

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

**КАФЕДРА «МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ ЗАВОДОВ ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ»
ИМ. ПРОФ. СЕДУША В.Я.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по дисциплине базовой части

математического и естественно-научного цикла

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

для студентов всех форм обучения

направления подготовки 15.03.02

«Технологические машины и оборудование»

**Донецк
ДОННТУ
2017**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

**КАФЕДРА «МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ ЗАВОДОВ ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ»
ИМ. ПРОФ. СЕДУША В.Я.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по дисциплине базовой части

математического и естественно-научного цикла

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

для студентов всех форм обучения

направления подготовки 15.03.02

«Технологические машины и оборудование»

Рассмотрены на заседании
кафедры «Механическое оборудование
заводов черной металлургии»
им. проф. Седуша В.Я.
Протокол № 11 от 03.04.2017 г.

Утверждены на заседании
учебно-издательского совета ДОННТУ
Протокол № ___ от __.__. 20__ г.

Донецк
ДОННТУ
2017

УДК 531 (075.8)

Методические указания к проведению практических занятий по дисциплине базовой части математического и естественно-научного цикла «Теоретическая механика» для студентов всех форм обучения направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» / сост.: В. А. Сидоров, М. Ю. Ткачев, Е. В. Ошовская. – Донецк : ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», 2017. – 51 с.

Приведен комплект задач с ответами, которые должны быть решены студентами ускоренной формы обучения на практических занятиях при изучении всех разделов курса «Теоретическая механика». Они могут быть использованы также при подготовке к экзаменам студентов (бакалавров) всех форм обучения.

Составители: Сидоров В.А., к.т.н., профессор кафедры «Механическое оборудование заводов черной металлургии» им. проф. Седуша В.Я., Ткачев М.Ю., ассистент кафедры «Механическое оборудование заводов черной металлургии» им. проф. Седуша В.Я., Ошовская Е.В., к.т.н., доцент кафедры «Механическое оборудование заводов черной металлургии» им. проф. Седуша В.Я.

Рецензенты: д.т.н., профессор А.П. Кононенко
к.т.н., профессор В.Н. Ульяницкий

Ответственный за выпуск:
заведующий кафедрой, д. т. н., профессор С. П. Еронько

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА	6
1.1. Силы, действующие по одной прямой	6
1.2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке	7
1.3. Параллельные силы	9
1.4. Произвольная плоская система сил	13
1.5. Силы трения	15
1.6. Равновесие произвольной системы сил	18
РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА	21
2.1. Кинематика точки	21
2.2. Простейшие движения твердого тела	23
2.3. Плоское движение твердого тела	25
2.4. Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку	27
2.5. Сложное движение точки	30
2.6. Сложное движение твердого тела	32
РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА	35
3.1. Динамика материальной точки	35
3.2. Динамика системы материальных точек	37
3.3. Теорема о движении центра масс материальной системы	39
3.4. Теорема об изменении главного момента количества движения материальной системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	42
3.5. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы	45
3.6. Аналитическая механика	48
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	50

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания составлены преподавателями кафедры «Механическое оборудование заводов черной металлургии» им. проф. Седуша В.Я. ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» и предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Теоретическая механика» со студентами всех форм обучения специальности 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование». Материалы сгруппированы и относятся к трем основным разделам курса: «Статика», «Кинематика», «Динамика». Их рассмотрение предусматривает проведение 6 практических занятий по каждому из разделов, в ходе которых рекомендуется решать, как правило, по 5 задач, подобранных в соответствии с предметной областью подготовки инженеров-механиков. В то же время выбор из рекомендуемого перечня задач может быть осуществлен на основании анализа остаточного уровня знаний студентов. Нерассмотренные в ходе занятия задачи могут выступать в качестве домашнего задания.

В ходе разработки указаний были использованы источники, в которых приведены задачи, позволяющие студентам при их рассмотрении приобретать навыки применения общих правил и теорем к разрешению частных практических вопросов, а также осуществлять подготовку к выполнению индивидуального задания.

Условия задач и правильные ответы к ним содержат физические величины, единицы измерения которых приведены в Международная система единиц (СИ).

Номер задачи состоит из 3-х цифр, первая из которых означает номер рассматриваемого раздела, вторая – занятия по определенной теме в разделе, третья – задачи на занятии.

Использование настоящих методических указаний поможет освоить практическое применение методов одной из основных фундаментальных дисциплин – теоретической механики.

РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА

1.1. Силы, действующие по одной прямой

1.1.1. Буксир тянет три баржи различных размеров, следующие одна за другой. Сила тяги винта буксира в данный момент равна 18 кН. Сопротивление воды движению буксира равно 6 кН; сопротивление воды движению первой баржи – 6 кН, второй баржи – 4 кН и третьей – 2 кН. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает безопасно растягивающую силу в 2 кН. Сколько канатов надо протянуть от буксира к первой барже, от первой ко второй и от второй к третьей, если движение – прямолинейное и равномерное [1]?

Ответ: 6, 3 и 1 канат.

1.1.2. На дне шахты находится человек веса 640 Н; посредством каната, перекинутого через неподвижный блок, человек удерживает груз в 480 Н. 1) Какое давление оказывает человек на дно шахты? 2) Какой наибольший груз он может удержать с помощью каната?

Ответ: 1) 160 Н; 2) 640 Н.

1.1.3. Два груза, в 10 Н и 5 Н, висят на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем больший груз висит ниже меньшего. Каково натяжение веревки, если верхний конец ее прикреплен к неподвижной точке?

Ответ: 10 Н и 15 Н.

1.1.4. Поезд идет по прямолинейному горизонтальному пути с постоянной скоростью; вес поезда, не считая электровоза, $12 \cdot 10^3$ кН. Какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Ответ: 60 кН.

1.1.5. Пассажирский поезд состоит из электровоза, багажного вагона веса 400 кН и 10 пассажирских вагонов веса 500 кН каждый. С какой силой будут натянуты вагонные стяжки и какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 его веса? При решении задачи принять, что сопро-

тивление движению распределяется между составом поезда пропорционально весу и что движение поезда равномерное.

Ответ: Сила тяги электровоза 27 кН, $T_{11} = 2,5$ кН, $T_{10} = 2 \cdot 2,5$ кН и т.д. (нижний индекс означает номер вагона, начиная от электровоза).

1.2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

1.2.1. На двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостях AB и BC лежит однородный шар O массой 6 кг (рис. 1). Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляет с горизонтом угол 60° [1-5].

Ответ: $N_D = 5,2 \cdot g$ Н; $N_E = 3 \cdot g$ Н.

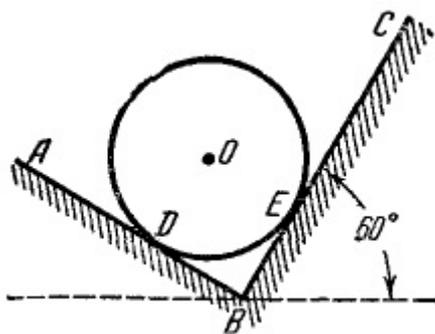


Рисунок 1 – К задаче 1.2.1

1.2.2. Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r ; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна (рис. 2). Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь.

Ответ: $T = P \frac{l}{d+r}$; $Q = P \frac{r}{d+r}$.

1.2.3. Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса

BC , образующего с ним угол 30° (рис. 3). Определить величину и направление реакции R шарнира, если известно, что масса стержня равна 2 кг .

Ответ: $R = 1 \cdot g \text{ Н}$; угол $(R, AC) = 60^\circ$.

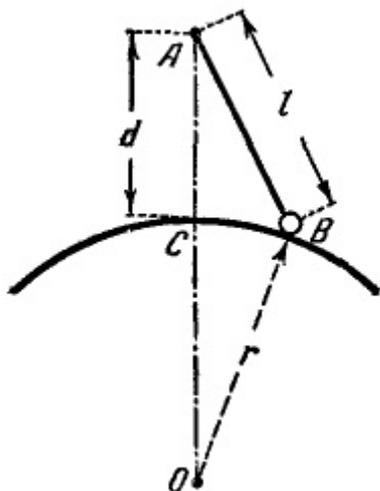


Рисунок 2 – К задаче 1.2.2

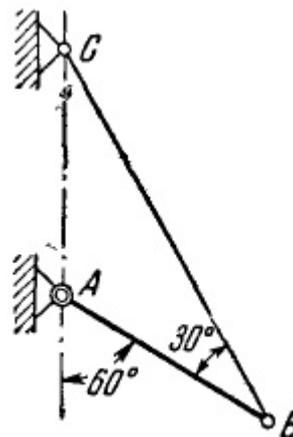


Рисунок 3 – К задаче 1.2.3

1.2.4. Балка AB шарнирно закреплена на опоре A , у конца B она положена на катки (рис. 4). В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P = 2 \cdot 10^3 \cdot g \text{ Н}$. Определить реакции опор для случаев а и взяв размеры с чертежей и пренебрегая весом балки.

Ответ: а) $R_A = 1,58 \cdot g \text{ кН}$; $R_B = 0,71 \cdot g \text{ кН}$; б) $R_A = 2,24 \cdot g \text{ кН}$; $R_B = 1 \cdot g \text{ кН}$.

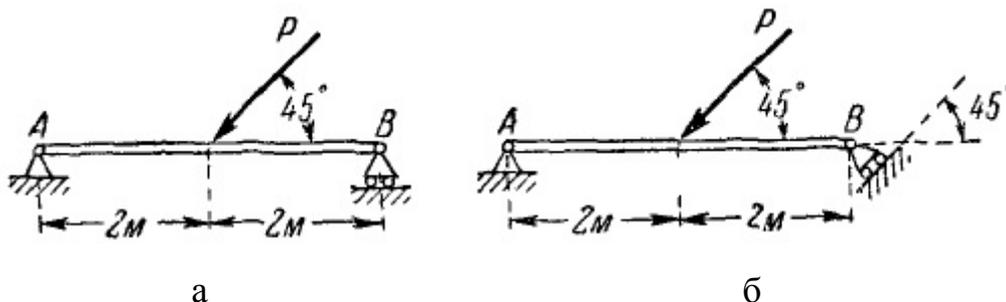


Рисунок 4 – К задаче 1.2.4

1.2.5. Для рамы, изображенной на рис. 5, определить опорные реакции R_A и R_D , возникающие при действии горизонтальной силы P , приложенной в точке B . Весом рамы пренебречь.

Ответ: $R_A = P \frac{\sqrt{5}}{2}$; $R_D = \frac{P}{2}$.

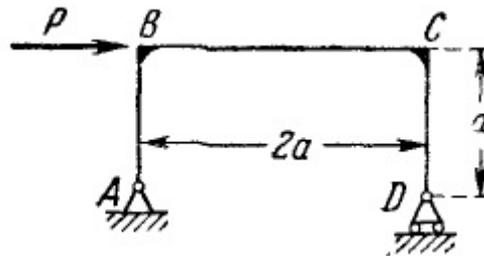


Рисунок 5 – К задаче 1.2.5

1.3. Параллельные силы

1.3.1. К стержню AB , подвешенному на двух параллельных веревках AE и BD , подвешен к точке C груз весом $G = 80$ Н (рис. 6). Определить натяжения веревок, если $AC = 30$ см и $BC = 50$ см, Силой тяжести стержня пренебречь [6-10].

Ответ: $T_A = 50$ Н; $T_B = 30$ Н.

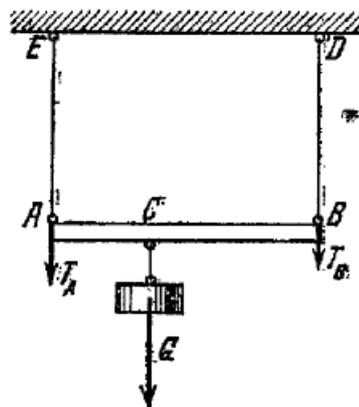


Рисунок 6 – К задаче 1.3.1

1.3.2. К балке, лежащей на стойках A и B (рис. 7), требуется подвесить груз $G = 30$ кН. Расстояние между стойками $l = 6$ м. В какой точке C нужно подвесить груз, чтобы нагрузка на менее прочную стойку A не превышала 6 кН?

Ответ: $x = 4,8$ м.

1.3.3. Силу $F = 300$ Н разложить на две параллельные составляющие F_1 и F_2 , причем одна из них, $F_1 = 420$ Н, направлена противоположно силе F и ее линия действия проходит на расстоянии $l = 6$ м от линии действия данной силы (рис. 8).

Ответ: $F_2 = 720$ Н; $x = 3,5$ м.

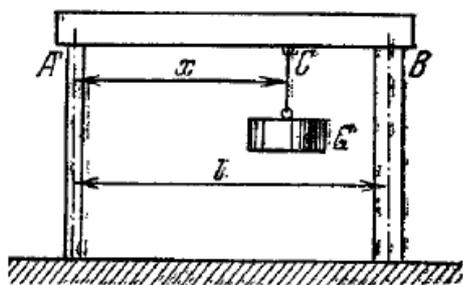


Рисунок 7 – К задаче 1.3.2

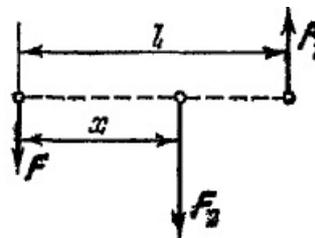


Рисунок 8 – К задаче 1.3.3

1.3.4. Найти величины давлений мостового крана AB на рельсы в зависимости от положения тележки C , на которой укреплена лебедка (рис. 9). Положение тележки определить расстоянием ее середины от левого рельса в долях общей длины моста. Масса моста $P = 6$ т, тележки с поднимаемым грузом – $P_1 = 4$ т [5].

Ответ: $F_A = (7 - 4n)g$ Н; $F_B = (3 + 4n)g$ Н, где $n = AC/AB$.

1.3.5. Горизонтальная балка заделана одним концом в стену, а на другом конце поддерживает подшипник вала (рис. 10). От веса вала, шкивов и подшипника балка испытывает вертикальную нагрузку Q , равную $120 \cdot g$ Н. Пренебрегая весом балки и считая, что нагрузка Q действует на расстоянии $a = 750$ мм от стены, определить реакции заделки.

Ответ: Реакция $R = 120 \cdot g$ Н; реактивный момент $M = 90 \cdot g$ Н·м.

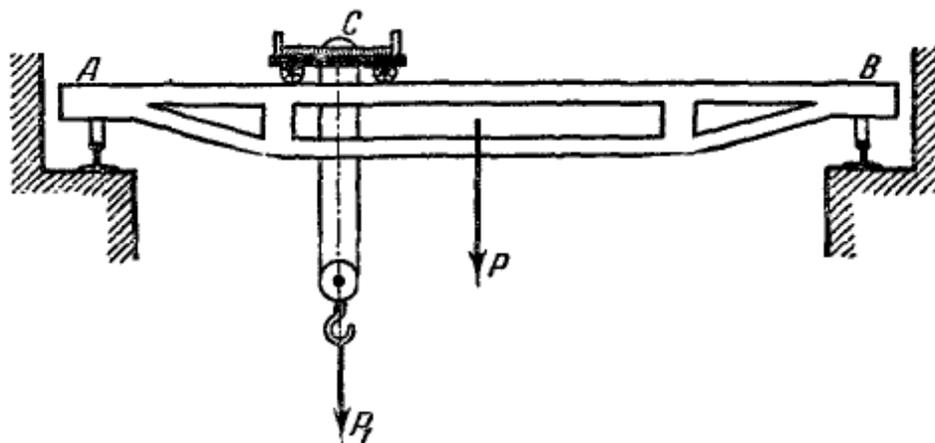


Рисунок 9 – К задаче 1.3.4

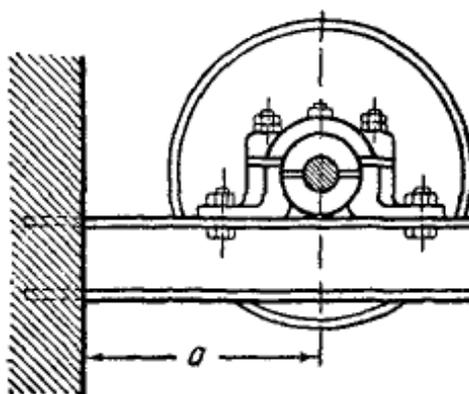


Рисунок 10 – К задаче 1.3.5

1.3.6. Центр тяжести передвижного рельсового крана, масса которого (без противовеса) равна $P_1 = 50$ т, находится в точке C , расстояние которой от вертикальной плоскости, проходящей через правый рельс, равно 1,5 м (рис. 11). Крановая тележка рассчитана на подъем груза $P_2 = 25$ т; вылет ее равен 10 м. Определить наименьший вес Q и наибольшее расстояние x центра тяжести противовеса от вертикальной плоскости, проходящей через левый рельс B так, чтобы кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной. Собственным весом тележки пренебречь.

Ответ: $Q = 33,3$ т; $x = 6,75$ м.

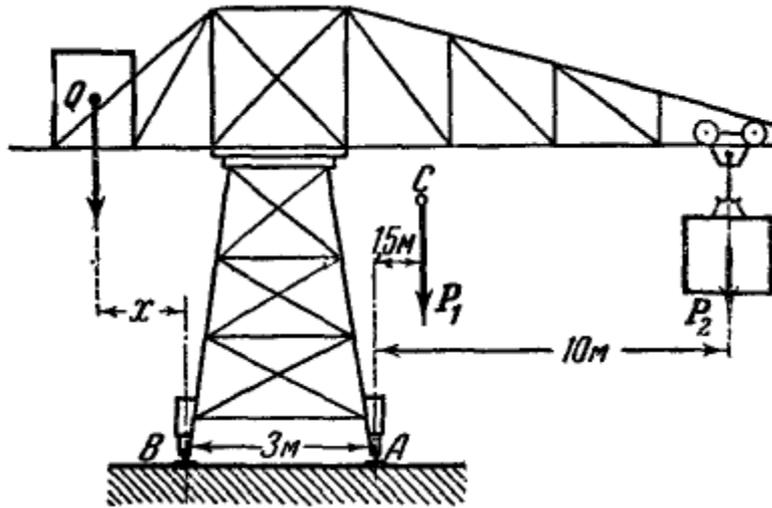


Рисунок 11 – К задаче 1.3.6

1.3.7. Кран для загрузки материалов в мартеновскую печь состоит из лебедки A , ходящей на колесах по рельсам, уложенным на балках передвигного моста B . К нижней части лебедки прикреплена опрокинутая колонна D , служащая для укрепления лопаты C (рис. 12). Какой вес P должна иметь лебедка с колонной, чтобы груз $Q = 1,5$ т, помещенный на лопате на расстоянии 5 м от вертикальной оси OA лебедки, не опрокидывал ее? Центр тяжести лебедки расположен на оси OA ; расстояние оси каждого из колес от оси OA равно 1 м.

Ответ: $P \geq 6$ т.

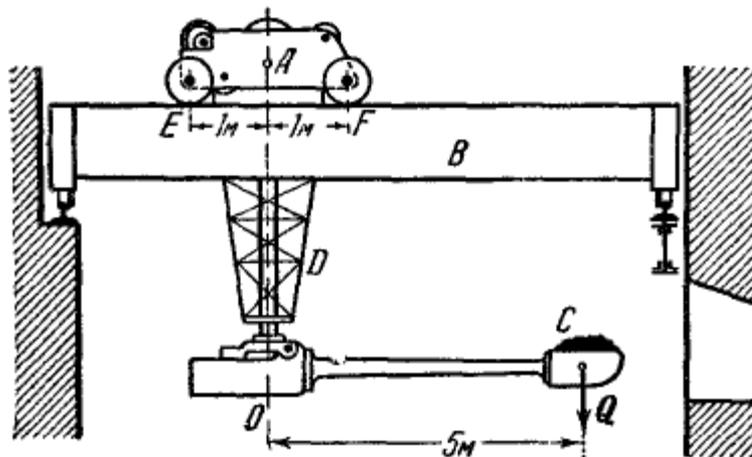


Рисунок 12 – К задаче 1.3.7

1.4. Произвольная плоская система сил

1.4.1. Определить реакции опор A , B , C и шарнира O составной балки, изображенной на рис. 13 вместе с нагрузкой [5].

Ответ: $X_A = 3 \cdot g$ кН; $Y_A = 13,8 \cdot g$ кН; $Y_B = -6,6 \cdot g$ кН; $Y_C = 10 \cdot g$ кН; $X_D = 0$ кН; $Y_D = \pm 5 \cdot g$ кН.

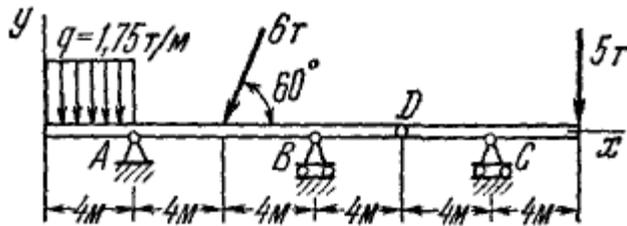


Рисунок 13 – К задаче 1.4.1

1.4.2. Аточная ферма (рис. 14) имеет неподвижный опорный шарнир в точке A , в точке B – подвижную гладкую опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом 30° . Пролет $AB = 20$ м. Центр тяжести фермы, масса которой вместе со снеговой нагрузкой равна 10 т, находится в точке C , расположенной над серединой пролета AB . Равнодействующая сил давления ветра P равна 2 т и направлена параллельно AB , линия ее действия отстоит от AB на 4 м. Определить опорные реакции.

Ответ: $X_A = -1,12 \cdot g$ кН; $Y_A = 4,6 \cdot g$ кН; $R_B = 6,24 \cdot g$ кН.

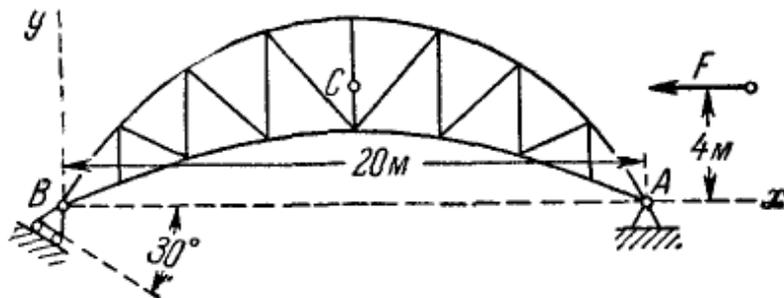


Рисунок 14 – К задаче 1.4.2

1.4.3. Лебедка снабжена храповым колесом диаметром d_1 с собачкой A (рис. 15). На барабан диаметром d_2 , неподвижно скрепленный с колесом, намотан трос, поддерживающий груз Q . Определить давление R на ось B собачки, если дано: $Q = 50 \cdot g$ Н, $d_1 = 0,42$ м, $d_2 = 0,24$ м, $h = 0,05$ м, $a = 0,12$ м. Весом собачки пренебречь.

$$\text{Ответ: } R = Q \frac{d_2}{d_1} \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = 31 \cdot g \text{ Н.}$$

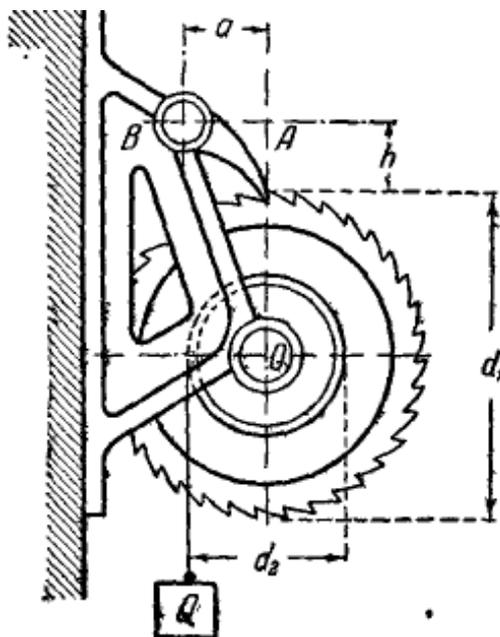


Рисунок 15 – К задаче 1.4.3

1.4.4. Цепь OO_1 самозахватывающего грузы приспособления (рис. 16) соединена шарниром O со стержнями $OC = OD = 0,6$ м. Стержни соединены шарнирами же с двумя равными ломаными рычагами CAE и DBF , которые могут вращаться вокруг точек A и B соединительного стержня GH . В шарнирах E и F особые колодки удерживают груз $Q = 1$ т трением. Расстояние точки E от стержня GH равно $EL = 0,5$ м, а расстояние ее от стержня OC равно $EN = 1$ м. Высота треугольника COD равна $OK = 0,1$ м. Найти силу, растягивающую соединительный стержень GH , пренебрегая весом частей механизма.

$$\text{Ответ: } 6 \cdot g \text{ кН.}$$

1.4.5. Прокатный стан (рис. 17) состоит из двух валов диаметром $d = 0,5$ м, вращающихся в противоположные стороны, указанные стрелками на чертеже; расстояние между валами $a = 0,005$ м. Какой толщины b листы можно прокатывать на этом стане, если коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валов $f = 0,1$. Для работы стана необходимо, чтобы лист захватывался вращающимися валами, т.е. чтобы равнодействующая приложенных к листу нормальных реакций и сил трения в точках A и B была направлена по горизонтали вправо.

Ответ: $b \leq 0,0075$ м.

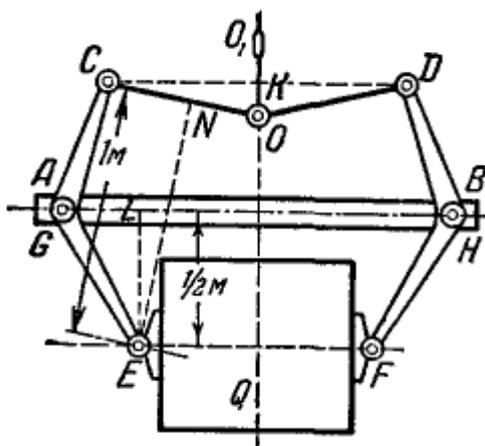


Рисунок 16 – К задаче 1.4.4

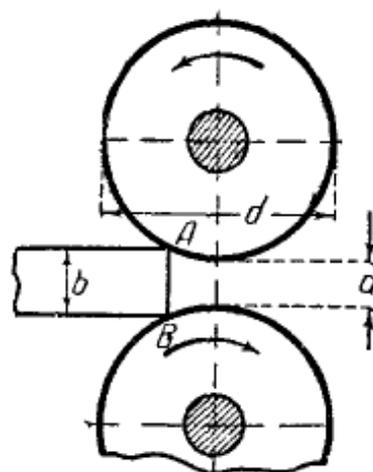


Рисунок 17 – К задаче 1.4.5

1.5. Силы трения

1.5.1. К валу (рис. 18) приложена пара с моментом $M = 800$ Н · м. На валу заклинено тормозное колесо, диаметр которого $d = 0,4$ м. Определить коэффициент трения покоя между колесом и колодками, если колодки прижимаются к колесу силами $F = F' = 10$ кН [7].

Ответ: $f = 0,2$.

1.5.2. На рис. 19 показан шариковый подпятник, на который передается сила давления $F_{\text{п}} = 100$ кН, диаметр шариков $d = 0,04$ м. Определить модуль горизонтальной силы F , необходимой для преодоления трения в подпятнике, считая ее приложенной на расстоянии от осб вала, равном среднему радиусу кольца. Коэф-

коэффициент трения качения шариков из закаленной стали по стали $k = 0,00001$ м [7].

Ответ: $F = 50$ Н.

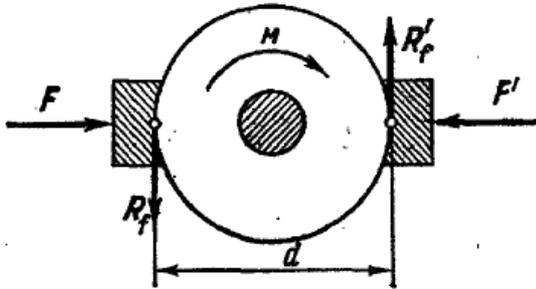


Рисунок 18 – К задаче 1.5.1

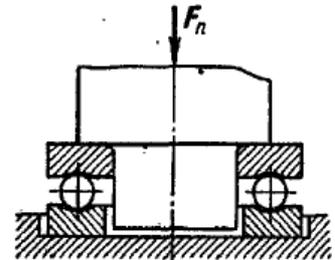


Рисунок 19 – К задаче 1.5.2

1.5.3. Кронштейн (рис. 20), нагруженный вертикальной силой $P = 600 \cdot g$ Н, прикреплен к стене двумя болтами. Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной $f = 0,3$. Для большей осторожности расчет произвести в предположении, что затянут только верхний болт и что болты поставлены с зазором и не должны работать на срез. Дано $b/a > f$ [5].

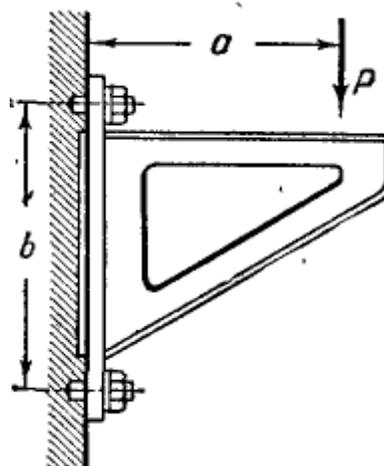


Рисунок 20 – К задаче 1.5.3

Примечание. Затяжкой называется усилие, действующее вдоль оси болта. Полная затяжка верхнего болта состоит из двух частей: первая устраняет возможность отрыва кронштейна и опрокидывания его вокруг нижнего болта, вторая обеспечивает то нормальное давление верхней части кронштейна на стену, которое вызывает необходимую силу трения.

Ответ: $2 \cdot g$ кН.

1.5.4. Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD ; длина втулки $b = 2$ см; в точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P (рис. 21). Определить, пренебрегая весом стержня AB , расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f=0,1$.

Ответ: $a \geq 0,1$ м.

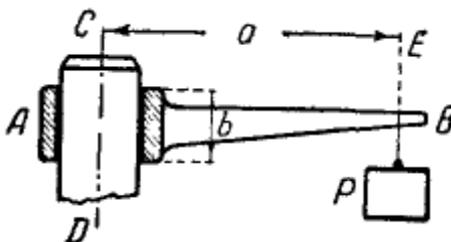


Рисунок 21 – К задаче 1.5.4

1.5.5. К вертикальной стене приставлена лестница AB , опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол (рис. 22). Коэффициент трения лестницы о стену f_1 , о пол f_2 . Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен p и приложен в точке C , которая делит длину лестницы в отношении $m : n$. Определить наибольший угол α , составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций N_A стены и N_B пола для этого значения α .

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m+n)f_2}{m-n f_1 f_2}$; $N_A = \frac{p f_2}{1 + f_1 f_2}$; $N_B = \frac{p}{1 + f_1 f_2}$.

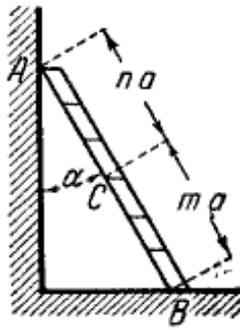


Рисунок 22 – К задаче 1.5.5

1.6. Равновесие произвольной системы сил

1.6.1. Вагонетка (рис. 23) весом $G = 10$ кН удерживается на наклонной плоскости канатом, перекинутым через блок и параллельным этой плоскости. Угол α равен 30° . Определить силы давления колес вагонетки на плоскость в точках A и B и натяжение каната, если центр тяжести вагонетки находится в точке C , $AD = DB = a = 0,75$ м, $CE = b = 0,3$ м [11-15].

Ответ: $T = 5$ кН; $R_A = 5,33$ кН; $R_B = 3,33$ кН.

1.6.2. На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B , действуют: с одной стороны вес тела $Q = 25 \cdot g$ Н привязанного к шкиву C радиуса $0,20$ м посредством троса, а с другой стороны вес тела $P = 100 \cdot g$ Н, надетого на стержень DE , неизменно скрепленный с валом AB под прямым углом (рис. 24). Даны расстояния: $AC = 0,2$ м, $CD = 0,70$ м, $BD = 10$ см. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на угол 30° . Определить расстояние l центра тяжести тела P от оси вала AB и реакции подшипников A и B [5].

Ответ: $l = 0,1$ м; $Z_A = 30 \cdot g$ Н; $Z_B = 95 \cdot g$ Н; $X_A = X_B = 0$.

1.6.3. Для подъема копровой бабы массой $P = 300$ кг служит вертикальный ворот, вал которого радиусом $r = 0,2$ м опирается нижним концом на подпятник A , а верхним концом удерживается в подшипнике B (рис. 25). Вал приводится во вращение мотором. Найти необходимый для равномерного подъема копровой ба-

бы вращающий момент мотора, а также реакции в подпятнике A и подшипнике B . При этом дано: $h_1 = 1$ м, $h = 0,30$ м и вес вращающихся частей ворота $P_1 = 100 \cdot g$ Н.

Ответ: $M_{вр} = 60 \cdot g$ Н · м; $X_A = X_B = 0$; $Y_A = -210 \cdot g$ Н; $Z_A = 100 \cdot g$ Н; $Y_B = -90 \cdot g$ Н.

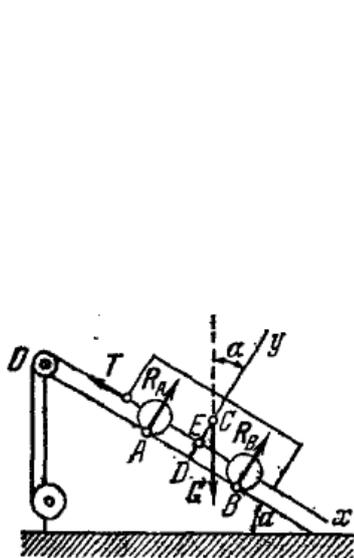


Рисунок 23 – К задаче 1.6.1

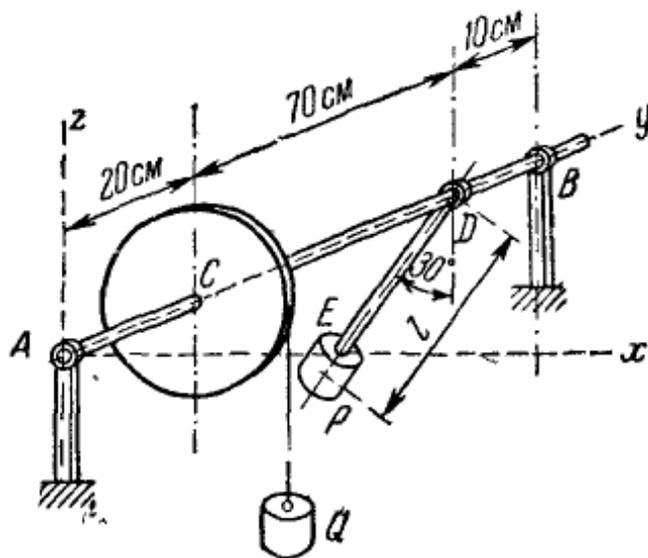


Рисунок 24 – К задаче 1.6.2

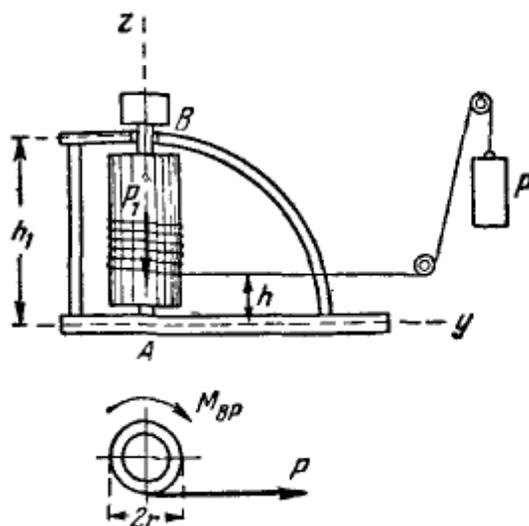


Рисунок 25 – К задаче 1.6.3

1.6.4. Горизонтальный вал трансмиссии, несущий два шкива C и D ременной передачи, может вращаться в подшипниках A и B (рис. 26). Радиусы шкивов:

$r_C = 0,2$ м, $r_D = 0,25$ м; расстояния шкивов от подшипников: $a = b = 0,5$ м; расстояние между шкивами $c = 1$ м. Натяжения ветвей ремня, надетого на шкив C , горизонтальны и имеют величины T_1 и t_1 , причем $T_1 = 2 t_1 = 500 \cdot g$ Н; натяжения ветвей ремня, надетого на шкив D , образуют с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$ и имеют величины T_2 и t_2 , причем $T_2 = 2 t_2$. Определить натяжения T_2 и t_2 в условиях равновесия и реакции подшипников, вызванные натяжениями ремней.

Ответ: $T_2 = 400 \cdot g$ Н; $t_2 = 200 \cdot g$ Н; $X_A = -637,5 \cdot g$ Н; $Z_A = 130 \cdot g$ Н; $X_B = -412,5 \cdot g$ Н; $Z_B = 390 \cdot g$ Н.

1.6.5. Прямоугольная однородная полка $ABCD$ веса G удерживается в горизонтальном положении тросом EH , составляющим с плоскостью полки угол α (рис. 27). Определить натяжение T троса (весом его пренебречь) и реакции петель A и B , если $AK = KB = DE = EC$ и HK перпендикулярно AB .

Ответ: $T = \frac{G}{2 \sin \alpha}$; $X_A = X_B = \frac{G}{4} \operatorname{ctg} \alpha$; $Z_A = Z_B = \frac{G}{4}$.

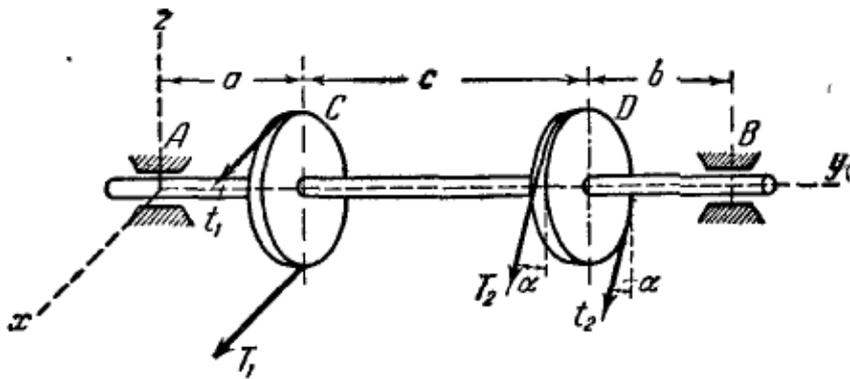


Рисунок 26 – К задаче 1.6.4

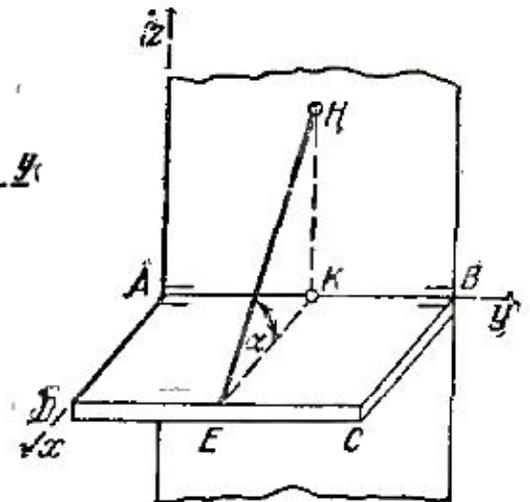


Рисунок 27 – К задаче 1.6.5

РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки

2.1.1. Кривошип OA (рис. 28) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. Длина $OA = AB = 0,8 \text{ м}$. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B , если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на чертеже [5].

Ответ: 1) Траекторией точки M является эллипс $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$; 2) уравнение движения ползуна $x = 160 \cos 10 t$.

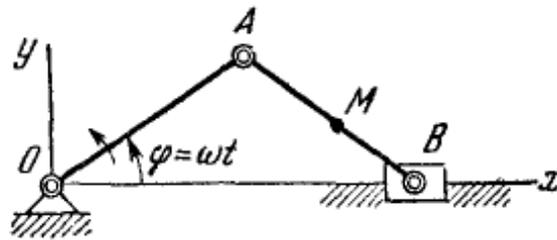


Рисунок 28 – К задаче 2.1.1

2.1.2. Мостовой кран движется вдоль мастерской согласно уравнению $x = t$; по крану катится в поперечном направлении тележка согласно уравнению $y = 1,5 t$ (x и y – в метрах, t – в секундах). Цепь укорачивается со скоростью $v = 0,5 \text{ м/с}$. Определить траекторию центра тяжести груза; в начальном положении центр тяжести груза находился в горизонтальной плоскости Oxy ; ось Oz направлена вертикально вверх.

Ответ: Траектория – прямая: $y = 1,5 x$; $z = 0,5 x$.

2.1.3. Груз, поднятый на упругом канате, колеблется согласно уравнению $x = a \sin\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$, где a – в сантиметрах, k – в с^{-1} . Определить амплитуду и круговую частоту колебаний груза, если период колебаний равен 0,4 с и в начальный момент $x_0 = -0,04$ м. Построить также кривую расстояний.

Ответ: $a = 0,04$ м; $k = 5\pi \text{ с}^{-1}$.

2.1.4. Уравнения движения точки обода колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, имеют вид $x = a(k t - \sin k t)$, $y = a(1 - \cos k t)$. Определить моменты времени, когда точка занимает низшее, среднее и высшее положения на траектории, считая, что ось y направлена вверх.

Ответ: 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda \text{ с}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{k}\lambda\right) \text{ с}$; 3) $\left(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\lambda\right) \text{ с}$, где $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.1.5. Точка движется по винтовой линии $x = a \cos k t$, $y = a \sin k t$, $z = v t$. Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

Ответ: $r = a$, $\varphi = k t$, $z = v t$.

2.1.6. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорость середины M шатуна кривошипно-шатунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени, если $OA = AB = a$ (см. чертеж к задаче 1.6.6).

Ответ: 1) $v_M = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}$. 2) $v_B = 2a\omega\sin\omega t$.

2.1.7. Концы A стержня AB перемещаются по прямолинейной направляющей CD с постоянной скоростью v_A (рис. 29). Стержень AB все время проходит через качающуюся муфту O , отстоящую от направляющей CD на расстоянии a . Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах r , φ скорость ускорение точки M , находящейся на линейке на расстоянии b ползуна A .

Ответ: $v = \frac{v_A}{a}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi}$; $\omega = \frac{v_A^2}{a}\cos^2\varphi\left(1 - \frac{r}{a}\cos\varphi\right) \times \sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}$.

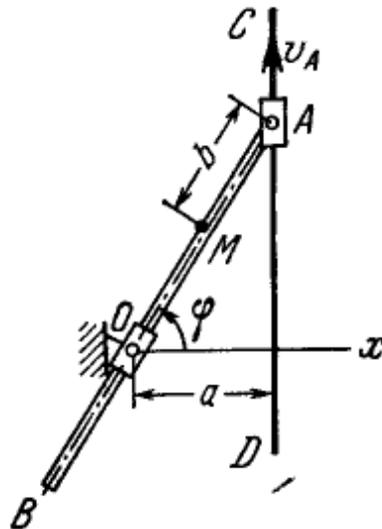


Рисунок 29 – К задаче 2.1.6

2.2. Простейшие движения твердого тела

2.2.1. Вал радиуса $R = 10$ см приводится во вращение гирей P , привешенной к нему на нити (рис. 30). Движение гири выражается уравнением $x = 100 t^2$, где x – расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t – время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение a точки на поверхности вала в момент t [5].

$$\text{Ответ: } \omega = 20t \text{ с}^{-1}; \varepsilon = 20 \text{ с}^{-2}; a = 200\sqrt{1 + 400 t^4} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

2.2.2. В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта 1 передается шестерне 2 , на оси которой укреплено зубчатое колесо 3 , сцепляющееся с шестерней 4 , несущей стрелку (рис. 31). Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением $x = a \sin k t$ и радиусы зубчатых колес соответственно равны r_2 , r_3 и r_4 .

$$\text{Ответ: } \omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} a k \cos kt.$$

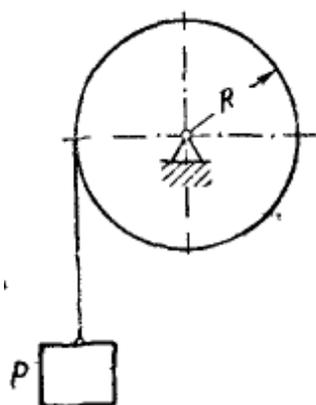


Рисунок 30 – К задаче 2.2.1

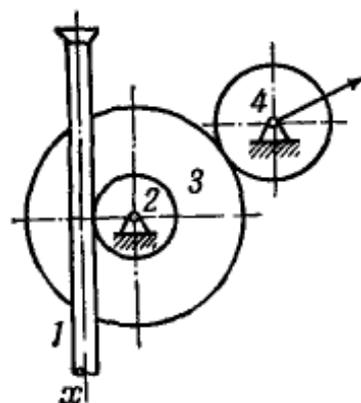


Рисунок 31 – К задаче 2.2.2

2.2.3. Ведущий вал I фрикционной передачи (рис. 32) делает 600 об/мин и на ходу передвигается (направление указано стрелкой) так, что расстояние (I меняется по закону $d = (10 - 0,5 t)$ см (t – в секундах). Определить: 1) угловое ускорение вала II как функцию от расстояния d ; 2) ускорение точки на ободу колеса B в момент, когда $d = r$; даны радиусы фрикционных колес: $r = 5$ см, $R = 15$ см.

Ответ: 1) $\varepsilon = \frac{50 \pi}{d^2} \text{ с}^{-2}$; 2) $a = 30 \pi \sqrt{40000 \pi^2 + 1} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

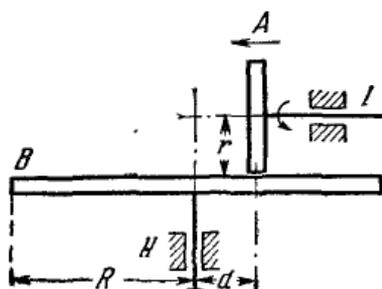


Рисунок 32 – К задаче 2.2.3

2.2.4. Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-шатунного механизма (рис. 33), если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$. Ось Ox

направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета – в центре O кривошипа. Отношение $r/l = \lambda$ следует считать весьма малым ($\lambda \ll 1$); $\alpha = \omega_0 t$.

$$\text{Ответ: } x = r \left(\cos \omega_0 t + \frac{\lambda}{4} \cos 2 \omega_0 t \right) + l - \frac{\lambda}{4} r; \quad v_x = -r \omega_0 \left(\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \sin 2 \omega_0 t \right);$$

$$a_x = -r \omega_0^2 (\cos \omega_0 t + \lambda \cos 2 \omega_0 t).$$

2.2.5. Найти закон движения стержня, если диаметр эксцентрика $d = 2r$, а ось вращения O находится от оси диска C на расстоянии $OC = a$; ось Ox направлена по стержню, начало отсчета – на оси вращения, $a/r = \lambda$ (рис. 34).

$$\text{Ответ: } x = a \cos \varphi + r \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

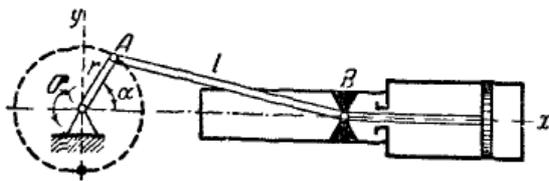


Рисунок 33 – К задаче 2.2.4

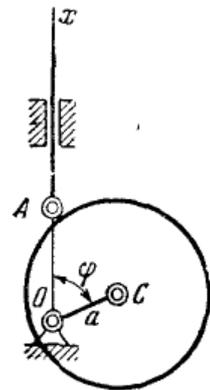


Рисунок 34 – К задаче 2.2.5

2.3. Плоское движение твердого тела

2.3.1. Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на малое звено OO_1 , равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 35). Приняв за полюс точку A , составить уравнения движения звена AB , если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ ($a > b$); в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1 [5].

$$\text{Ответ: } x_A = a \cos \omega t; \quad y_A = a \sin \omega t; \quad \varphi = 2 \operatorname{arccctg} \frac{\cos \omega t - \frac{b}{a}}{\sin \omega t}.$$

2.3.2. Подвижное лезвие L ножниц для резки металла приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $AOBD$ (рис. 36). Определить скорость шарнира D и угловую скорость звена BD , если в положении, указанном на чертеже, угловая скорость рычага AB равна 2 с^{-1} , $OB = 0,05 \text{ м}$, $O_1D = 0,1 \text{ м}$.

Ответ: $v_D = 0,0865 \text{ м/с}$; $\omega_{BD} = 0,87 \text{ с}^{-1}$.

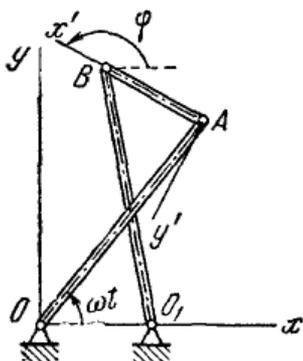


Рисунок 35 – К задаче 2.3.1

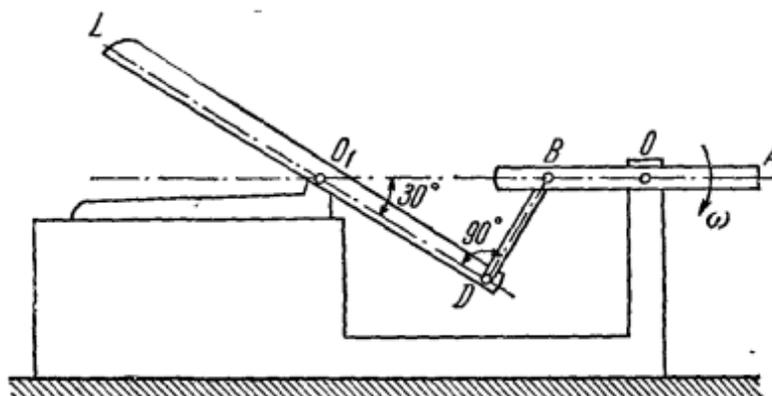


Рисунок 36 – К задаче 2.3.2

2.3.3. Кривошип OA длиной $0,2 \text{ м}$ вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ и приводит в движение шатун AB длиной 1 м ; ползун B движется по вертикали (рис. 37). Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = -45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Ответ: $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 16 \text{ с}^{-2}$; $a_B = 5,656 \text{ м/с}^2$.

2.3.4. Ползун B кривошипно-шатунного механизма OAB движется по дуговой направляющей. Определить касательное и нормальное ускорения ползуна B в положении, указанном на чертеже (рис. 38), если $OA = 0,1 \text{ м}$, $AB = 0,2 \text{ м}$. Кривошип OA вращается, имея в данный момент угловую скорость $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, угловое ускорение $\varepsilon = 0 \text{ с}^{-2}$.

Ответ: $a_{B\tau} = 0,15 \text{ м/с}^2$; $a_{Bn} = 0 \text{ м/с}^2$.

2.3.5. Колесо радиуса R катится без скольжения по плоскости (рис. 39). Центр O колеса движется с постоянной скоростью v_O . В точке A с ним шарнирно

соединен стержень AB длины $l = 3R$. Другой конец стержня скользит по плоскости. В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня AB , а также линейные скорость и ускорение его точки B .

Ответ: $\omega_{AB} = \frac{v_O}{3R}$, $\varepsilon_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \frac{v_O^2}{R^2}$, $v_B = 2v_O$, $a_B = \frac{5\sqrt{3}}{9} \frac{v_O^2}{R}$.

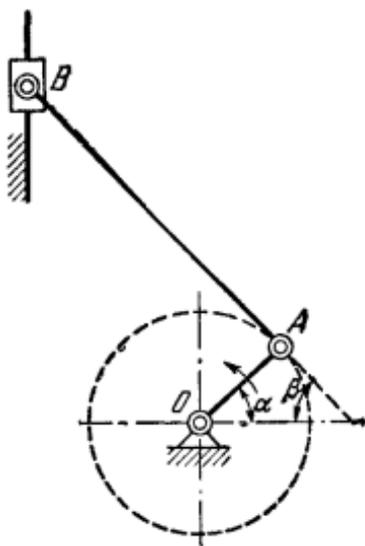


Рисунок 37 – К задаче 2.3.3

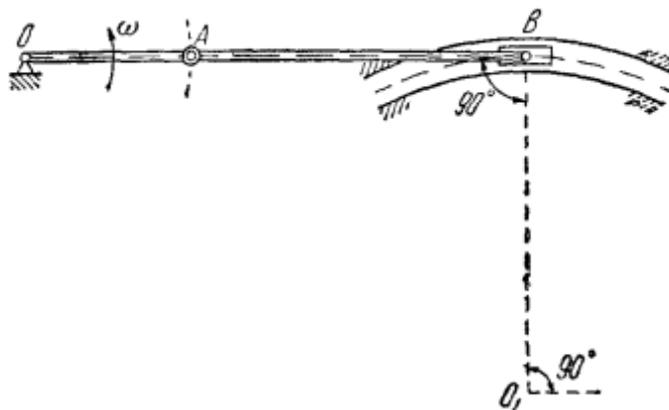


Рисунок 38 – К задаче 2.3.4

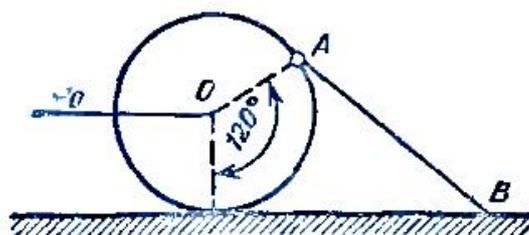


Рисунок 39 – К задаче 2.3.5

2.4. Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку.

2.4.1. Конус, вершина O которого неподвижна, катится по плоскости без скольжения (рис. 40). Высота конуса $CO = 0,18$ м, а угол при вершине $AOB = 90^\circ$. Точка C , центр основания конуса, движется равномерно и возвращается в перво-

начальное положение через 1 с. Определить скорость конца B диаметра AB , угловое ускорение конуса и ускорение точек A и B [5].

Ответ: $v_B = 0,16$ м/с; $\varepsilon = 39,5$ с⁻² и направлено перпендикулярно к OA и OB ; $a_A = 10$ м/с² и направлено параллельно OB ; $a_B = 14,1$ м/с², лежит в плоскости AOB и направлено под углом 45° к OB .

2.4.2. Конус A обегает 120 раз в минуту неподвижный конус B (рис. 41). Высота конуса $OO_1 = 0,1$ м. Определить переносную угловую скорость ω_e конуса вокруг оси z , относительную угловую скорость ω_r конуса вокруг оси OO_1 , абсолютную угловую скорость ω_a и абсолютное угловое ускорение ε_a конуса.

Ответ: $\omega_e = 4\pi$ с⁻¹; $\omega_r = 6,92\pi$ с⁻¹; $\omega_a = 8\pi$ с⁻¹ и направлена по оси OC ; $\varepsilon_a = 27,68\pi^2$ с⁻² и направлена параллельно оси x .

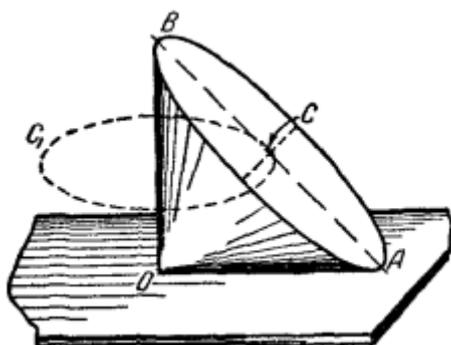


Рисунок 40 – К задаче 2.4.1

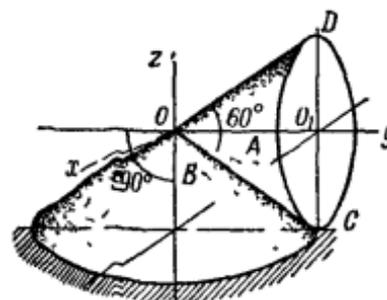


Рисунок 41 – К задаче 2.4.2

2.4.3. Диск OA радиуса $R = 0,069$ м, вращаясь вокруг неподвижной точки O , обкатывает неподвижный конус с углом при вершине, равным 60° (рис. 42). Найти угловую скорость вращения диска вокруг его оси симметрии, если ускорение a_A точки A диска по величине постоянно и равно $0,48$ м/с².

Ответ: $\omega = 2$ с⁻¹.

2.4.4. Коническое зубчатое колесо, ось которого пересекается с геометрической осью плоской опорной шестерни в центре последней, обегает пять раз в минуту опорную шестерню (рис. 43). Определить угловую скорость ω_r вращения ко-

леса вокруг его оси и угловую скорость ω вращения вокруг мгновенной оси, если радиус опорной шестерни вдвое больше радиуса колеса: $R = 2r$.

Ответ: $\omega_r = 1,047 \text{ с}^{-1}$; $\omega = 0,907 \text{ с}^{-1}$.

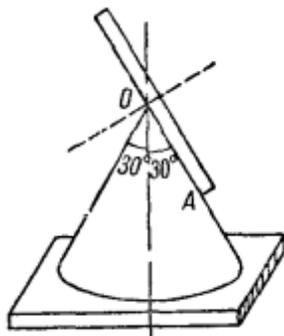


Рисунок 42 – К задаче 2.4.3

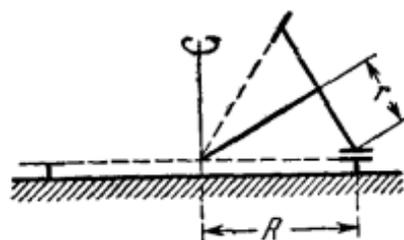


Рисунок 43 – К задаче 2.4.4

2.4.5. Коническое зубчатое колесо, свободно насаженное на кривошип OA , обкатывается по неподвижному коническому зубчатому основанию. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε катящегося колеса, если модули угловой скорости и углового ускорения (их направления указаны на рис. 44) кривошипа OA , вращающегося вокруг неподвижной оси O_1O , соответственно равны ω_0 и ε_0 .

Ответ: $\omega = \frac{\omega_0}{\sin \alpha} e_1$; $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sin \alpha} e_1 + \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha e_2$, где e_1 – единичный вектор,

направленный от точки O к точке C , а e_2 – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости OAC и направленный на читателя.

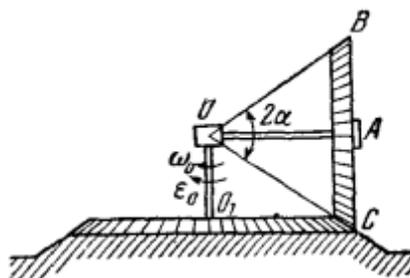


Рисунок 44 – К задаче 2.4.5

2.5. Сложное движение точки

2.5.1. Кулачок, имеющий форму клина ABC с углом α (рис. 45), движется поступательно по горизонтальной плоскости со скоростью u . Определить скорость толкателя DE , опирающегося на кулачок и свободно скользящего в неподвижной муфте [7].

Ответ: $v = u \operatorname{tg} \alpha$.

2.5.2. Стрела AB поворотного крана (рис. 46) вращается вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω . По горизонтальной стреле от A к B движется тележка с постоянной скоростью v_0 . Определить абсолютную траекторию тележки, если в начальный момент тележка находилась на оси O_1O_2 [5].

Ответ: Траектория – архимедова спираль $r = \frac{v_0}{\omega} \varphi$, где r – расстояние тележки от оси вращения, φ – угол поворота крана вокруг оси O_1O_2 .

2.5.3. В кулисном механизме (рис. 47) при качании кривошипа OC вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости чертежа, ползун A , перемещаясь вдоль кривошипа OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Расстояние $OK = l$. Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

Ответ: $v_r = \frac{l \omega \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}$.

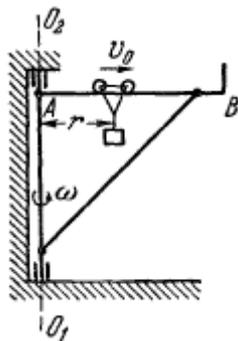


Рисунок 45 – К задаче 2.5.1

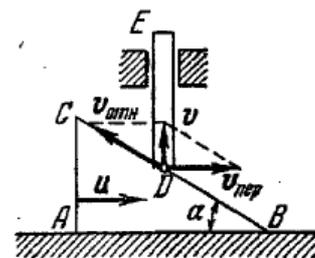


Рисунок 46 – К задаче 2.5.2

2.5.4. В регуляторе (рис. 48), вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 18,8 \text{ с}^{-1}$ тяжелые гири A , прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяется по закону $x = (10 + 5 \sin 8\pi t) \text{ м}$. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значения кориолисова ускорения при крайних положениях гири.

Ответ: $a_a = 59,2 \text{ м/с}^2$; $a_c = 0 \text{ м/с}^2$.

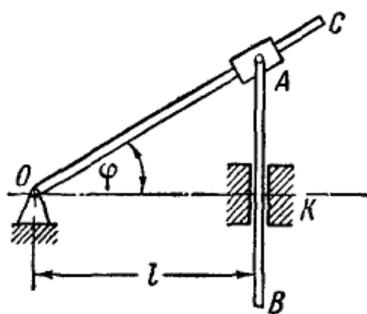


Рисунок 47 – К задаче 2.5.3

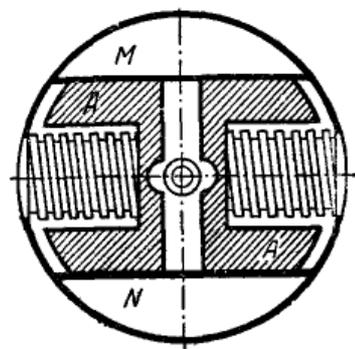


Рисунок 48 – К задаче 2.5.4

2.5.5. По радиусу диска (рис. 49), вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t \text{ с}^{-1}$, в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2 \text{ м}$. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1 \text{ с}$.

Ответ: $a_M = 0,356 \text{ м/с}^2$.

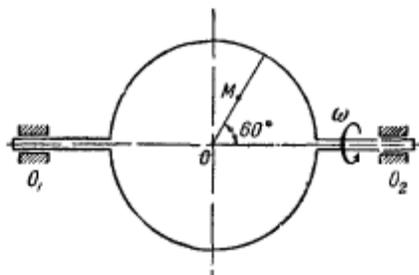


Рисунок 49 – К задаче 2.5.5

2.6. Сложное движение твердого тела

2.6.1. Кривошип *III* соединяет оси O_1 и O_2 двух зубчатых колес *I* и *II*, причем зацепление может быть или внешнее, или внутреннее, как указано на рис. 50; колесо *I* остается неподвижным, а кривошип *III* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_3 . Зная радиусы колес r_1 и r_2 , вычислить для колеса *II* его абсолютную угловую скорость ω_2 и его относительную угловую скорость ω_{23} по отношению к кривошипу [5].

Ответ: Внешнее зацепление: $\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}$. Внутреннее

зацепление: $\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}$. Знак минус указывает на то, что соответствующие тела вращаются в противоположные стороны.

2.6.2. Редуктор скоростей (рис. 51) состоит из трех зубчатых колес. Первое колесо (число зубцов $z_1 = 20$) насажено на ведущий вал *I*, делающий $n_1 = 4500$ об/мин, второе ($z_2 = 25$) свободно насажено на ось, жестко связанную с ведомым валом *II*, третье колесо ($z_3 = 70$) с внутренним зацеплением неподвижно. Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.

Ответ: $n_{II} = 1000$ об/мин; $n_2 = -1800$ об/мин.

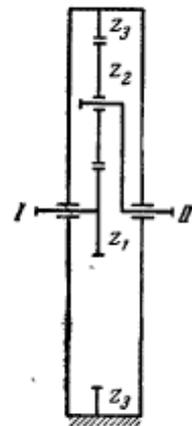
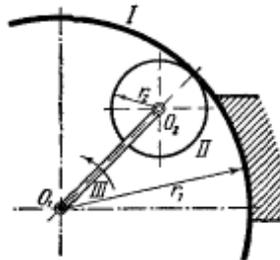
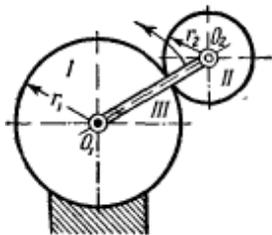


Рисунок 50 – К задаче 2.6.1

Рисунок 51 – К задаче 2.6.2

2.6.3. Шаровая дробилка (рис. 52) состоит из полого шара Π (в котором находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси CD , на которой заклинено коническое зубчатое колесо E радиуса r . Ось CD сидит в подшипниках в раме I , составляющей одно целое с осью AB и приводящейся во вращение при помощи рукоятки G . Колесо E сцепляется с неподвижным колесом F радиуса R . Определить абсолютную угловую скорость шаровой дробилки, если рукоятка вращается с угловой скоростью ω_0 ; угол между осями AB и CD равен α . Определить также абсолютное угловое ускорение шаровой дробилки, если угловая скорость рукоятки $\omega_0 = \text{const}$.

Ответ: $\omega_A = \frac{\omega_0}{r} \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \alpha}$; $\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r} \sin \alpha$.

2.6.4. Для растирания руды применяются бегуны в виде чугунных колес со стальными ободьями, катящимися по дну конической чаши (рис. 53). Бегуны вращаются вокруг горизонтальной оси AOB , которая в свою очередь вращается вокруг вертикальной оси OO_1 , составляющей с осью AOB одно целое. Найти абсолютные скорости точек D и E обода бегуна, принимая, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину C линии касания обода бегуна с дном чаши. Скорость вращения вокруг вертикальной оси $\omega_e = 1 \text{ с}^{-1}$, ширина бегуна $n = 0,5$ м. Средний радиус бегуна $R = 1$ м, средний радиус вращения $r = 0,6$ м, $\text{tg } \alpha = 0,2$.

Ответ: $v_D = v_E = 0,028 \text{ м/с}$.

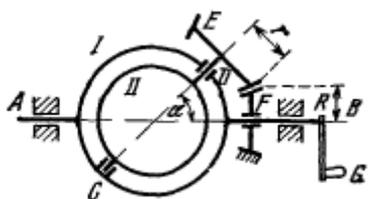


Рисунок 52 – К задаче 2.6.3

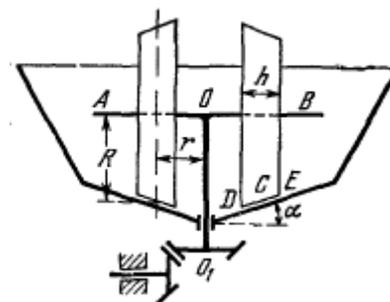


Рисунок 53 – К задаче 2.6.4

2.6.5. Крестовина $ABCD$ универсального шарнира Кардана – Гука ($AB \perp CD$), употребляемого при передаче вращения между пересекающимися осями, вращается вокруг неподвижной точки E (рис. 54). Найти отношение ω_1/ω_2 для валов, связанных крестовиной, в двух случаях:

1) когда плоскость вилки ABF горизонтальна, а плоскость вилки CDG вертикальна;

2) когда плоскость вилки ABF вертикальна, а плоскость вилки CDG ей перпендикулярна. Угол между осями валов постоянный: $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 1) $\omega_1/\omega_2 = 1/\cos \alpha = 2$; 2) $\omega_1/\omega_2 = \cos \alpha = 0,5$.

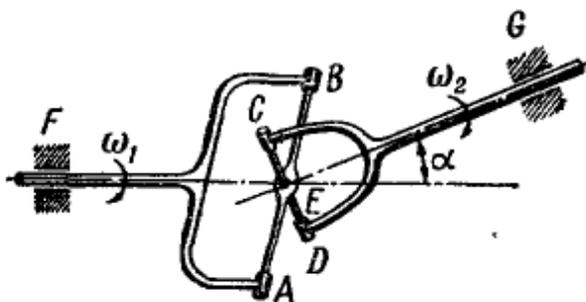


Рисунок 54 – К задаче 2.6.5

РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА

3.1. Динамика материальной точки

3.1.1. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $a = 0,05$ м. Найти наименьшую частоту k колебаний решета, при которой куски руды, лежащие на нем, будут отделяться от него и подбрасываться вверх [5].

Ответ: $k = 14 \text{ с}^{-1}$.

3.1.2. Главную часть прибора для испытания материалов ударом составляет тяжелая стальная отливка M , прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 55). Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $OM = 0,981$ м. Определить скоростью v этой точки в наинижем положении B , если она падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.

Ответ: $v = 6,2 \text{ м/с}$.

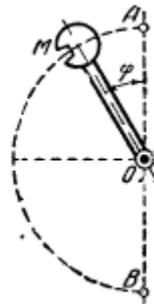


Рисунок 55 – К задаче 3.1.2

3.1.3. Написать выражение потенциальной энергии упругой рессоры, прогибающейся на $0,01$ м от нагрузки в 400 кг, предполагая, что прогиб x возрастает прямо пропорционально нагрузке.

Ответ: $V = 0,2 x^2 + \text{const}$.

3.1.4. На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на рис. 56, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой O_1O_2 ; расстояние $O_1O_2 = 2l$; стержень приводится в движение силами трения, развиваемыми в точках касания его со шкивами; эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен f . 1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на x_0 при $v_0 = 0$. 2) Найти коэффициент трения f , зная, что период колебаний T стержня при $l = 0,25$ м равен 2 с.

Ответ: 1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}t\right)$; 2) $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0,25$.

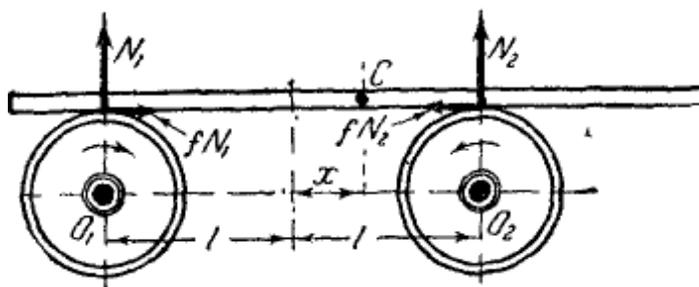


Рисунок 56 – К задаче 3.1.4

3.1.5. Шарик массы m , прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c , находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси (рис. 57). Определить относительное движение шарика, если трубка, образуя с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω .

Ответ: В системе координат, начало которой совпадает с точкой равновесия шарика,

1) $x = 2 \frac{\omega^2 a}{k^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2} t$ при $k = \sqrt{\frac{c}{m}} > \omega$;

$$2) x = \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - k^2} \left(ch \sqrt{\omega^2 - k^2} t - 1 \right) \text{ при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} < \omega.$$

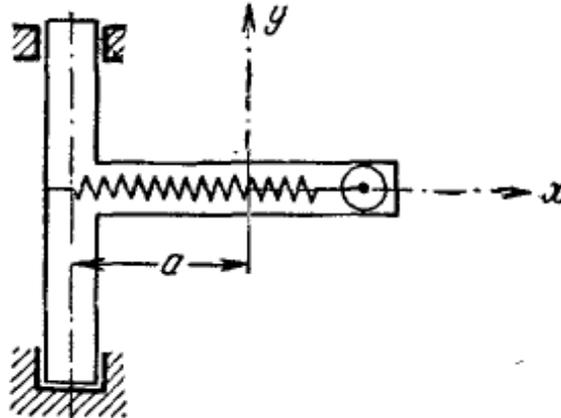


Рисунок 57 – К задаче 3.1.5

3.2. Динамика системы материальных точек

3.2.1. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длиной L и весом G , противовеса E весом Q и груза K весом P (рис. 58). Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес E и груз K как точечные массы, определить момент инерции J_z крана относительно вертикальной оси вращения z центробежные моменты инерции относительно осей координат x, y, z , связанных с краном. Центр тяжести всей системы находится на оси z ; стрела CD расположена в плоскости yz [5].

$$\text{Ответ: } J_z = \frac{1}{g} \left[Qa^2 + \left(P + \frac{1}{3}G \right) L^2 \sin^2 \alpha \right]; J_{yz} = \frac{P + \frac{1}{3}G}{2g} L^2 \sin 2\alpha - \frac{P}{g} Ll \sin \alpha,$$

$$L_{xy} = L_{xz} = 0.$$

3.2.2. Две гибкие нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра M весом P и радиуса r так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельной основаниям (рис. 59). Цилиндр помещен на наклонной плоскости AB так, что его образующие перпендикулярны к линии

наибольшего ската, а концы C нитей закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости AB . Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, причем коэффициент трения равен f . Определить путь s , пройденный центром тяжести цилиндра за время t , и натяжение T нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.

Ответ: $s = \frac{1}{3} g (\sin \alpha - 2f \cos \alpha) t^2$; $T = \frac{1}{6} P (\sin \alpha + f \cos \alpha)$. Цилиндр оста-

ется в покое, если $\operatorname{tg} \alpha < 2f$.

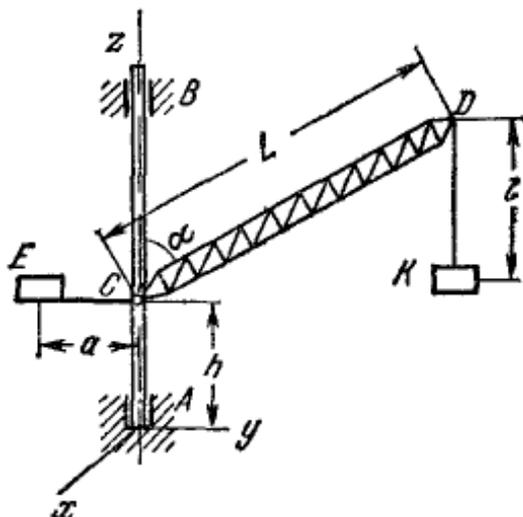


Рисунок 58 – К задаче 3.2.1

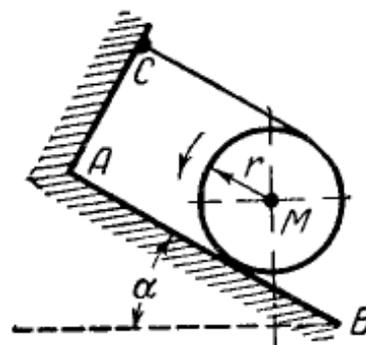


Рисунок 59 – К задаче 3.2.2

3.2.3. В дробилке с бегунами каждый бегун имеет массу $P = 1200$ кг, радиус инерции относительно его оси $\rho = 0,4$ м, радиус $R = 0,5$ м, мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину линии касания бегуна с дном чаши. Определить давление бегуна на горизонтальное дно чаши, если переносная угловая скорость вращения бегуна вокруг вертикальной оси соответствует $n = 60$ об/мин.

Ответ: $N = 26879$ Н.

3.2.4. Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана при поднимании груза E массой 3000 кг с ускорением $1/3 g$. Масса

крана равна 2000 кг и приложен в его центре тяжести C . Масса тележки D равна 500 кг. Кран и тележка неподвижны. Размеры указаны на рис. 60.

Ответ: $X_A = -X_B = 51993$ Н; $Y_A = 63765$ Н.

3.2.5. Платформа с помещенным на ней призматическим грузом AB катится по горизонтальным рельсам со скоростью v (рис. 61). На платформе имеется выступ, в который упирается ребро B груза, препятствуя последнему скользить по платформе вперед, но не препятствуя вращению его около ребра B . Дано: h – высота центра тяжести груза над платформой, ρ – радиус инерции груза относительно ребра B . Определить угловую скорость ω вращения груза около ребра B в момент мгновенной остановки платформы.

Ответ: $\omega = \frac{hv}{\rho^2}$.

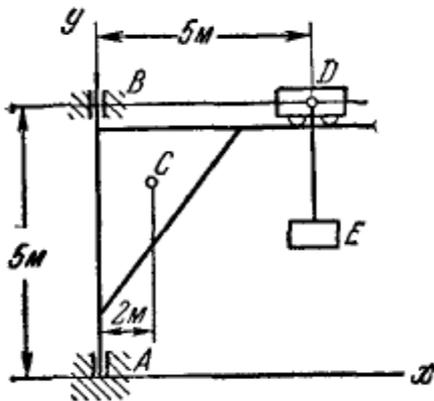


Рисунок 60 – К задаче 3.2.4

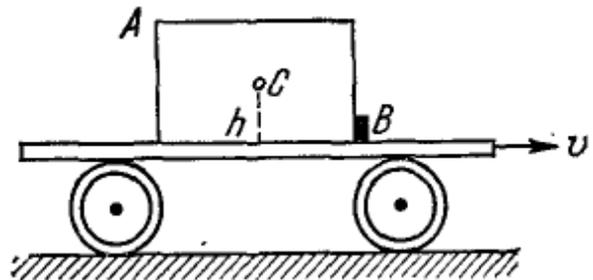


Рисунок 61 – К задаче 3.2.5

3.3. Теорема о движении центра масс материальной системы

3.3.1. Определить давление на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую (рис. 62), если вес неподвижных частей корпуса D и фундамента E равен P_1 , вес кривошипа $OA = a$ равен P_2 , вес кулисы B и поршня C равен P_3 . Кривошип OA , вращающийся равномерно с угловой скоростью ω , считать однородным стержнем [5].

$$\text{Ответ: } N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a \omega^2}{2g} (P_2 + 2P_3) \cos \omega t.$$

3.3.2. Ножницы для резки металла состоят из кривошипно-шатунного механизма OAB , к ползуну B которого прикреплен подвижный нож (рис. 63). Неподвижный нож укреплен на фундаменте C . Определить давление фундамента на грунт, если длина кривошипа r , вес кривошипа P_1 длина шатуна l , вес ползуна B с подвижным ножом P_2 , вес фундамента C и корпуса O равен P_3 . Массой шатуна пренебречь. Кривошип OA , равномерно вращающийся с угловой скоростью ω , считать однородным стержнем.

Примечание. Выражение $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \omega t}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение r/l в степени выше второй.

$$\text{Ответ: } N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{r \omega^2}{2g} \left[(P_1 + 2P_2) \cos \omega t + 2P_2 \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right].$$

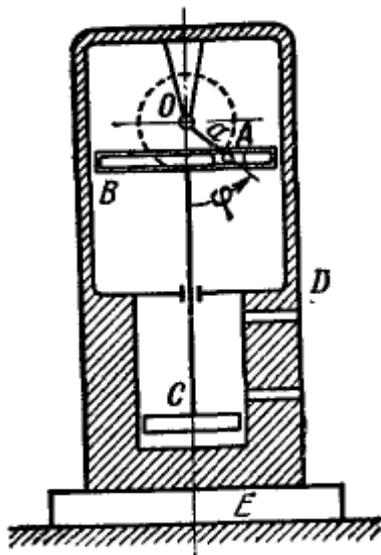


Рисунок 62 – К задаче 3.3.1

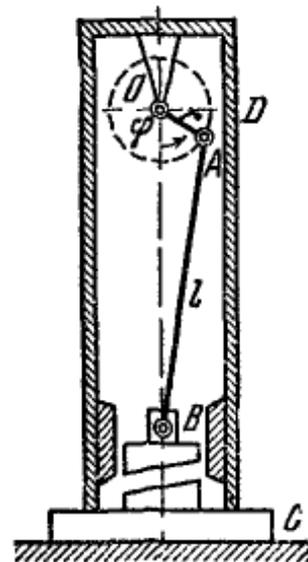


Рисунок 63 – К задаче 3.3.2

3.3.3. Электрический мотор весом P установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплен одним

концом однородный стержень длиной $2l$ и весом p , на другой коней стержня насажен точечный груз Q (рис. 64); угловая скорость вала равна ω . Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R , действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.

Ответ: 1) Гармонические колебания с амплитудой $\frac{l(p+2Q)}{p+P+Q}$ и периодом

$$\frac{2\pi}{\omega}; 2) R = \frac{p+2Q}{g} l \omega^2.$$

3.3.4. Грузы P_1 и P_2 , соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A , скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием BC на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 65). Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза P_1 на высоту $h = 0,1$ м. Вес клина $P = 4P_1 = 16 P_2$; массой нити и блока пренебречь.

Ответ: Клин переместится вправо на $0,0377$ м.

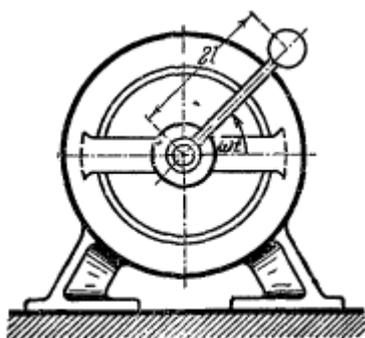


Рисунок 64 – К задаче 3.3.3

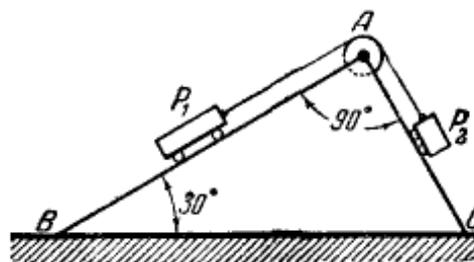


Рисунок 65 – К задаче 3.3.4

3.3.5. Определить перемещение незаторможенного грузовика-самосвала, находившегося в начальный момент в покое, если его кузов массой 4000 кг из горизонтального положения повернулся вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости чертежа, на угол 30° (рис. 66). Масса грузовика без кузова составляет 1500 кг.

Положение центра тяжести C кузова указано на рис., причем $OA = 2$ м, $AC = 0,5$ м. Соппротивлением движению грузовика пренебредить.

Ответ: Влево на 0,39 м.

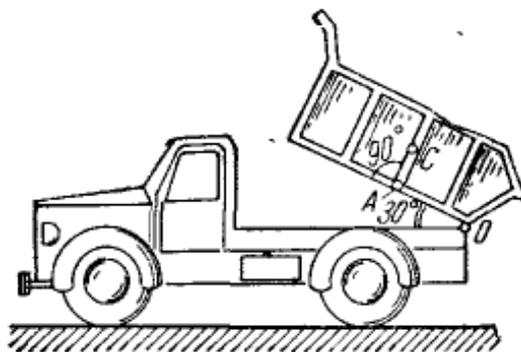


Рисунок 66 – К задаче 3.3.5

3.4. Теорема об изменении главного момента количества движения материальной системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

3.4.1. Шарик A , находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длиной l , приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0 (рис. 67). Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m\omega$, где m – масса шарика, α – коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов, которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебредить.

Ответ: $T = \frac{1}{\alpha} \ln 2$; $n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}$ об.

3.4.2. При пуске в ход электрической лебедки (рис. 68) к барабану A приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный времени, причем $m_{вр} = at$, где

a – постоянная. Груз B весом P_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и весом P_2 . Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{(at - 2P_1 r)gt}{r^2(2P_1 + P_2)}$$

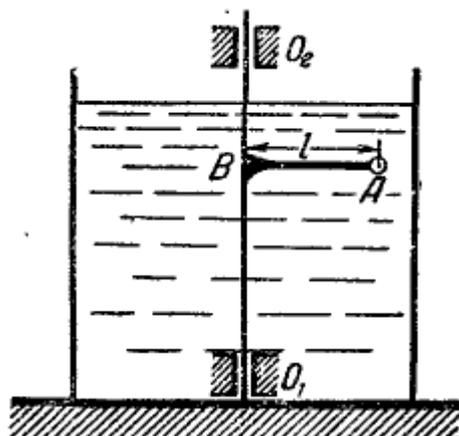


Рисунок 67 – К задаче 3.4.1

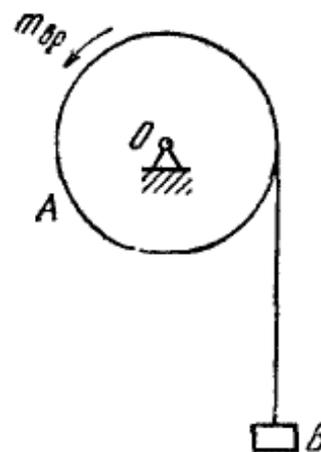


Рисунок 68 – К задаче 3.4.2

3.4.3. Барабан A весом P_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза C весом P_2 , привязанного к концу нерастяжимого троса (рис. 69). Трос переброшен через блок B и намотан на барабан A . К барабану A приложен момент сопротивления m_s , пропорциональный угловой скорости барабана; коэффициент пропорциональности равен a . Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое. Массой каната и блока B пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{P_2 r}{a} (1 - e^{-\beta t}), \text{ где } \beta = \frac{2ga}{r^2(P_1 + 2P_2)}; \lim_{t \rightarrow \infty} \omega = \frac{P_2 r}{a} = \text{const.}$$

3.4.4. Круглая горизонтальная платформа (рис. 70) вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести, с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом на платформе стоят четыре человека одинакового веса: два – на краю платформы, а два – на расстояниях от оси вращения, равных поло-

вине радиуса платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u , а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу – круглым однородным диском.

Ответ: Платформа будет вращаться с той же угловой скоростью.



Рисунок 69 – К задаче 3.4.3

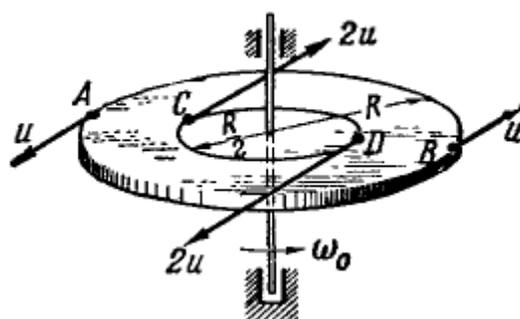


Рисунок 70 – К задаче 3.4.4

3.4.5. Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB . Внутри трубки на расстоянии $MC = a$ от оси находится шарик M . В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0 . Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J , L – ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m .

Ответ:
$$\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2} \omega_0.$$

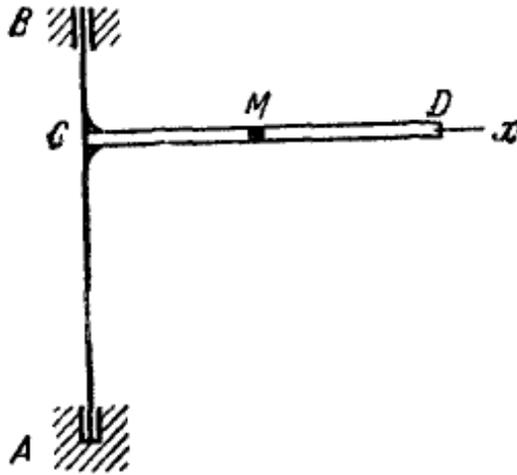


Рисунок 71 – К задаче 3.4.5

3.5. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

3.5.1. Вычислить кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма (рис. 72), если масса кривошипа m_1 длина кривошипа r , масса ползуна m_2 , длина шатуна l . Массой шатуна пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем. Угловая скорость вращения кривошипа ω .

$$\text{Ответ: } T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} m_1 + m_2 \left[\sin \varphi + \frac{r}{2l} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \right]^2 \right\} r^2 \omega^2.$$

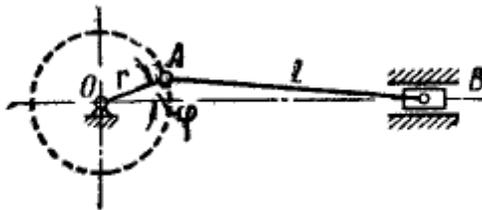


Рисунок 72 – К задаче 3.5.1

3.5.2. Транспортер (рис. 73) приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B . Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M . Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s , если вес поднимаемого груза A равен P , а шкивы B и C радиуса r и весом Q каждый представляет собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α . Скольжение ленты по шкивам отсутствует.

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{\frac{2g(M - Pr \sin \alpha)}{r(P + Q)}} s.$$

3.5.3. На рис. 74 изображен подъемный механизм лебедки. Груз A весом P_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r и весом P_2 . К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\text{вр}} = a\varphi^2$, где a – постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимется на высоту h . Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C – сплошной диск весом P_3 . Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

$$\text{Ответ: } v = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gh(ah^2 - 3P_1r^3)}{3r(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

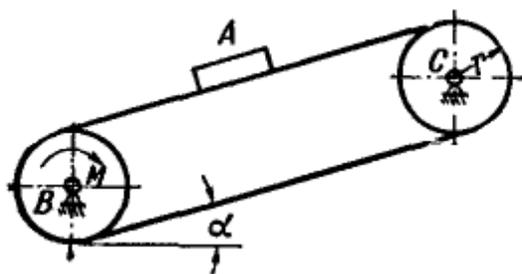


Рисунок 73 – К задаче 3.5.2

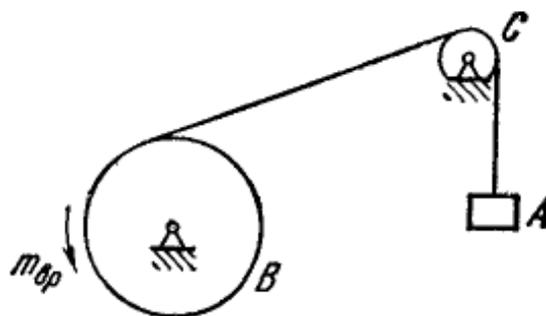


Рисунок 74 – К задаче 3.5.3

3.5.4. Груз A весом P_1 , опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D , поднимает вверх груз B весом P_2 , прикрепленный к оси подвижного блока C (рис. 75). Блоки C и D считать однородными сплошными дисками весом P_3 каждый. Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h . Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

$$\text{Ответ: } v = 2\sqrt{2gh \frac{2P_1 - P_2 - P_3}{8P_1 + 2P_2 + 7P_3}}.$$

3.5.5. К барабану ворота радиуса r_1 и весом P_1 приложен постоянный вращающий момент M (рис. 76). К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса весом P_2 . Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{2}{r_1} 2\sqrt{2\pi n g \frac{M - P_2 r_1 \sin \alpha}{P_1 + 3P_2}}.$$

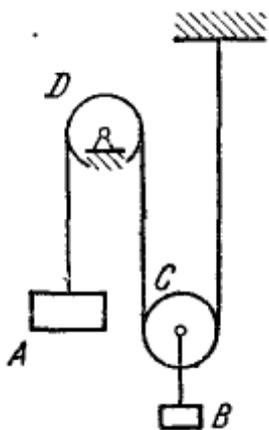


Рисунок 75 – К задаче 3.5.4

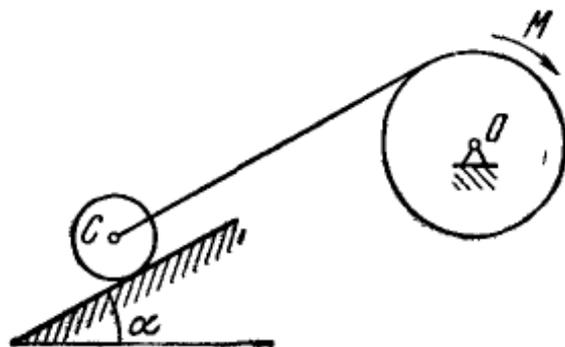


Рисунок 76 – К задаче 3.5.5

3.6. Аналитическая механика

3.6.1. Груз Q поднимается с помощью домкрата (рис. 77), который приводится в движение рукояткой $OA = 0,6$ м. К концу рукоятки, перпендикулярно к ней, приложена сила $P = 157$ Н. Определить величину груза Q , если шаг винта домкрата $h = 0,012$ м.

Ответ: $Q = 49246$ Н.

3.6.2. На маховичок коленчатого пресса (рис. 78) действует вращающий момент M ; ось маховичка имеет на концах винтовые нарезки шага h противоположного направления и проходит через две гайки, шарнирно прикрепленные к двум вершинам стержневого ромба со стороной a ; «верхняя вершина ромба закреплена неподвижно, нижняя прикреплена к горизонтальной плите пресса. Определить силу давления пресса на сжимаемый предмет в момент, когда угол при вершине ромба равен 2α .

Ответ: $P = \pi \frac{M}{h} \operatorname{ctg} \alpha$.

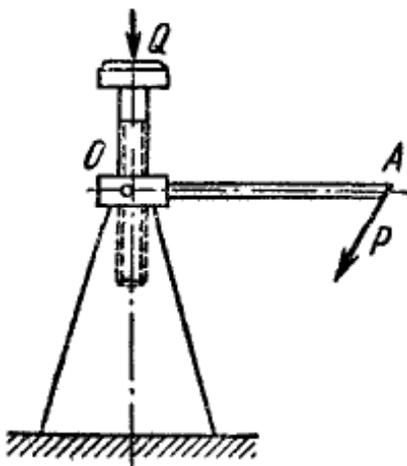


Рисунок 77 – К задаче 3.6.1

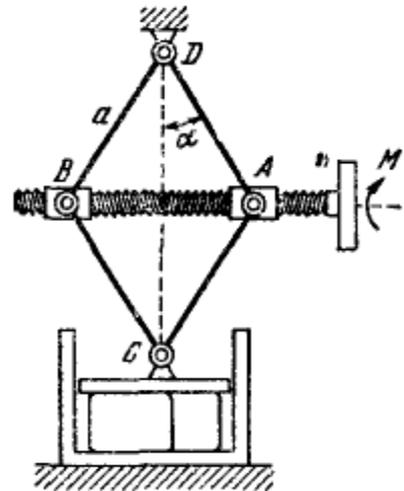


Рисунок 78 – К задаче 3.6.2

3.6.3. Определить зависимость между модулями сил P и Q в клиновом пресе, если сила P приложена к концу рукоятки длиной a перпендикулярно к оси винта и рукоятки. Ход винта равен h . Угол при вершине клина равен α .

Ответ: $Q = P \frac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.

3.6.4. Полиспаст (рис. 80) состоит из неподвижного блока A и из n подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение поднимаемого груза Q к усилию P , прилагаемому к концу каната, сходящего с неподвижного блока A .

Ответ: $\frac{Q}{P} = 2^n$.

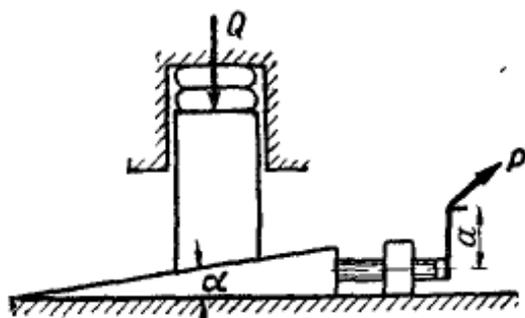


Рисунок 79 – К задаче 3.6.3

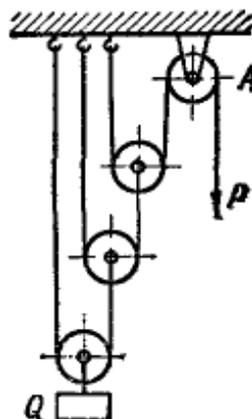


Рисунок 80 – К задаче 3.6.4

3.6.5. Вал кабестана – механизма для передвижения грузов – радиуса r приводится в движение постоянным вращающим моментом M , приложенным к рукоятке AB (рис. 81). Определить ускорение груза C весом P , если коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость равен f . Массой каната и кабестана пренебречь.

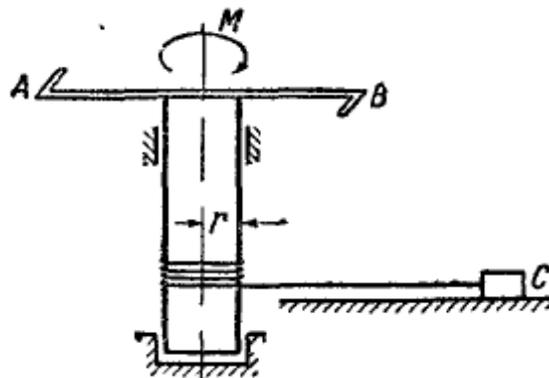


Рисунок 81 – К задаче 3.6.5

Ответ: $a = g \frac{M - f P r}{P r}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блохин, В. Н.** Пособие по теоретической механике : учеб. пособие / В. Н. Блохин, А. М. Случевский. – Брянск : Изд-во Брянской ГСХА, 2014. – 231 с.
2. **Гермидер, О. В.** Сборник задач по теоретической механике : учеб.-метод. пособие / О. В. Гермидер, О. Н. Оруджова, А. А. Шинкарук. – Архангельск : САФУ, 2016. – 70 с.
3. **Денисов, Ю. В.** Теоретическая механика : учебник / Ю. В. Денисов, Н. А. Клинских. – Екатеринбург : УрФУ, 2013. – 474 с.
4. **Локтионова, О. Г.** Лекции по теоретической механике : учеб. пособие / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянов. – Курск : Юго-Зап. Гос. ун-т, 2014. – 188 с.
5. **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский, Н. В. Бутенин, А. И. Лурье. – Москва : Наука, Гл. ред. физико-математ. лит., 1986. – 448 с.
6. **Молотков, Н. Я.** Механика : учеб. пособие / Н. Я. Молотков, В. Е. Иванов, О. В. Ломакина. – Тамбов : ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 188 с.
7. **Никитин, Е. М.** Теоретическая механика для техникумов : учебник / Е. М. Никитин. – Москва : Наука, Гл. ред. физико-математ. лит., 1988. – 336 с.
8. **Савчук, В. П.** Теоретическая механика : учебник / В. П. Савчук, Д. Г. Медведев, О. Н. Вярвьильская. – Минск : БГУ, 2016. – 231 с.
9. **Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике** : учеб. пособие / А. А. Яблонский [и др.]. – Москва : Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.
10. **Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания** / Л. И. Котова [и др.]. – Москва : Высш. шк., 1989. – 111 с.
11. **Теоретическая механика** : учебник / Н. Г. Васько [и др.]. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2012. – 302 с.

12. **Теоретическая механика** : учебник / С. В. Болотин [и др.]. – Москва : ИЦ «Академия», 2010. – 432 с.
13. **Теоретическая механика** : учеб. пособие / О. Н. Оруджова [и др.]. – Архангельск : САФУ, 2014. – 96 с.
14. **Теоретическая механика** : учеб. пособие / П. А. Красножон [и др.]. – Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2014. – 87 с.
15. **Урсулов, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач : учеб. пособие / А. В. Урсулов, И. Г. Бострем, А. А. Казаков. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 113 с.

__1.2

1.1.1 __1.3

1.1.2 __1.1

1.1.3 __1.4

1.1.4 __1.5

1.2.1 __2.18

1.2.2 __2.21

1.2.3 __2.26

1.2.4 __2.30

1.2.5 __2.33 [1]

1/3/1 __задача 14 [3]

1.3.2 __задача 15

1.3.3 __задача 16

1.3.4 3.6 [1]

1/3/5 3/13

1.3.7 3.25

1/4/1 4/33

1/4/2 4/22

1/4/3 4/5

1/4/4/ 4.48

1/4/5 4.72

1.5.1 задача 32

1.5.2 задача 35

1/5/3 4/62

1.5.4 4.64

1.5.5 4.65

1.6.1. задача 25

1.6.2. 8.13

1.6.3. 8.35

1.6.4. 8.37

1.6.5. 8.18

2.1.1 10.12

2.1.2 10.5

2.1.3 10.9

2.1.4. 10.13

2.1.5. 10/19

2/1/6 11/5

2.1.7. 12.33

2.2.1. 13.18

2.2.2. 14.4

2.2.3 14.10

2.2.4. 14.12

2.2.5. 14.13

2.3.1. 15.12

2.3.2. 16.25

2.3.3 18.12

2.3.4. 18.17

2.3.5. 18.27

2.4.1. 19.4

2.4.2. 19.5

2.4.3. 19.9

2.4.4. 19.11

2.4.5. 19.14

2.5.1. задача 74

2.5.2. 21.5

2.5.3. 22.17

2.5.4. 23.11

2.5.5. 23.27

2.6.1. 24.1

2.6.2. 24.6

2.6.3. 25.3

2.6.4. 25.4

2.6.5. 25.24

3.1.1. 26.14

3.1.2. 30.14

3.1.3. 30.15

3.1.4. 32.10

3.1.5. 33.9

3.2.1. 34.34

3.2.2. 39.21

3.2.3. 40.7

3.2.4. 41.12

3.2.5. 44.25

3.3.1. 35.7

3.3.2. 35.9

3.3.3. 35.10

3.3.4. 35.20

3.3.5. 35.22

3.4.1. 37.10

3.4.2. 37.42

3.4.3. 37.45

3.4.4. 37.52

3.4.5. 37.56

3.5.1. 38.5

3.5.2. 38.20

3.5.3. 38.24

3.5.4. 38.31

3.5.5. 38.41

3.6.1. 46.1

3.6.2. 46.2

3.6.3. 46.3

3.6.4. 46.9

3.6.5. 47.7

1 Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.В. Мещерский, Н.В. Бутенин, А.И. Лурье и др. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 448 с.

2 Котова, Л.И. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг и др. – М.: Высшая школа, 1989. – 111 с.

3 Никитин, Е.М. Теоретическая механика для техникумов / Е.М. Никитин. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 336 с.