УДК 519.87

МЕТОД ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Швидченко С.А., ассистент
(Донской государственній технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия)

В настоящее время существует ряд задач контроля непрерывных параметров измерительных процессов, когда непосредственному наблюдению доступен процесс $S(t)$, а информативным параметром является его производная $S'(t)$. Для математического решения данной задачи существует известный метод численного дифференцирования [1]. Но этот метод будет удовлетворительно работать лишь для функций, заданных в дискретных точках абсолютно точно. При решении задачи дифференцирования реальных процессов, являющихся результатами измерений, он является некорректным вследствие наличия погрешности измерений.

Это связано со следующим. Математически задача численного дифференцирования состоит в том, чтобы найти максимально приближенное значение производной заданной функции $S(t)$(результатов измерений). Возьмем одно из разностных отношений, например [1]:

$$\frac{dS(t_k)}{dt} \approx S_{t,k} = \frac{t_k - t_{k-1}}{h}, \tag{1}$$

где h - шаг, $S(t_k)$ - выборочные значения сигнала.

Возникающая в результате такой замены погрешность характеризуется разложением

$$S_{t,k} = \frac{dS(t_k)}{dt} - \frac{h}{2} S''(\xi^{(j)}{}_k), \tag{2}$$

где $\xi^{(j)}{}_k, j = 1,2,3,$ - точки из интервала (t_{k-1}, t_{k+1}).

Погрешность, возникающая при вычислении разностных отношений, намного превосходит погрешность в задании значений функции $S(t_k)$ и даже может неограниченно возрастать при стремлении шага сетки h к нулю [1].

Операция численного дифференцирования является некорректной потому что для наибольшего приближения $S_{t,k}$ к $S'(t_k)$ необходимо, чтобы шаг h был как можно мал. Данную задачу можно решить также при помощи полиномов Лагранжа, но для аппроксимации с высокой точностью придется использовать большие степени [1]. При этом будут наблюдаться осцилляции. Поэтому данный метод не находит практического применения в случае наличия погрешности измерений.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма численного дифференцирования результатов измерений с использованием аппарата вейвлет-фильтрации.

1. Метод вейвлет-дифференцирования

Вейвлеты представляют собой некоторый набор функций основанный на использовании представления сигнала в виде [2]:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\psi_0(t), \tag{3}$$

где $S(t)$ - сигнал; $\psi_0(t)$ - базисная функция; $C_k(t)$ - коэффициенты вейвлет-разложения.

Базисные функции $\psi_0(t)$ предполагаются заданными как функции определенного вида. Коэффициенты $C_k(t)$ при этом содержат информацию о конкретном сигнале.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование есть скалярное произведение $S(t)$ и базисных масштабирующих функций $\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

$$CTWT_S(a,b) = a^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)S(t)dt\,, \qquad (4)$$

где a - параметр масштаба, b - параметр показывающий расположение во времени.

Обратное вейвлет-преобразование осуществляется в соответствии с выражением [4]

$$S(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}CTWT_S(a,b)a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}\,, \qquad (5)$$

где $C_\psi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tilde{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|^{-1}}d\omega$ - постоянная, которая зависит только от $\psi(t)$, $C_\psi < \infty, C_\psi = 1$ - в данном случае, $\tilde{\psi}(\omega)$ - Фурье-образ $\psi(t)$.

Прямое дискретное вейвлет-преобразование вычисляется по следующей формуле:

$$CTWS_S(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi(a^{-m}t-n)S(t)dt\,, \qquad (6)$$

где $\phi_{m,n}(t) = a^{-m/2}\psi(a^{-m}t-n)$ - дискретное значение вейвлет-функции, $m,n \in Z$, Z - множество действительных чисел.

Если $a = 2$, то возможно восстановление сигнала в соответствии со следующим выражением [2]

$$S(t) = C_\psi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}CTWS_S(m,n)a^{-m/2}\phi(a^{-m}t-n)\,. \qquad (7)$$

Рассмотрим возможности аппарата вейвлет-преобразования на примере дифференцирования нестационарных сигналов. Вычислим производную сигнала $S(t)$ с использованием вейвлет-преобразования:

$$\frac{dS(t)}{dt} = C_\psi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}CTWS_s(m,n)a^{-m/2}\,\frac{d\phi(a^{-m}t-n)}{dt}\,. \qquad (8)$$

Очевидно, что в этом случае, если $\frac{d\phi(a^{-m}t-n)}{dt}$ будет обладать всеми свойствами вейвлета, т.е.:

- нулевым средним $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\phi(a^{-m}t-n)dt = 0$; (9)

- ограниченностью $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dt}\phi(a^{-m}t-n)\right|^2 dt < \infty$, (10)

то возможно обратное вейвлет-преобразование. Представим выражение (6), в виде

$$CTWS_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1}\phi(k,2^{m-1},n)S_k\,, \qquad (11)$$

и запишем формулу (7) в следующей форме

$$S_k = \sum_{m=1}^{NK}\sum_{n=1}^{N-1}\phi(k,2^{m-1},n)CTWS_{m,n}\,, \qquad (12)$$

где *NK*- число коэффициентов вейвлет-разложения, k - отсчеты сигнала, *k=0...N-1*. При этом в выражениях (11), (12) использовано ограниченное число коэффициентов при прямом и обратном вейвлет-преобразованиях. При этом предлагаемый метод реализуется следующей последовательностью преобразований:

1. Получаем выборки из непрерывного сигнала $S(t) \Rightarrow S_k(t)$;
2. Проводим прямое вейвлет-преобразование по формуле (6);
3. При обратном преобразовании используем выражение (8).

Преимущество вейвлет-преобразования состоит в том, что в численной схеме используется ограниченное число коэффициентов разложения.

2. Пример

Зададим тестовый измеряемый нестационарный сигнал вида

$$S_k = (\sin(k/8)\sin(k/2))\exp(k/N), \qquad (13)$$

где $N = 256$ - количество отсчетов, $k = 0,1...N-1$. Необходимость задания сигнала в такой форме обусловлена тем, что для такого представления легко найти аналитически точную производную $\frac{dS_k}{dt}$.

Найдем производную сигнала S_k

$$\frac{dS_k}{dt} = 1/8\cos(k/8)\sin(k/2)\exp(k/N) + 1/2\sin(k/8)\cos(k/2)\exp(k/N) + \sin(k/8)\frac{\sin(k/2)}{N}\exp(k/N). \qquad (14)$$

Запишем разностное соотношение численного дифференцирования

$$S_{t,k} = \frac{S_k - S_{k-1}}{h}, \qquad (15)$$

где $h = 0{,}2$ - шаг сетки.

Математическое моделирование проводилось в пакете Mathcad 14. Из рис. 1 видно, что значения производной $S_{t,k}$, полученные по разностной схеме, практически совпадают со значениями производной сигнала $\frac{dS_k}{dt}$.

Для удобства на рис. 1 показаны только первые 32 отсчета.

Проведем прямое дискретное вейвлет-преобразование при помощи вейвлета «мексиканская шляпа»:

$$\psi(t) = (1-t^2)e^{\frac{-t^2}{2}} = e^{\frac{-t^2}{2}} - t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}. \qquad (16)$$

Его производная будет равна

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = e^{\frac{-t^2}{2}}(-\frac{1}{2}2t) - (2te^{\frac{-t^2}{2}} + t^2(-te^{\frac{-t^2}{2}})) = te^{\frac{-t^2}{2}} - 2te^{\frac{-t^2}{2}} + t^3e^{\frac{-t^2}{2}} = -te^{\frac{-t^2}{2}} + t^3e^{\frac{-t^2}{2}} = -t\psi(t). \qquad (17)$$

Она является вейвлетом, т.к. выполняются следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(-te^{\frac{-t^2}{2}} + t^3e^{\frac{-t^2}{2}}\right)dt = 0, \quad (18) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|-te^{\frac{-t^2}{2}} + t^3e^{\frac{-t^2}{2}}\right|^2 dt < \infty \quad (19)$$

Выражение (19) имеет место, т.к. выполняется следующее условие

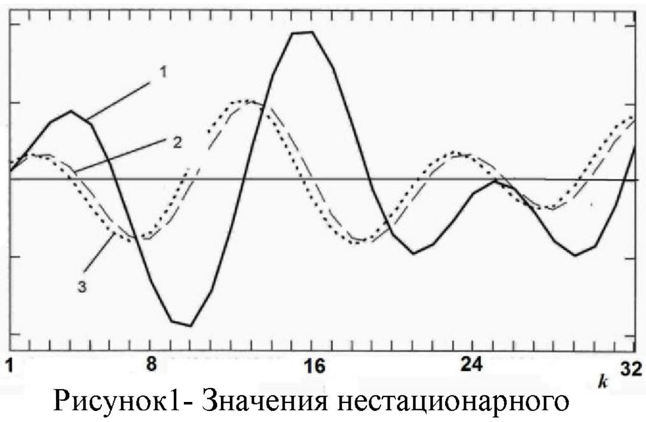

Рисунок1- Значения нестационарного сигнала S_k; 2- значения аналитической производной- $\frac{dS_k}{dt}$; 3- значения производной, вычисленной по разностной схеме - $S_{t,k}$

$$\lim_{t\to\infty}\left(t^3e^{\frac{-t^2}{2}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3t^2}{e^{\frac{t^2}{2}}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{6t}{e^{\frac{t^2}{2}}}\right) \to 0. \quad (20)$$

Запишем вейвлет (16) в дискретной форме

$$\phi(t,m,n) = a^{-m/2}\psi(a^{-m}t - n),$$

$$\phi(t,m,n) = a^{-m/2}(1-(a^{-m}t-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}t-n)^2}. \quad (21)$$

Его производная будет равна

$$\frac{d\phi(t,m,n)}{dt} = -2a^{-3/2m}(a^{-m}t-n)e^{-1/2(a^{-m}t-n)} - a^{-m}(a^{-m}t-n)\bullet \bullet\phi(t,m,n) \qquad (22)$$

Для моделирования погрешности измерений добавим к исходному сигналу S_k с помощью датчика случайных чисел «белый» гауссовский шум N_1, с математическим ожиданием равным m_N и среднеквадратическим отклонением σ_N

$$S^N{}_k = S_k + N_1 . \tag{23}$$

Проведем дифференцирование зашумленного сигнала $S^N{}_k$ с помощью разностной схемы.

Из рис. 2 следует, что значения производной, полученные по разностной схеме, сильно отличаются от значений зашумленного сигнала $S^N{}_k$ и производной данного сигнала $\frac{dS^N{}_k}{dt}$, то

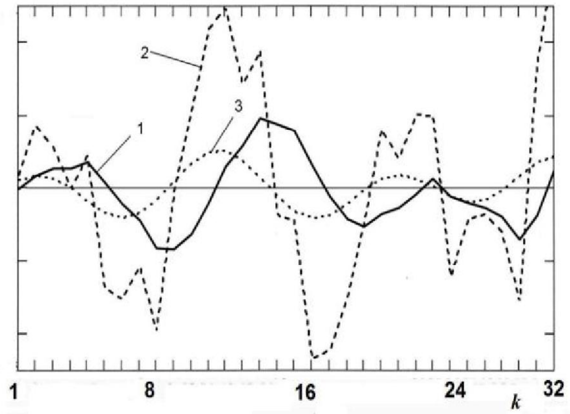

Рисунок 2 - Значения нестационарного сигнала + шум $S^N{}_k$; 2 - значения производной, вычисленной по разностной схеме - $S_{t,k}$, 3 –значения аналитической производной - $\frac{dS_k}{dt}$

есть на практике данный метод не применим.

Дискретное вейвлет-преобразование найдем в соответствии с выражением:

$$CTWS_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1} a^{-m/2}(1-(a^{-m}k-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}k-n)^2} S^N{}_k , \tag{24}$$

где $m = 1...NK, n = 1...N-1, NK = 6$ NK - количество коэффициентов вейвлет-разложения.

Обратное вейвлет-преобразование, т.е. восстановление исходного сигнала S_k произведем по следующей формуле:

$$S_k = \sum_{m=1}^{NK}\sum_{n=1}^{N-1} a^{-m/2}(1-(a^{-m}k-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}k-n)^2} CTWS_{m,n} . \tag{25}$$

Тогда можно записать формулу восстановления дифференцированного сигнала $S^w{}_k$:

$$\frac{dS^w{}_k}{dt} = \sum_{m=1}^{NK}\sum_{n=1}^{N-1}((-2)a^{-3/2m}(a^{-m}k-n)e^{-1/2(a^{-m}k-n)} - a^{-m}(a^{-m}k-n)* \\ *a^{-m/2}(1-(a^{-m}k-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}k-n)^2})CTWS_{m,n} . \tag{26}$$

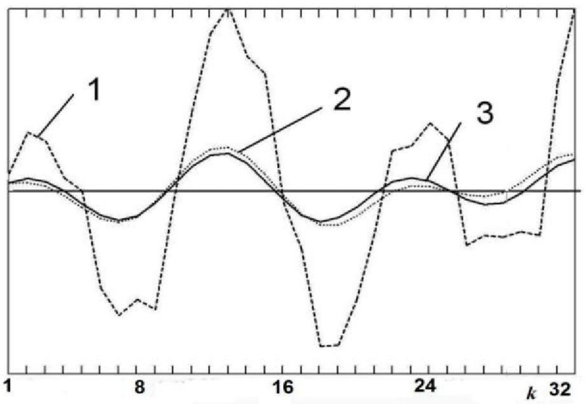

Рисунок 3 - Значения производной, вычисленной по разностной схеме - $S_{t,k}$, 2 - значения аналитической производной - $\frac{dS_k}{dt}$; 3 - значения производной, вычисленной с использованием вейвлет-преобразования - $\frac{dS^w_k}{dt}$

На рис. 3 приведен результат дифференцирования с использованием вейвлет-преобразования и разностной схемы, который дает нам право сделать вывод о том, что производная зашумленного сигнала успешно восстановлена при помощи вейвлет-преобразования.

Для оценки точности дифференцирования дисперсия ошибки восстановления рассчитывалась в соответствии со следующими выражениями:

$$D_1 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dS(t_k)}{dt} - S_{t,k}\right)^2, \; D_2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dS^w{}_k}{dt} - \frac{dS_k}{dt}\right)^2, \qquad (27)$$

где D_1 - дисперсия ошибки для разностной схемы вычисления производной, D_2 - дисперсия ошибки для сигнала, дифференцированного с использованием вейвлет-преобразования.

На рис.4. приведены результаты вычислительного эксперимента – зависимость дисперсий D_1, D_2 от дисперсии белого гауссовского шума $D_ш$.

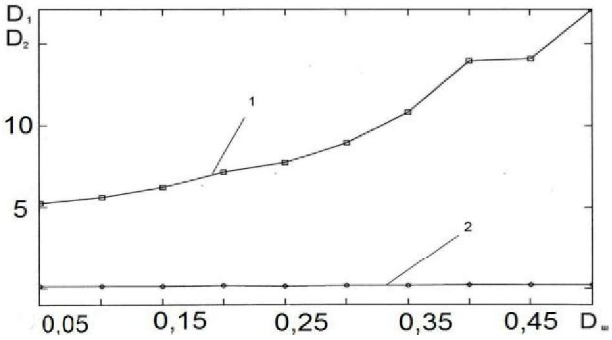

Рисунок 4 - Дисперсия для разностной схемы вычисления производной - D_1, 2 - дисперсия для сигнала, дифференцированного с использованием вейвлет-преобразования - D_2

Предложенный метод вейвлет-преобразования дает возможность дифференцировать результаты измерений с меньшей погрешностью, чем разностная схема. Это хорошо видно из рис. 4. При зашумленном сигнале разностная схема дифференцирования начинает давать значительную погрешность, а вейвлет-преобразование восстанавливает производную сигнала. При восстановлении дифференцированного сигнала использовалось ограниченное число вейвлет-коэффициентов, что дает возможность фильтровать сигнал от шума с минимальными вычислительными затратами. При этом погрешность дифференцирования практически не зависит от дисперсии шума (погрешности измерений).

Перечень ссылок

1. Самарский А.А., Гулин А.В.Численные методы:Учеб. пособие для вузов.–М.:Наука, 1989.
2. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет- преобразования. – СПб.:ВУС, 1999.
3. Леваль Ж. Введение в анализ данных с применением непрерывного вейвлет-преобразования / Пер. с англ; под ред. В.Г. Грибунина – СПб.: АВТЭКС, 2002.
4. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002.

УДК 681.5:66.0

АППАРАТНО-ПРОГРАММНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОКИНЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭНЕРГОНАСЫЩЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Вдовина Н.А., аспирант; Буйновский Д.С., студент; Тюрин О.Г., д.т.н.
(Южно-Российский государственный технический университет, г. Новочеркасск, Россия)

Известно [1], что энергонасыщенные материалы (ЭМ) как полимерные композиции относятся к классу веществ, имеющих экзотермический эффект термического разложения. Для