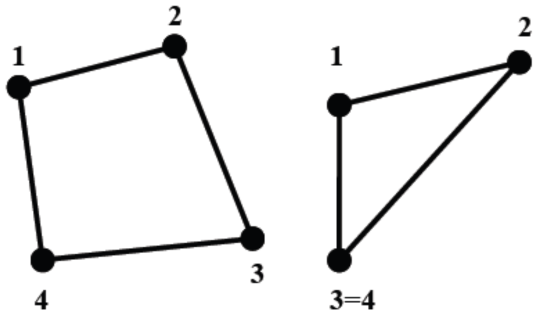
Операция подразбиения ребер

В произвольном графе **G** удаляется ребро **e** = **{u,v}** и добавляется два новых ребра: $\mathbf{e_1}$ = **{u,a}**, $\mathbf{e_2}$ = **{a, v}**, где **a** – новая вершина, не принадлежащая графу. Таким образом, ребро **{u,v}** графа **G** **подразбивается** вершиной **a** на два ребра и получается новый граф : **G′** = **G - {u,v}** + **{u,a}** + **{a, v}**.

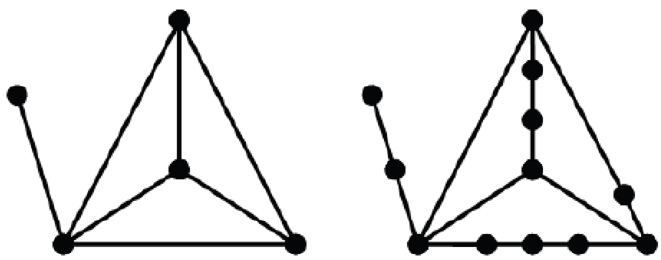


Операция стягивания ребер

Операция стягивания ребер – отождествление смежных вершин ребра (операция противоположная операции подразбиения ребер).



Два графа называются **гомеоморфными**, если они могут быть получены из одного и того же графа путем подразбиения его ребер.



Критерий планарности Понтрягина-Куратовского

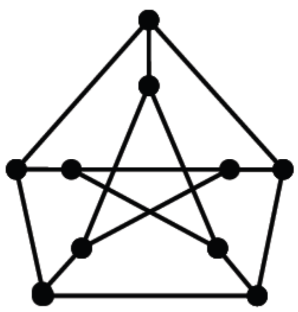
Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$

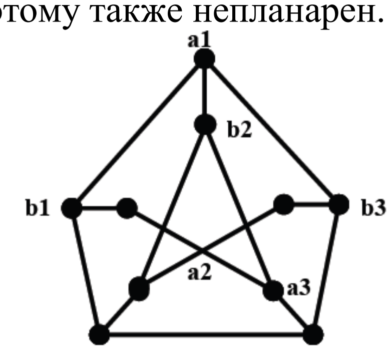
Критерий планарности Вагнера

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$

Например.

Граф Петерсона стягивается к $\mathbf{K_5}$, поэтому – непланарен. Граф справа от графа Петерсона стягивается к $\mathbf{K_{3,3}}$, поэтому также непланарен.





Алгоритм плоской укладки графа

Для плоской укладки графа и проверки является ли он планарным, используется алгоритм γ.

Для правильной работы алгоритма (без ограничения области применения) определим свойства графов, которые подаются на вход алгоритма:

- граф должен быть связным;
- граф должен иметь хотя бы один цикл;
- граф не должен содержать мостов, т.е. ребер после удаления которых граф распадается на несколько компонент связности.

Алгоритм γ плоской укладки графа **G** представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уже уложенному на плоскости графу $\tilde{\mathbf{G}}$(подграф графа **G**) некоторой новой цепи также принадлежащей **G**, оба конца которой принадлежат $\tilde{\mathbf{G}}$. Эта цепь разбивает одну из граней графа $\tilde{\mathbf{G}}$на две.

При этом в качестве начального плоского графа выбирается любой простой цикл исходного графа. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена плоская укладка графа **G** или присоединение некоторой цепи оказывается невозможным, в том случае граф является не планарным.

Пусть есть граф **G** и построена некоторая плоская укладка $\tilde{\mathbf{G}}$ подграфа графа **G**.

Сегментом S относительно текущей плоской укладки !**G** или просто **сегментом** будем называть подграф исходного графа **G** одного из следующих двух видов:

1) ребро **e** = **{u,v}** исходного графа **G** такое, что не принадлежит текущей плоской укладке графа, $e \notin \tilde{G}$, но концевые вершины этого ребра **u,v** принадлежат этой плоской укладке;

2) связная компонента графа $G - \tilde{G}$ дополненная всеми ребрами графа **G**, инцидентными вершинам взятой компоненты и концевыми вершинами этих ребер.

Граф $- G - \tilde{G}$ получается вычитанием графа !**G** из исходного графа **G**.

Контактная вершина − это вершина **v** сегмента **S** относительно !**G** , которая принадлежит множеству вершин текущей плоской укладки.

Допустимой гранью для сегмента **S** называется такая грань Г графа !**G** , которая содержит все контактные вершины сегмента **S**.

Обозначим Г**(Si)** − множество всех допустимых граней для сегмента **Si** .

Простая цепь α сегмента **S** , содержащая 2 различные контактные вершины и не содержащая других контактных вершин, называется α -цепью.

Простая α-цепь проходит из контактной вершины через неконтактные и возвращается в контактную вершину.

Алгоритм γ.

0. Выберем некоторый простой цикл **C** графа **G** и уложим его на плоскости (лучше выбирать простой цикл графа **G** , доставляющий окружение графа): $\tilde{G} := C$.

1Найдем грани $\tilde{G}$ графа и множество сегментов **S** относительно текущей укладки $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто перейти к п. 7.

2. Для каждого сегмента **S** найдем множество допустимых граней Г**(S)** .

3. Если существует сегмент **S**, для которого Г**(S)** $= \varnothing$ (множество граней пусто), то граф **G** не планарен. Выход из алгоритма, иначе переход к п. 4.

4. Если существует сегмент **S** для которого ровно одна допустимая грань (Г**(S)** = **1**), то перейдем к п. 6, иначе п. 5.

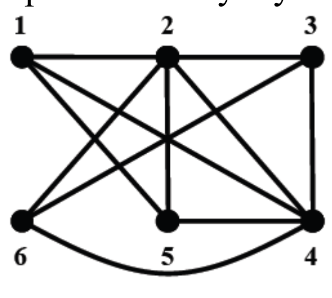
5. Для некоторого сегмента **S** выбираем произвольную допустимую грань Г

6. Поместим произвольную α -цепь **L** , принадлежащую **S** , в грань Г , заменим $\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$ и перейдем к п. 1. Построена $- \tilde{G}$ частичная, текущая плоская укладка графа **G**.

7. Построена $\tilde{G}$ плоская укладка графа **G**.

Пример.

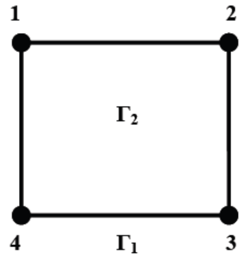
Определить планарность и построить плоскую укладку графа **G**.



Инициализация алгоритма:

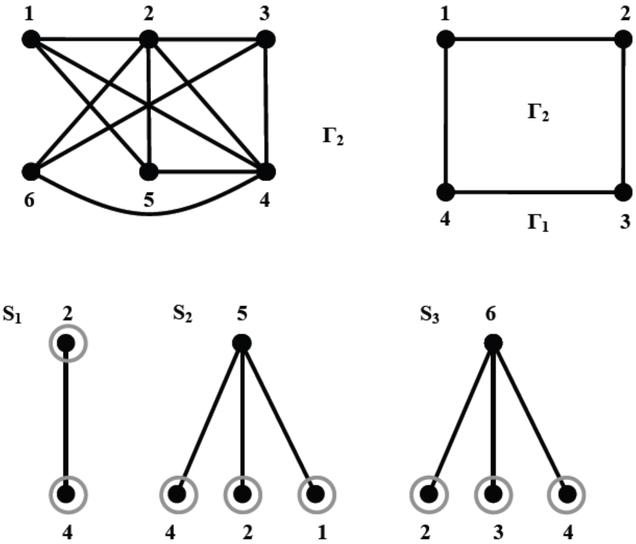
– выберем в графе произвольный простой цикл и уложим его на плоскости $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{C}$;

– определим для него множество граней.

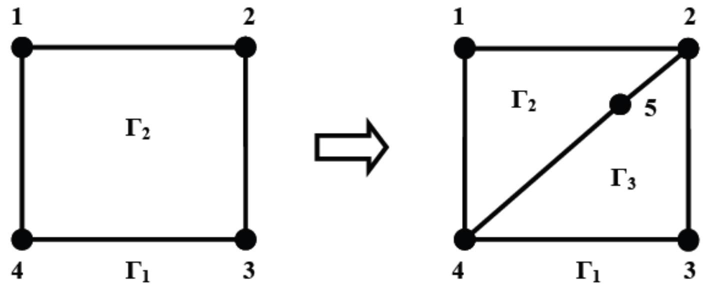


1) Определим множество сегментов относительно текущей плоской укладки. Множество сегментов не пусто.

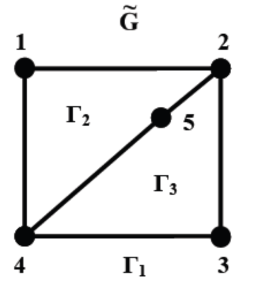
2) Определим для каждого сегмента множество допустимых граней: Г**(S1)** = Г**(S2)** = Г**(S3) = {**Г**1,** Г**2}**.

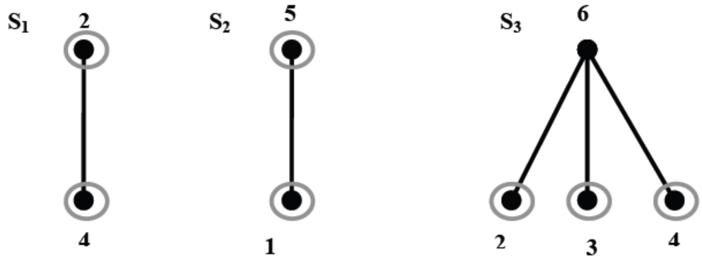


3) Выберем сегмент **S2** и α -цепь = **{4, 5, 2},** уложим ее в одной из допустимых граней, пусть это будет Г**2** .



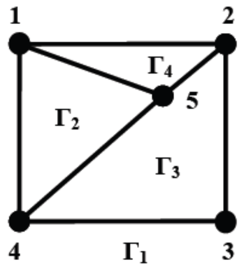
4) Для новой текущей плоской укладки определяем новые множества граней и сегментов.

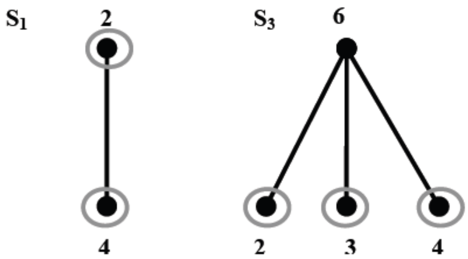




5) Для каждого сегмента определим множества допустимых граней: Г**(S1) = {**Г**1,** Г**2,** Г**3}** , Г**(S2) = {**Г**2}** , Г**(S3) = {**Г**1,** Г**3}.** Выбираем сегмент **S2** и укладываем его в единственную для него допустимую грань Г**2**. Получаем текущую частичную плоскую укладку графа **G**.

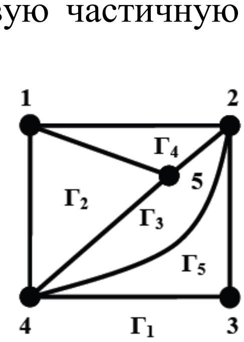
6) Для новой текущей частичной укладки **G ~** определим множество граней и сегментов.

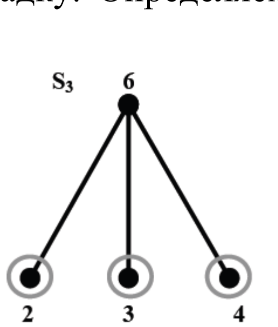




Множества допустимых граней для сегментов: Г**(S1)** = Г**(S3) = {**Г**1,** Г**3}.**
Выбираем сегмент **S1** и укладываем в допустимой для него грани Г**3**.

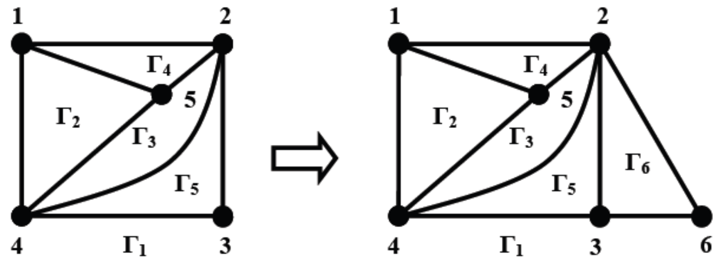
7) Получаем новую частичную укладку. Определяем для нее множество граней и сегментов.



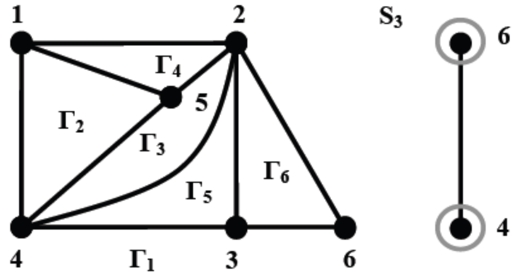


Множество допустимых граней для сегмента Г**(S3) = {**Г**1,** Г**5}**.

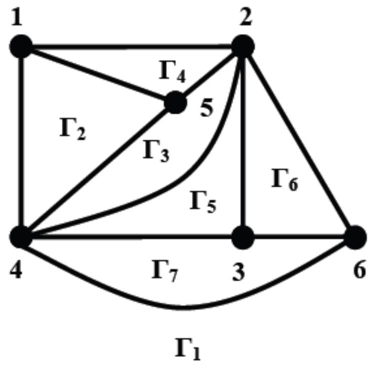
8) Выбираем грань Г**1** и α -цепь = **{3, 6, 2}** , укладываем его в допустимой грани и получаем новую текущую частичную укладку.



9) Для новой текущей частичной укладки находим множество граней и сегментов. Для сегмента **S3** множество допустимых граней составляет: Г**(S3)** = **{**Г**1}**. Заключаем сегмент **S3** до допустимой грани Г**1**.



10) Получаем новую текущую плоскую укладку. Множество сегментов пустая, следовательно, алгоритм закончил работу. Входной граф -планарный и построена его плоская укладка.



Характеристики не планарных графов

Число скрещиваний графа **G** − это min число пересечений двух ребер при изображении графа **G** на плоскости (обозначают **Cr(G)**).
Число скрещиваний равно 0, если граф планарен.

Искаженность G − это минимальное число ребер, удаление которых приводит к планарному графу (обозначают Sk(G)).

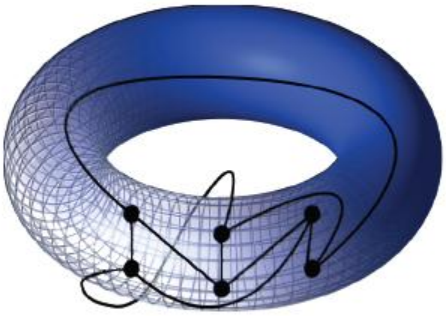
Толщина G − это минимальное число его планарных подграфов, объединение которых дает исходный граф **G** (обозначают **t(G)**).

Род графа G − это минимальное число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы можно было уложить граф **G** без пересечений, самопересечений ребер.

Непланарный граф, укладывающийся на торе без пересечений и самопересечений ребер называются **тороидальными**, род такого графа равен 1.

К тороидальным графам относят графы $\mathbf{K_5}$ **,** $\mathbf{K_7}$ **,** $\mathbf{K_{3,3}}$ **,** $\mathbf{K_{4,4}}$.

Пример укладывания графа $\mathbf{K_{3,3}}$ на торе:



Задание к лабораторной работе

Исходные данные граф **G:GV(13, {5, 6})** .

1. Определить, является ли исходный граф **G** планарным или непланарным, используя критерий Понтрягина-Куратовского или Вагнера. Найти подграф **G**, гомеоморфный $\mathbf{K_5}$ или $\mathbf{K_{3,3}}$ по критерию Понтрягина-Куратовского или подграф, стягиваемый к $\mathbf{K_5}$ или к $\mathbf{K_{3,3}}$ по критерию Вагнера.

2. Если исходный граф планарен, обозначить его **G1**.

3. Если исходный граф непланарен, обозначить его **G2** .

4. Если исходный граф был планарен, добавить минимальное число ребер до непланарности и обозначить полученный непланарный граф **G2** .

5. Если исходный граф был непланарен, удалить минимальное число ребер и обозначить полученный планарный граф **G1**.

6. Количество добавляемых (удаляемых) при преобразованиях графа ребер должно быть обосновано.

7. Построить плоскую укладку графа **G1**, используя алгоритм γ. Продемонстрировать пошаговое выполнение алгоритма γ **.**

8. Для непланарного графа **G2** найти род, толщину, искаженность и число скрещиваний.

Контрольные вопросы

1. Какой граф называется плоским, планарным?

2. Что такое жорданова кривая? Сформулировать теорему Жордано и следствие из нее.

3. Дать определение грани и границы грани.

4. Какие грани называют внутренними? внешними?

5. Сформулировать теорему Эйлера для плоского графа.

6. Операции подразбиения ребер и стягивания вершин. Гомеоморфные графы.

7. Сформулировать критерии планарности Понтрягина - Куратовского и Вагнера.

8. Алгоритм плоской укладки графа. Определение сегмента, контактной вершины, α − цепи, допустимой грани.

9. Характеристики непланарных графов, род, толщина, число скрещиваний и искаженность.

Лабораторная работа № 15

Раскраска графов

Цель работы: приобретение практических навыков определения хроматического числа и индекса для неорграфов, построении оптимальной и субоптимальной правильной вершинной и реберной раскраски графов.

Теоретическая справка

Вершинная раскраска графов

G = (**V**, **E**) − простой неориентированный граф, **k** − натуральное число.

Вершинной k-раскраской или просто **k-раскраской** графа **G** называется произвольная функция **f,** отображающая множество вершин графа **G** в некоторое **k**-элементное множество:

$$\mathbf{f}\colon \mathbf{VG} \to \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}\} = \mathbf{A}.$$

Если для некоторой вершины **v** графа **G: f(v)=i,** то говорят что вершина **v** **раскрашена в i-тый цвет**.

Раскраска называется **правильной**, если **f(u)** ≠ **f(v)** для любых смежных вершин **u** и **v** графа **G** (или концевые вершины любого ребра окрашены в разные цвета).

Граф, для которого существует правильная **k**-раскраска, называется **k-раскрашиваемым**.

Хроматическое число графа G − это минимальное число красок, при котором граф имеет правильную раскраску.

Если хроматическое число равно **k**, то граф называется **k-хроматическим** (обозначают χ**(G) = k**).

Правильную **k**-раскраску графа **G** можно рассматривать как разбиение множества вершин графа **G** на не более чем **k** непустых множеств, которые называются **цветными классами.**

Графы с малым хроматическим числом

Лемма о 2-х раскрашиваемых графах

Пусть $\mathbf{G}$ – простой неориентированный граф:
1) $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ – пустой граф, $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{O}_p) = \mathbf{1}.$
2) $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ – непустой двудольный граф.
Если непустой граф является деревом, то $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{2}.$

Лемма о раскраске циклов

Хроматическое число всякого цикла, содержащего $\mathbf{p}$ вершин, равно 2, если $\mathbf{p}$ – четно, и 3, если $\mathbf{p}$ – нечетно.
Если граф $\mathbf{G}$ содержит цикл нечетной длины , то $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) > \mathbf{2}.$

Лемма о раскраске полного графа

Хроматическое число полного графа $\mathbf{K_p}$ равно $\mathbf{p}.$
Если граф $\mathbf{G}$ содержит подграф изоморфный графу $\mathbf{K_p}$,
то $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \mathbf{p}.$

Граф, у которого χ **= 2** , называются **бихроматическим**.

Теорема Кёнига

Непустой граф является **бихроматическим** тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Следствие 1. Любое дерево бихроматично.
Следствие 2. Любой двудольный граф бихроматичен.

Оценки хроматического числа графа

Под **нижними оценками хроматического числа** понимают неравенства вида: $\boldsymbol{\chi}\ \mathbf{G} \geq \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ − некоторая константа, вычисляемая по графу $\mathbf{G}$, а под **верхними** оценками − неравенства вида $\boldsymbol{\chi}\ \mathbf{G} \leq \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ имеет тот же смысл.

Первая нижняя оценка

Для произвольного графа $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), |\mathbf{V}| = \mathbf{p}\ , |\mathbf{E}| = \boldsymbol{q}$
справедливо неравенство $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{p}^2 - 2\boldsymbol{q}}$

Хроматическое число и плотность графа или вторая нижняя оценка

Для произвольного графа $\mathbf{G}$ справедливо неравенство
$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G})$, где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G})$ – плотность графа или кликовое число

Теорема о графах без треугольников

Для произвольного $\mathbf{k} \geq \mathbf{2}$ существует простой связный граф $\mathbf{G_k}$ такой, что справедливо $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G_k}) = \mathbf{2}$ и $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{k}$

Хроматическое число и число независимости графа или третья нижняя оценка

Для произвольного графа $\mathbf{G}$ справедливо неравенство:
$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G})}$, где $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G})$ – число независимости графа

Верхние оценки хроматического числа

Для произвольного графа $\mathbf{G}$ справедливо неравенство:
$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \leq \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G}) + \mathbf{1}$, где $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G})$ – максимум из степеней вершин графа

Теорема Брукса

Для связного неполного графа $\mathbf{G}$ при условии, что $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G}) \geq \mathbf{3}$, справедливо неравенство: $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \leq \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G})$.

Замечание о компонентах связности

Хроматическое число графа равно максимуму из хроматических чисел его компонент связности

Гипотеза о четырех красках

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 4

Теорема Хивуда

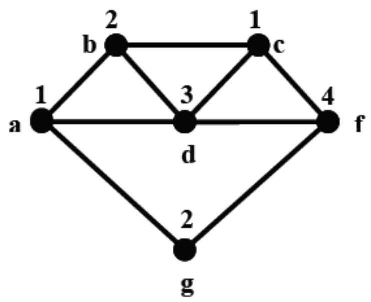
Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 5

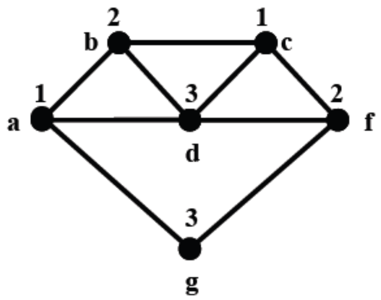
Алгоритм последовательной раскраски (субоптимальный)

1. Произвольной вершине графа **G** приписываем цвет 1.
2. Пусть раскрашены **i** вершин графа **G** в цвета от **1** до **k**, где $\mathbf{k} \leq \mathbf{i}$. Произвольной неокрашенной вершине $\mathbf{v}_{\mathbf{i+1}}$ приписываем минимальный цвет, неиспользованный при раскраске смежных с ней вершин. Алгоритм последовательной раскраски зависит от способа выбора вершин на обслуживание.

Например.

В первом случае последовательность выбора вершин графа для раскраски такова: **(a, b, g, d, c, f)** . Число красок, использованных для правильной раскраски вершин графа, равно 4.





Во втором последовательность выбора вершин графа для раскраски: **(a, b, d, c, f, g)**. Число красок, использованных для правильной раскраски вершин графа, равно 3.

Последовательная раскраска вершин графа **G=(V,E), |V|=p, |E|=q,** с матрицей $A_G = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1,p},$ смежности основанная на методах переупорядочения вершин.

1. «Наибольшие − первыми» или НП-упорядочение

Упорядочиваем вершины графа **G** в порядке невозрастания их степеней **deg**(v_i)**.** Раскрашиваем вершины графа **G** по методу последовательной раскраски, выбирая вершины из этого списка. Если две вершины имеют одинаковые степени, то вычисляем двухшаговые степени вершины **deg2** (v_i) , как число маршрутов длины 2, исходящих из вершины v_i и так далее. Рекуррентная формула для определения **k** − шаговой степени вершины графа по матрице смежности:

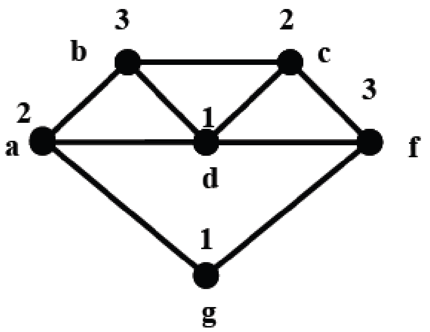
$$\deg^k(v_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \times \deg^{k-1}(v_j), \; i = \overline{1,p}.$$

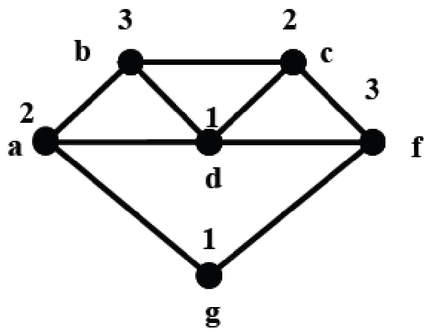
2. «Последними − наименьшие» или ПН-упорядочение

Выбираем в исходном графе вершину с наименьшей степенью и присваиваем ей номер **p** . Удаляем эту вершину со всеми инцидентными ей ребрами. В полученном графе находим вершину с наименьшей степенью и присваиваем ей номер **p −1** и т. д.

Например:

НП-упорядочение **(d, a, b, c, f, g)** ПН-упорядочение **(d, c, f, b, a, g)**





Раскраска ребер или реберная раскраска

Пусть есть **G = (V, E), |V| = p, |E| = q**.

Реберной k-раскраской графа **G** называется некоторая функция ϕ , задающая отображение множества ребер графа в некоторое **k-**элементное множество, т.е. $\phi : E \to A = \{a_1, ..., a_k\}$.

Если ϕ**(e)** = **c**, то говорят, что ребро **e** окрашено в цвет **c.**

Реберная раскраска называется **правильной**, если смежные ребра окрашены в разные цвета.

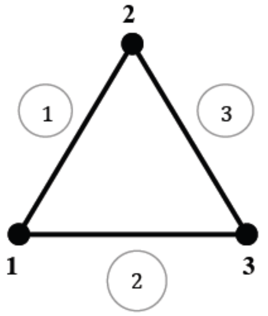
Граф **G** называется **k-раскрашиваемым**, если существует правильная **k-**раскраска ребер.

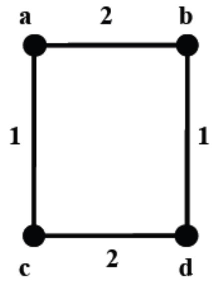
Минимальное число **k**, при котором существует правильная реберная **k**-раскраска называется **реберным хроматическим числом** или **хроматическим индексом**.

Граф **G** называется **реберно k-хроматическим**, если хроматический индекс равен **k:** $\chi'(G) = k$.

Множество ребер, окрашенных в определенный цвет, называют **реберным цветным классом**.

K3

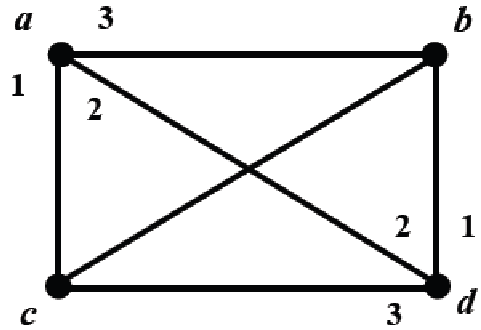




Хроматический индекс для полного графа с четным числом вершин равен: $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$ и с нечетным числом вершин $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$.

Пример можно проиллюстрировать:

K4



Задание к лабораторной работе

Исходные данные граф **G: G(13, {5, 6}).**

1) Планарный граф из лабораторной работы №6 обозначить **G1** (исходный или преобразованный), а непланарный − **G2**.

2) Вычислить и проанализировать для планарного и непланарного графов верхние и нижние оценки хроматического числа.

3) Последовательно раскрасить графы **G1** и **G2,** используя алгоритм последовательной раскраски, модификации алгоритма с НП- и ПН-упорядочением вершин.

4) Найти хроматическое число и хроматический индекс графов **G1** и **G2**. Ответ обосновать.

5) Сравнить хроматическое число графов **G1** и **G2** с оценками, полученными аналитически в задании 2 и в результате применения трех алгоритмов, в задании 3. Проанализировать полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Вершинная раскраска неориентированных графов
2. Какая раскраска называется правильной?
3. Для каких графов могут быть применены алгоритмы раскраски?
4. Какой граф называют правильно раскрашенным?
5. Что называется хроматическим числом графа?
6. Нижние оценки хроматического числа графа.
7. Верхние оценки хроматического числа графа.
8. Определение цветного класса.
9. Сформулировать теорему Кенига.
10. Сформулировать гипотезу четырех и пяти красок.
11. Алгоритм последовательной вершинной раскраски графов.
12. Последовательные методы раскрашивания, основанные на упорядочении множества вершин. НП- и ПН-упорядочение вершин.
13. k-шаговая степень вершины и рекуррентная формула ее вычисления.
14. Реберная раскраска или раскраска ребер.
15. Правильная реберная раскраска, реберный цветной класс.

16. Определение реберного хроматического числа или хроматического индекса.
17. Хроматический индекс полных графов.

Лабораторная работа № 16

Способы задания конечных автоматов

Цель работы: изучение способов задания цифровых автоматов. Получение практических навыков в использовании алгоритмов абстрактного синтеза цифровых автоматов.

Теоретическая справка

Математической моделью конечного цифрового автомата является *абстрактный автомат,* определяемый шестью компонентами:

$$S = \{A, Z, W, \delta, \lambda, a_1\},$$

где 1) $A = \{a_1, ..., a_m, ..., a_M\}$ - множество состояний (алфавит состояний);

2) $Z = \{z_1, ..., z_f, ..., z_F\}$ - множество входных сигналов (входной алфавит);

3) $W = \{w_1, ..., w_g, ..., w_G\}$ - множество выходных сигналов (выходной алфавит);

4) функция переходов δ определяет правила перехода автомата из одного состояния в другое в зависимости от значений входных сигналов и состояния автомата: $\delta(a_m, z_f)$;

5) функция выходов λ определяет правила формирования выходных сигналов автомата: $\lambda(a_m, z_f)$;

6) a_1 - начальное состояние автомата ($a_1 \in A$).

Автомат имеет один вход и один выход (рис.1) и работает в некотором идеализированном дискретном времени, принимающим целые неотрицательные значения t = 0, 1, 2, ...

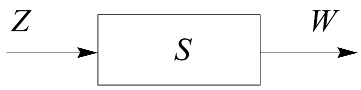


Рис.1. Абстрактный автомат

Если два абстрактных автомата с общим входным и выходным алфавитом индуцируют одно и то же отображение множества слов во входном алфавите во множество слов в выходном алфавите, то такие автоматы называются **эквивалентными.**

На практике наибольшее распространение получили два класса автоматов - *автоматы Мили и Мура*.

Закон функционирования **автомата Мили** задаётся уравнениями

$$a(t+1) = \delta(a(t), z(t));$$

$$w(t) = \lambda\,(a(t),z(t)); \qquad (1)$$
$$a(0) = a_1, \quad t = 0,1,2, \dots .$$

Закон функционирования **автомата Мура** задаётся уравнениями

$$a(t+1) = \delta\,(a(t),z(t));$$
$$w(t) = \lambda\,(a(t)); \qquad (2)$$
$$a(0) = a_1, \quad t = 0,1,2, \dots .$$

Как видно из уравнений (1) и (2) (их принято называть *каноническими*), эти автоматы различаются способом определения выходного сигнала. В автомате Мили функция λ определяет выходной сигнал в зависимости от состояния автомата и входного сигнала в момент времени t, а в автомате Мура накладываются ограничения на функцию λ, заключающиеся в том, что выходной сигнал зависит только от состояния автомата и не зависит от значения входных сигналов.

Важным отличием функционирования этих автоматов является то, что выходные сигналы автомата Мура отстают на один такт от выходных сигналов автомата Мили, эквивалентного ему.

Стандартные автоматные языки

Для задания автоматов общего типа используются *стандартные или автоматные языки,* задающие функции переходов и выходов в явном виде. К ним относятся *таблицы, графы, матрицы переходов и выходов* и их аналитическая интерпретация. Для того, чтобы задать автомат, необходимо описать все компоненты вектора $S = (A, Z, W, \delta, \lambda, a_1)$.

При табличном способе задания автомат Мили описывается с помощью двух таблиц: *таблицы переходов* и *таблицы выходов*. **Таблица переходов** задает функцию δ (табл.1.), **таблица выходов** - функцию λ (табл.2.). Каждому столбцу табл.1 и 2 поставлено в соответствие одно состояние из множества A, каждой строке - один входной сигнал из множества Z. На пересечении столбца a_m и строки z_f в табл.9.1 записывается состояние a_s , в которое должен перейти автомат из состояния a_m под действием входного сигнала z_f , т.е. $a_s = \delta\,(a_m, z_f)$. На пересечении столбца a_m и строки z_f в табл.2 записывается выходной сигнал w_g , выдаваемый автоматом в состоянии a_m при поступлении на его вход сигнала z_f , т.е. $w_g = \lambda(a_m, z_f)$

Таблица 1

	a_1	a_2	a_3	a_4
z_1	a_2	a_2	a_1	a_1
z_2	a_4	a_3	a_4	A_3

Таблица 2

	a_1	a_2	a_3	a_4
z_1	w_1	w_1	w_2	w_4
z_2	w_5	w_3	w_4	w_5

Для указанных таблиц $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}; Z = \{z_1, z_2\}; W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$.

Автомат Мили может быть задан также одной совмещенной таблицей переходов и выходов (табл.9.3), в которой каждый элемент a_s/w_g, записанный на пересечении столбца a_m и строки z_f, определяется следующим образом:

$$a_s = \delta(a_m, z_f); \quad w_g = \lambda(a_m, z_f).$$

Таблица 3

	a_1	a_2	a_3	a_4
z_1	a_2/w_1	a_2/w_1	a_1/w_2	a_1/w_4
z_2	a_4/w_5	a_3/w_3	a_4/w_4	a_3/w_5

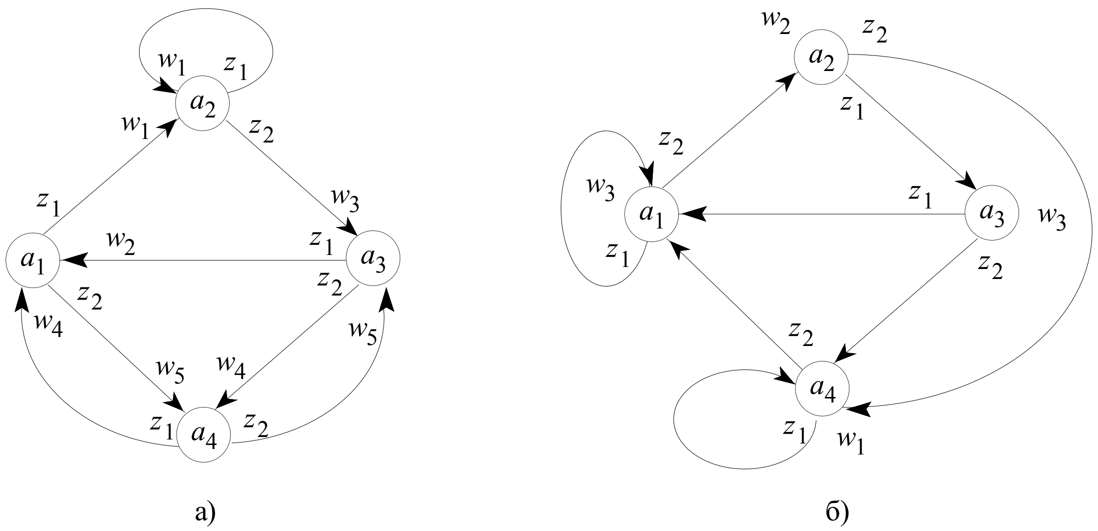
Таблица 4

	w_3	w_2	w_3	w_1
	a_1	a_2	a_3	a_4
z_1	a_1	a_3	a_1	a_4
z_2	a_2	a_4	a_4	a_1

Автомат Мура задается одной отмеченной таблицей переходов (табл.4), в которой каждому столбцу приписаны не только состояния a_m , но еще и выходной сигнал w_g , соответствующий этому состоянию, где $w_g = \lambda(a_m)$. Для табл. 4 $A = \{a_4, a_2, a_3, a_4\}$; $Z = \{z_1, z_2\}$; $W = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Автомат называется *неполностью определенным* или *частичным*, если либо функция δ определена не на всех парах (a_m z_f) $\in A$ x Z, либо функция λ определена не на всех указанных парах в случае автомата Мили и на множестве не всех внутренних состояний для автомата Мура. Для частичных автоматов Мили и Мура в рассмотренных таблицах на месте неопределенных состояний и выходных сигналов ставится прочерк.

Граф автомата - это ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги - переходам между ними. Дуга, направленная из вершины a_m в вершину a_s , задает переход в автомате из состояния a_m в состояние a_s. В начале этой дуги записывается входной сигнал $z_f \in Z$, вызывающий данный переход : $a_s = \delta(a_m, z_f)$. Для графа автомата Мили выходной сигнал $w_g \in W$, формируемый на переходе, записывается в конце дуги, а для автомата Мура - рядом с вершиной a_m, отмеченной символом состояния a_m, в котором он формируется. Если переход в автомате из состояния a_m в состояние a_s производится под действием нескольких входных сигналов, то дуге графа, направленной из a_m в a_s, приписываются все эти входные и соответствующие выходные сигналы. Графы автоматов Мили и Мура, построенные по табл.3 и 4 приведены соответственно на рис.2. а, б.



а) б)

Рис.2. Граф автомата Мили (а) и автомата Мура (б)

Применительно к графу условия однозначности и полной определенности будут заключены в следующем:

- не существует двух ребер с одинаковыми входными пометками, выходящих из одной и той же вершины;
- для всякой вершины a_m и для всякого входного сигнала z_f имеется ребро, помеченное символом z_f, которое выходит из a_m.

При задании графов с большим числом состояний и переходов наглядность теряется, поэтому оказывается предпочтительным задавать этот граф в виде списка - *таблицы переходов*.

Прямая таблица переходов - таблица в которой последовательно перечисляются все переходы сначала из первого состояния, затем из второго и т.д. Табл.5 - прямая таблица переходов автомата Мили, построенная по графу, приведенному на рис.2,а. В ряде случаев оказывается удобным пользоваться **обратной таблицей переходов**, в которой столбцы обозначены точно так же, но сначала записываются все переходы в первое состояние, затем во второе и т.д. Табл.6 - обратная таблица переходов автомата Мура, построенная по графу, приведенному на рис.2,б. Как и граф, таблицы переходов должны удовлетворять условиям однозначности и полноты переходов.

В некоторых случаях для задания автомата используются **матрицы переходов и выходов,** строки и столбцы которой отмечены символами состояний. Если существует переход из a_m под действием z_f в a_s с выдачей w_g, то на пересечении строки a_m и столбца a_s записывается пара z_f w_g. Ясно, что не всякая матрица задает автомат. Как граф и таблица переходов и выходов, она должна удовлетворять условиям однозначности и полноты переходов.

Системы канонических уравнений (СКУ) и системы выходных функций (СВФ) являются аналитической интерпретацией таблиц переходов и выходов или графов автоматов. СКУ определяет функции переходов автомата, а СВФ - функции выходов. Каждое состояние автомата интерпретируется как событие, соответствующее множеству переходов в это состояние:

$$a_s(t+1) = \bigvee_{f,m} z_f(t) \,\&\, a_m(t). \qquad (5)$$

Таблица.5

$a_m(t)$	$z_f(t)$	$a_s(t+1)$	$w_g(t)$
a_1	z_1	a_2	w_1
	z_2	a_4	w_5
a_2	z_1	a_2	w_1
	z_2	a_3	w_3
a_3	z_1	a_1	w_2
	z_2	a_4	w_4
a_4	z_1	a_1	w_4
	z_2	a_3	w_5

Таблица 6

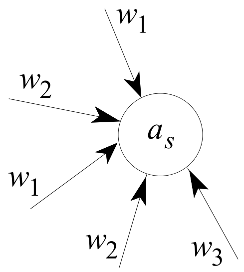
$a_m(t)$	$z_f(t)$	$a_s(t+1)$, $w_g(t+1)$
a_1 a_3 a_4	z_1 z_1 z_2	a_1 , w_3
a_1	z_2	a_2 , w_2
a_2	z_1	a_3 , w_3
a_2 a_3 a_4	z_2 z_2 z_1	a_4 , w_1

Связь между автоматами Мура и Мили

Для любого автомата Мили можно построить эквивалентный ему автомат Мура и, обратно, для любого автомата Мура можно построить эквивалентный ему автомат Мили.

Рассмотрим преобразование автомата Мили в автомат Мура. Пусть задан автомат Мили $S = (A, Z, W, \delta, \lambda, a_1)$, построим автомат Мура $S^{/} = (A^{/}, Z^{/}, W^{/}, \delta^{/}, \lambda^{/}, a_1^{/})$, у которого $Z^{/} = Z$; $W^{/} = W$.

Для определения множества $A^{/}$ необходимо выполнить расщепление состояний автомата Мили, исходя из следующего. Если автомат Мили при переходе в некоторое состояние a_s может выдавать в разные моменты времени один из к выходных сигналов из алфавита W , то такое состояние a_s должно быть расщеплено на $к$ состояний. То есть число элементов в множестве A_s равно числу различных выходных сигналов на дугах автомата S, входящих в состояние a_s : $A_s = \{(a_s, w_1), (a_s, w_2), (a_s, w_3), ..., (a_s, w_k)\}$ (рис.3).



$A_s = \{(a_s, w_1), (a_s, w_2), (a_s, w_3)\}$

Рис.3. Построение множества A_s

Множество состояний автомата $S^{/}$ получим как объединение множеств A_s

$$A^{/} = \bigcup_{S=1}^{M} A_s ,$$

где M - число состояний в автомате Мили S.

Такое расщепление состояний автомата Мили необходимо потому, что все состояния эквивалентного ему автомата Мура должны быть отмечены только одним выходным сигналом из алфавита W.

Функцию переходов $\delta^{/}$ и выходов $\lambda^{/}$ определим следующим образом. Если в автомате Мили S был переход $\delta\,(a_m,\, z_f) = a_s$ и при этом выдавался выходной сигнал $\lambda\,(a_m,\, z_f) = w_g$, то в автомате Мура $S^{/}$ (рис.4) будет переход из множества состояний A_m, порождаемых a_m, в состояние $(a_s,\; w_g)$ под действием того же входного сигнала z_f.

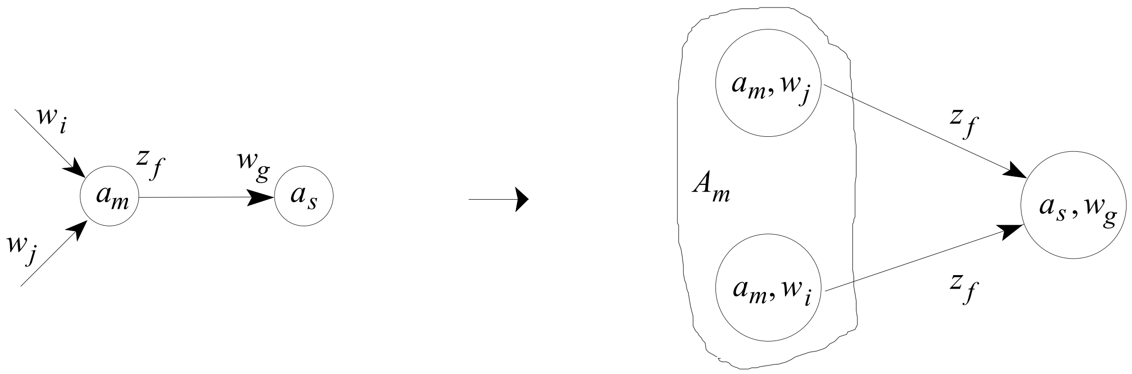


Рис.4. Иллюстрация перехода от автомата Мили к автомату Мура

В качестве начального состояния автомата Мура a_1' можно взять любое из состояний множества A_1, порождаемого начальным состоянием a_1.

Пример. Преобразовать автомат Мили, изображенный на рис.2,а, в автомат Мура.

Решение. Для автомата Мура $Z^{/} = Z = \{z_1, z_2\}$; $W^{/} = W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$.

Для построения множества $A^{/}$ нужно найти множества пар, порождаемых каждым состоянием автомата Мили S. Каждую пару обозначим символами $b_1, b_2, \ldots$:

$$A_1 = \{(a_1, w_2),(a_1, w_4)\} = \{b_1, b_2\}; \qquad A_2 = \{(a_2, w_1)\} = \{b_3\};$$
$$A_3 = \{(a_3, w_3),(a_3, w_5)\} = \{b_4, b_5\}; \quad A_4 = \{(a_4, w_4),(a_4, w_5)\} = \{b_6, b_7\}.$$
$$A^{/} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}.$$

Для определения функции $\lambda^{/}$ с каждым состоянием вида $(a_s,\; w_g)$, представляющим собой пару, отождествим выходной сигнал, являющийся вторым элементом этой пары:

$$\lambda^{/}(b_1) = w_2; \qquad \lambda^{/}(b_2) = \lambda^{/}(b_6) = w_4; \qquad \lambda^{/}(b_3) = w_1;$$
$$\lambda^{/}(b_4) = w_3; \qquad \lambda^{/}(b_5) = \lambda^{/}(b_7) = w_5.$$

Функция $\delta^{/}$ строится следующим образом. Так как в автомате Мили S есть переход из состояния a_1 под действием сигнала z_1 в состояние a_2 с выдачей w_1, то из множества состояний $A_1 = \{b_1,\; b_2\}$, порождаемых a_1 в автомате $S^{/}$ должен быть переход в состояние $(a_2,\, w_1) = b_3$ под действием сигнала z_1. Аналогично из состояний множества $A_1 = \{b_1, b_2\}$ должен быть переход в состояние $(a_4, w_5) = b_7$ под действием сигнала z_2 и т.д. В качестве начального состояния можно выбрать одно из состояний, порождаемых a_1, например b_1. На рис.5 приведен граф автомата Мура $S^{/}$, эквивалентного автомату Мили S.

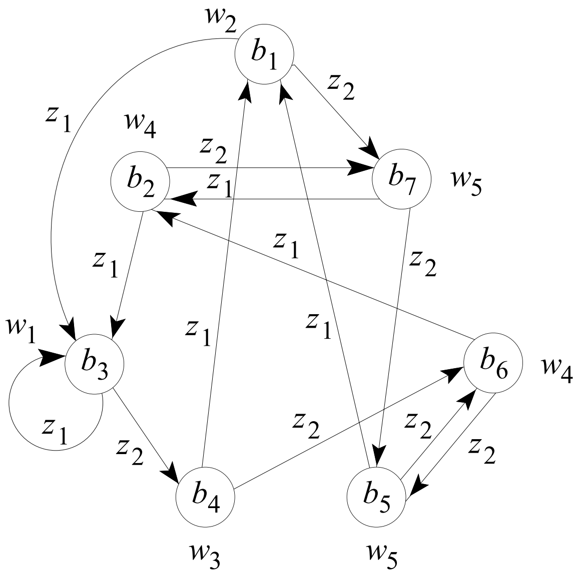


Таблица 7

	w_2	w_4	w_1	w_3	w_5	w_4	w_5
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
z_1	b_3	b_3	b_3	b_1	b_1	b_2	b_2
z_2	b_7	b_7	b_4	b_6	b_6	b_5	b_5

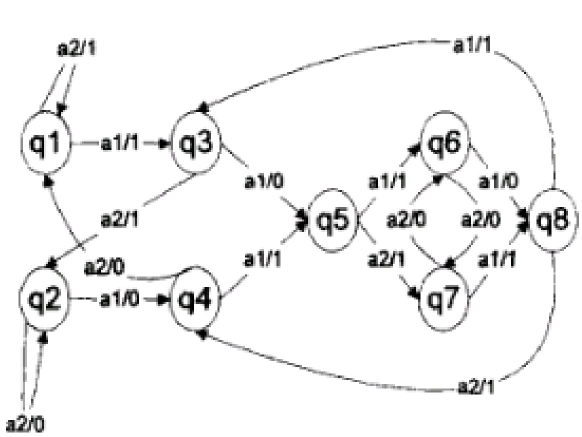
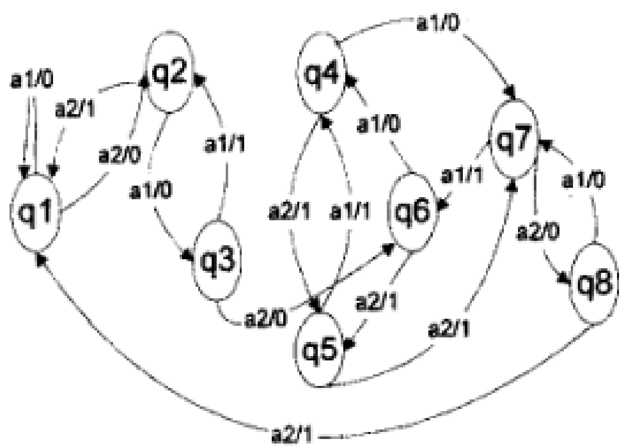
Рис.5. Граф автомата Мура, эквивалентного автомату Мили (рис.2,а)

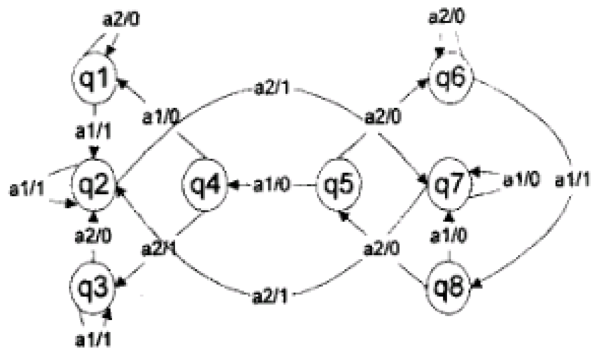
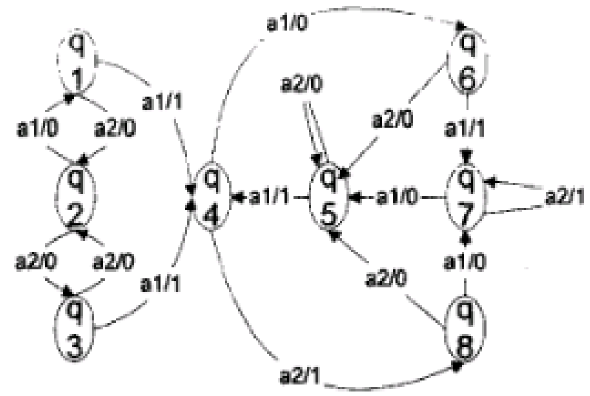
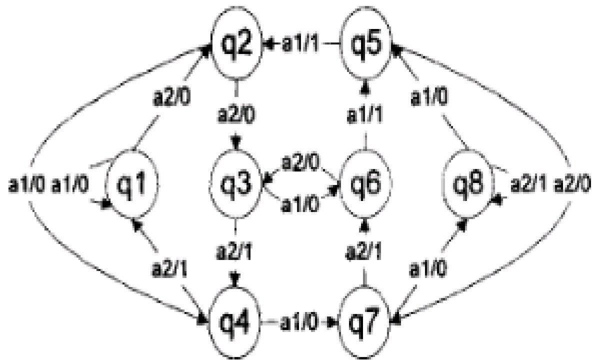
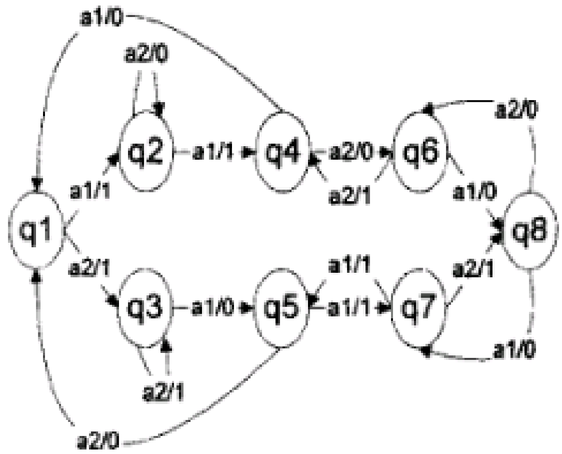
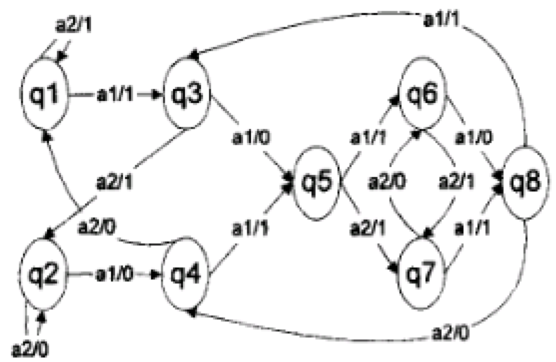
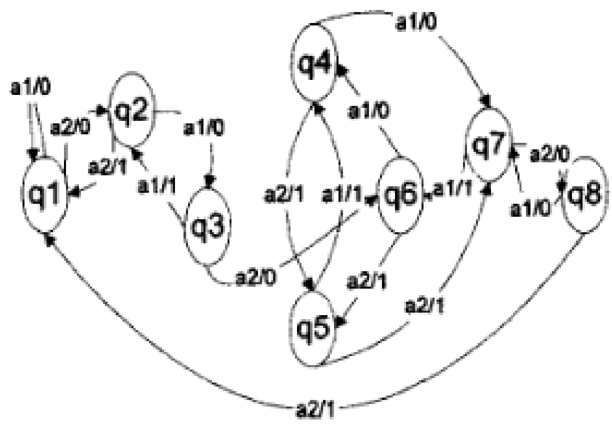
Задание к лабораторной работе

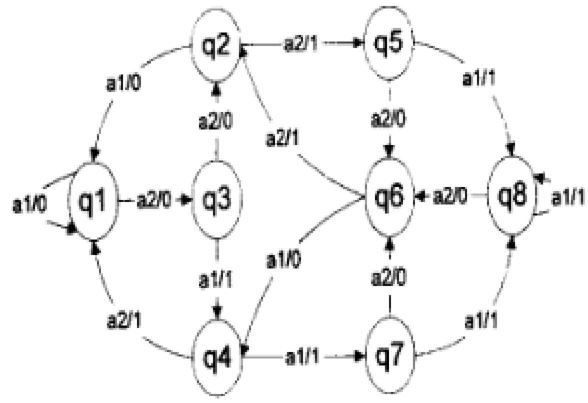
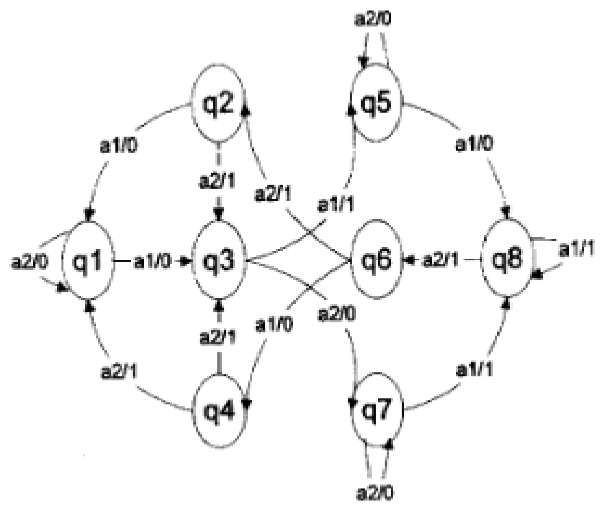
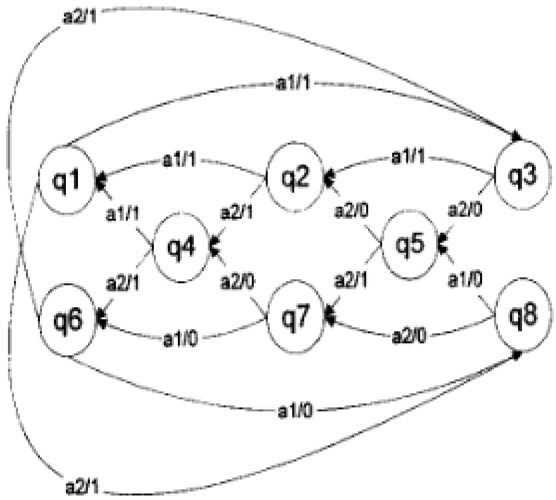
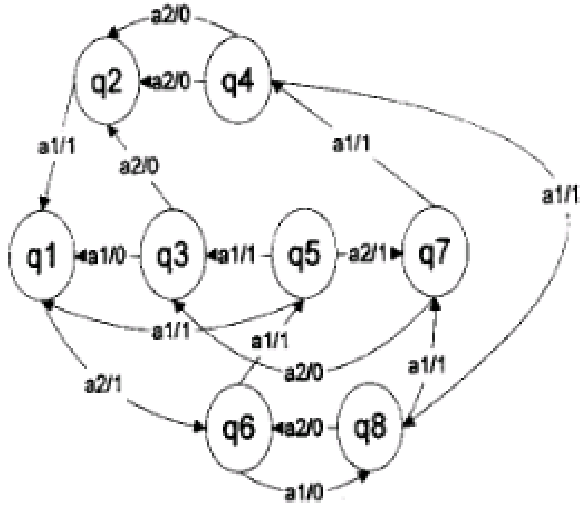
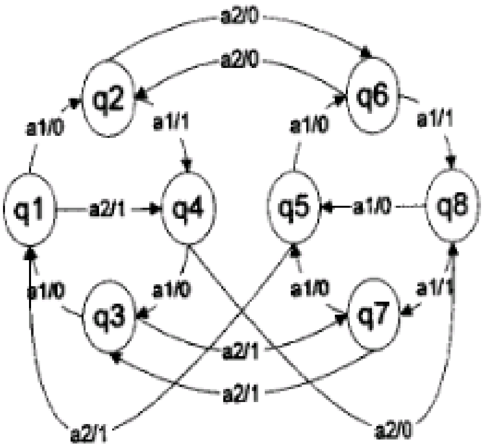
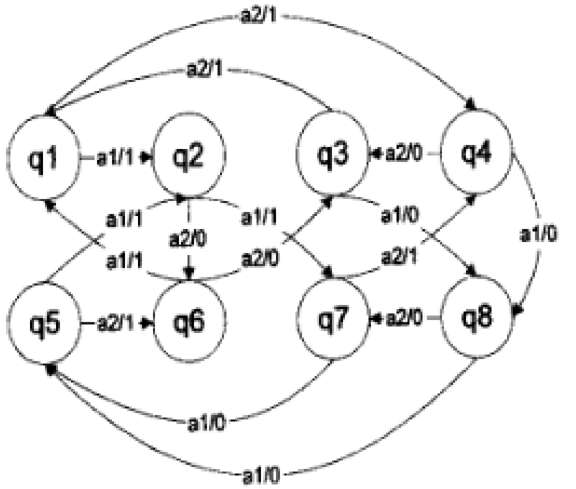
Автомат Мили задан графом. Варианты заданий представлены в таблице 8. Необходимо выполнить следующие действия:

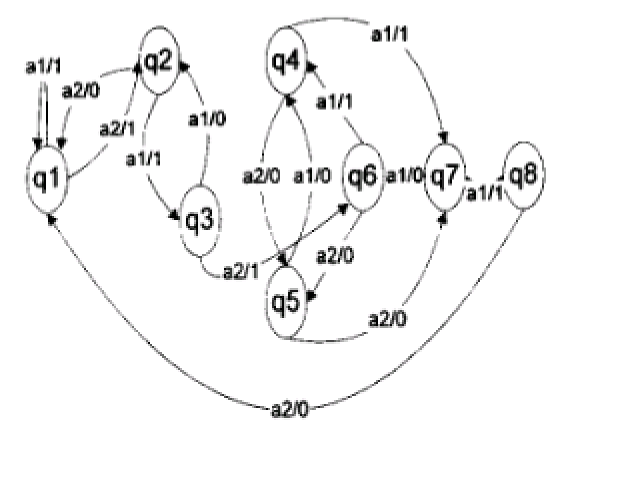
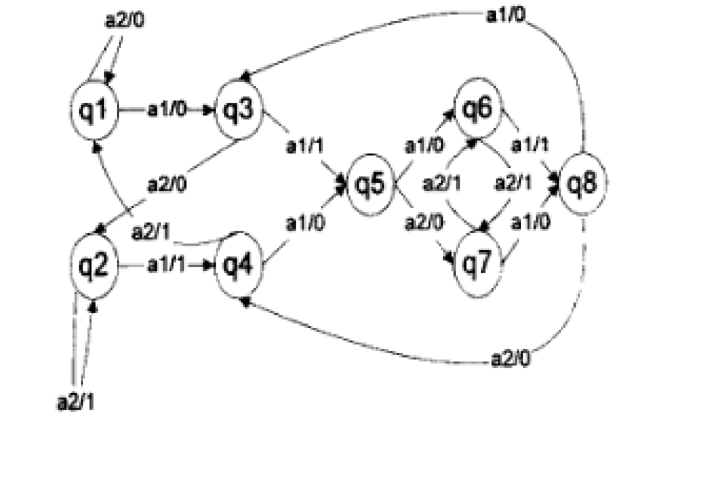
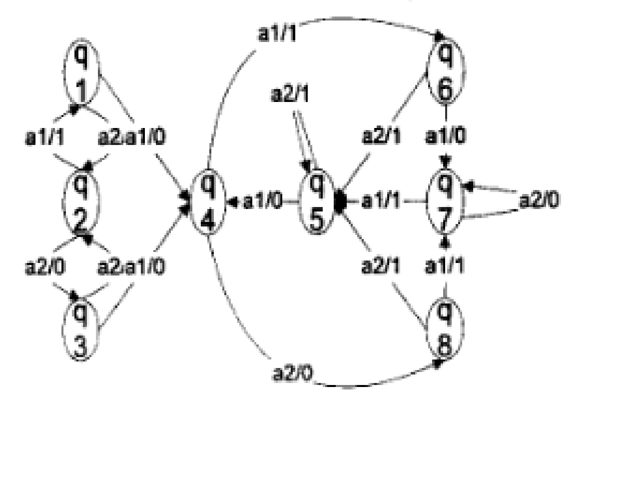
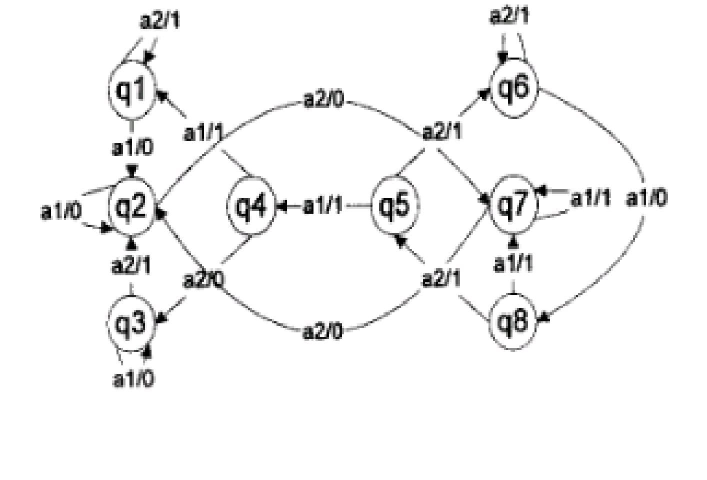
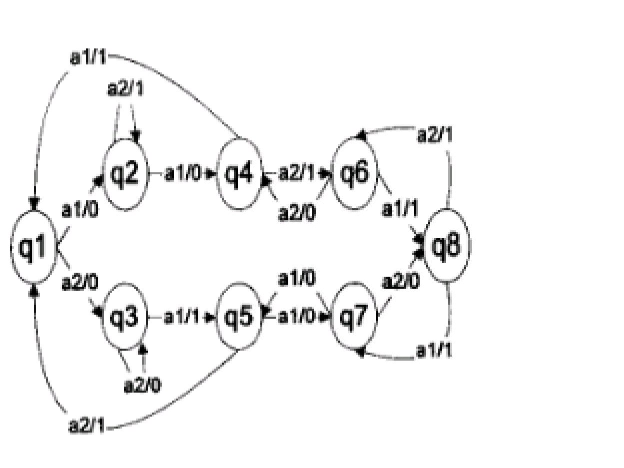
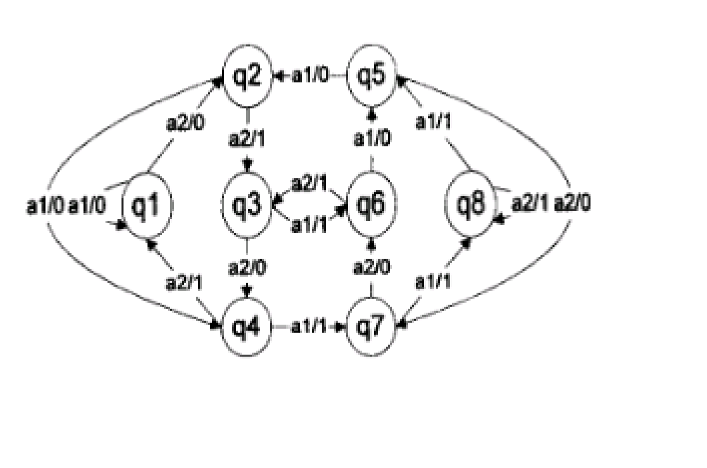
- построить совмещенную таблицу переходов/выходов;
- определить последовательность состояний и выходное слово для произвольного входного слова из 10 символов;
- выполнить графически переход от автомата Мили к автомату Мура.

Таблица 8 Варианты заданий

1		2	

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
</td>
<td>4</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>
</td>
<td>6</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>
</td>
<td>8</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>9</td>
<td>
</td>
<td>10</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>11</td>
<td>
</td>
<td>12</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>13</td>
<td>
</td>
<td>14</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>15</td><td>
</td><td>16</td><td>
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>
</td><td>18</td><td>
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td><td>20</td><td>
</td></tr>
</table>

Контрольные вопросы

1. Дать определение абстрактного автомата.
2. Что значить задать конечный автомат ?
3. Перечислить способы задания автоматов.
4. Описать закон функционирования автомата Мили.
5. Описать закон функционирования автомата Мура.
6. Чем отличается автомат Мили от автомата Мура.
7. Чем отличается автомат Мили от автомата Мура ?
8. Привести пример графического способа задания автомата Мили.

9. Привести пример графического способа задания автомата Мура.
10. Что называется таблицей переходов автомата?
11. Привести пример таблицы выходов автомата Мили.
12. Привести пример таблицы выходов автомата Мура.
13. Что называется отмеченной таблицей переходов и для какого автомата она задается?
14. Проиллюстрировать графически переход от автомата Мура к автомату Мили.
15. Проиллюстрировать графически переход от автомата Мили к автомату Мура

Литература

1. Лекции по теории графов /под ред. Емеличева Е.А./ – М.: Наука, 1990. – 384с.
2. Кристофидес Н. Теория графов : алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432с.
3. Асеев Г. Г., Абрамов О. М., Ситников Д. Э. Дискретная математика: учебник - К. : Кондор, 2008. - 162с.
4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1988. – 455с.
5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Мир, 1980.
6. Шевелев Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие для вузов - СПб. : Лань, 2008. - 592с.
7. Столл Р. Множества.Логика.Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968.
8. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: Энергия,1974. – 268с.
9. Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических вычислительных устройств. – М.: Наука,1980.
10. Тюрин С. Ф. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика: учебное пособие для вузов / С. Ф. Тюрин [и др.]; - М. : Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010. - 384с.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. - 400 с.

Приложение А

Алгоритм генерации варианта

GV (p,X) : A[1:p,1:p],где
p - количество вершин в графе;
X - параметр генерации (множество целых);
A - матрица смежности неориентированного графа.

S = <фамилия>< имя>< отчество>
n (c) - функция - номер буквы в алфавите (1..32)

1. Вычеркнуть из **S** все повторные вхождения букв.

2. Построить $Y = \| y_{ij} \|, \ i,j = 1..p,$

$$y_{ij} = | n(S_i) - n(S_j) |.$$

3. Построить $A = \| a_{ij} \|, \ i,j = 1..p,$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \exists x \in X \mid y_{ij} \bmod x = 0 \\ 0, i = j \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

4. Для каждой изолированной (доминирующей) вершины добавить (удалить) одно ребро. Добавляемое (удаляемое) ребро связывает текущую вершину со следующей (по номеру). Для последней вершины следующая - первая.

Пример реализации GV (7, (2,3)).

1.Строка S = С И Д О Р ~~О~~ В ~~И~~ ~~В~~ А Н П Е Т ~~Р~~ ~~О~~ ~~В~~ ~~И~~ Ч.
После вычеркивания повторных вхождений букв
S = С И Д О Р В А Н П Е Т Ч.

Таблица для функции n (S)

А - 1	**Д** - 5	**З** - 9	**Л** - 13	**П** - 17	**У** - 21	**Ч** - 25	**Ь** - 29
Б - 2	**Е** - 6	**И** - 10	**М** - 14	**Р** - 18	**Ф** - 22	**Ш** - 26	**Э** - 30
В - 3	**Ё** - 7	**Й** - 11	**Н** - 15	**С** - 19	**Х** - 23	**Щ** - 27	**Ю** - 31
Г - 4	**Ж** - 8	**К** - 12	**О** - 16	**Т** - 20	**Ц** - 24	**Ы** - 28	**Я** - 32

S	С	И	Д	О	Р	В	А	Н	П	Е	Т	Ч
$N(s_i)$	19	10	5	16	18	3	1	15	17	6	20	25

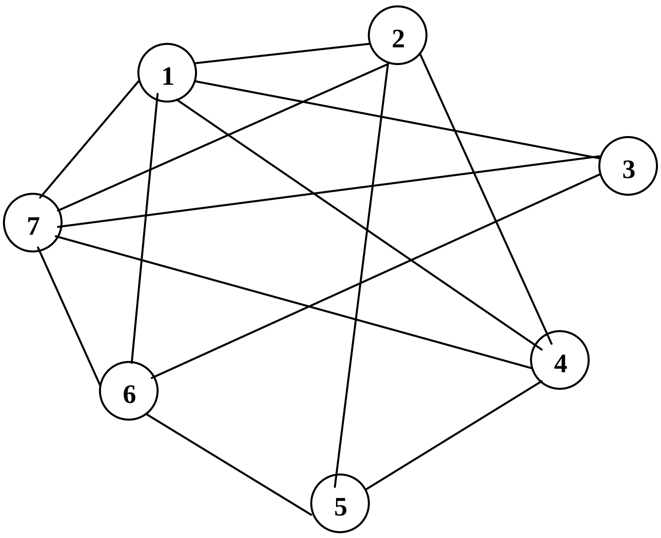
Y =

	19	10	5	16	18	3	1
19	0	9	14	3	1	16	18
10	9	0	5	6	8	7	9
5	14	5	0	11	13	2	4
16	3	6	11	0	2	13	15
18	1	8	13	2	0	15	17
3	16	7	2	13	15	0	2
1	18	9	4	15	17	2	0

A =

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	1
3	1	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	1	1	1	1	0	1	0

G1 :



СОДЕРЖАНИЕ