УДК 517.5

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Н. П. Волчкова,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
Донецкий национальный технический университет,
г. Донецк,
e-mail: volna936@gmail.com
Вит. В. Волчков,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Донецкий национальный университет,
г. Донецк

В статье рассматривается вопрос о полноте системы $\left\{J_{\nu}\left(\lambda_n x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *– занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя* J_{ν}, $\nu \geq -1/2$. *Обсуждаются известные доказательства полноты, основанные на теории вычетов и методе решения краевых задач для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка с помощью функции Грина. Приводится новое доказательство теоремы о полноте методами теории целых функций. Описанный метод применим к решению задач о полноте других систем специальных функций. Его можно использовать в учебном процессе для студентов математических специальностей университетов.*

Ключевые слова: *цилиндрические функции, полнота системы, обучение математике в университете.*

Постановка проблемы. Большое число различных задач, относящихся к разным разделам математической физики, гармонического анализа, интегральной геометрии и к самым разнообразным приложениям, решается с помощью свойств бесселевых функций. Как правило, они возникают в вопросах, связанных с круглыми или цилиндрическими телами. Это объясняется тем, что решение уравнений математической физики, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, методом разделения переменных приводит к дифференциальному уравнению второго порядка, которое используется для определения функций Бесселя.

В настоящее время функции Бесселя хорошо изучены. Как известно, основой всей теории рядов Фурье-Бесселя является свойство полноты системы

$$\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя J_ν, $\nu \geq -1/2$. Оно означает, что всякая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx = 0, \quad n = 1,2,...,$$

равна нулю тождественно. В имеющейся учебной литературе это утверждение обычно доказывается с помощью аппарата функционального анализа (см., напр., [4]). В научных монографиях содержатся также доказательства, которые основываются на методах комплексного анализа, а именно, – контурном интегрировании и теории вычетов (см. [2]). С методической точки зрения представляют интерес другие доказательства полноты системы (1). В частности, для студентов математических специальностей университетов было бы весьма поучительно продемонстрировать здесь методы теории целых функций.

Анализ актуальных исследований. Наиболее подробным руководством по теории бесселевых функций является известный трактат Г.Н. Ватсона «Теория бесселевых функций» [2]. Он содержит детальное и полное изложение основных исследований в этой области.

Отдельные аспекты указанной теории рассматриваются во многих книгах. Основным свойствам бесселевых функций посвящены разделы различных курсов математической физики (см. [4], [7], [11]). Наряду с этим изучению бесселевых функций уделяется серьезное внимание в монографиях по специальным функциям. Это относится, например, к книге «Курс современного анализа» Е.Т. Уиттекера и Г.Н. Ватсона [13], книге А.Ф. Никифорова и В.Б. Уварова «Специальные функции математической физики» [9], монографии Н.Я. Виленкина «Специальные функции и теория представлений групп» [3] и др.

Следует отметить известную книгу Г.П. Толстова [12], которая является хорошим учебным руководством по теории рядов Фурье-Бесселя. Применение аппарата теории функций комплексного переменного и, в частности, контурного интегрирования к задачам теории бесселевых функций отражено в книге М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата [8]. Ряд глубоких связей теории цилиндрических функций с проблемами интегральной геометрии обнаружено в недавних монографиях В.В. Волчкова и Вит.В. Волчкова [14]-[16]. В широко известной книге Б.Г. Коренева [6] бесселевы функции изучаются с точки зрения их приложений к решению различных физических задач. Имеется также обширная справочная литература, содержащая формулы и таблицы (см., например, [1], [10]).

Во многих из перечисленных источников свойство полноты системы (1) и теорема о разложении функции f в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu\left(\lambda_n x\right) \tag{2}$$

приводятся без доказательства. Первая попытка строгого доказательства разложения (2) имеется в работах Ганкеля. Более полное исследование дал Шлефли. Обобщение рядов (2) на случай, когда $\{\lambda_n\}$ – положительные нули функции $xJ'_\nu(x) + HJ_\nu(x)$, рассматривал Дини. Эти результаты описаны в упомянутой выше монографии Г.Н. Ватсона [2] и опираются на ряд лемм, которые доказываются с помощью комплексного интегрирования и теоремы Коши о вычетах. Другие авторы не используют комплексный анализ и проводят свои доказательства с помощью теории интегральных уравнений. Например, в [4], [7] построения ведутся на основе метода решения краевых задач для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка с помощью функции Грина. Этот метод приводит дифференциальное уравнение с собственными значениями к симметрическим интегральным уравнениям и дает (согласно теории Гильберта-Шмидта) решение задач о существовании системы собственных функций, о полноте этой системы и о разложении по собственным функциям.

Отметим, что важный частный случай представления (2) получается при $\nu = \pm\frac{1}{2}$. Он сводится к соответствующим вопросам для классической тригонометрической системы и разбирается практически в каждом учебнике по математическому анализу (см., например, [5]).

Цель статьи – *получить доказательство теоремы о полноте системы (1) с помощью свойств целых функций.*

Изложение основного материала. Обозначим через $L[0,1]$ пространство измеримых и интегрируемых по Лебегу функций на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. *Пусть* $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $f \in L[0,1]$ *и*

$$\int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)dx = 0 \qquad \text{для любого} \qquad n = 1,2,\dots . \qquad (3)$$

Тогда f *является нулевой функцией на* $[0,1]$.

Доказательство теоремы 1 требует некоторой подготовки. Перечислим сначала хорошо известные свойства бесселевых функций, которые будут использоваться ниже.

1) Имеет место разложение в степенной ряд

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad (4)$$

где Γ – гамма-функция. В частности,

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,, \qquad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,. \tag{5}$$

2) Пусть $\operatorname{Re}\nu > -1/2$. Тогда

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{iuz}\left(1-u^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du\,. \tag{6}$$

Отметим, что формула (6) известна как интегральное представление Пуассона.

3) Пусть целая функция $I_\nu(z)$ определена равенством

$$I_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)2^{2k+\nu}}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\pi)$ при $z\to\infty$, $|\arg z|<\pi-\varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение

$$I_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^{\nu+\frac{3}{2}}}\right). \tag{7}$$

4) Пусть $\nu>-1$. Тогда функция $I_\nu(z)$ имеет бесконечно много нулей. Все нули $I_\nu(z)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно нуля. Кроме того, $I_\nu(0)>0$.

Следующее утверждение является классическим принципом Фрагмена-Линделёфа.

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) функция f голоморфна внутри угла раствора $\alpha\pi$, где $\alpha\in(0,2)$, и f непрерывна в замыкании этого угла;

б) на сторонах угла выполнена оценка

$$|f(z)|\le M\,, \tag{8}$$

где M *– некоторая константа;*

в) существует число $\rho \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ *такое, что*

$$f(z) = O\left(e^{|z|^{\rho}}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty \quad \text{внутри угла.}$$

Тогда оценка (8) справедлива при всех z *из указанного угла.*

Лемма 2. *Пусть* $\nu \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ *и* $0 \leq k < \nu + \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^{\nu}} \left(\frac{i}{z}\right)^{k} \int_{-1}^{1} e^{iuz} \frac{d^{k}}{du^{k}} \left(\left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right) du. \tag{9}$$

Доказательство. Из интегрального представления (6) имеем

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^{\nu}} \int_{-1}^{1} e^{iuz} \left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du. \tag{10}$$

Интегрируя (10) k раз по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} e^{iuz} \left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du = \int_{-1}^{1} \left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \frac{d\left(e^{iuz}\right)}{iz} = \frac{i}{2} \int_{-1}^{1} e^{iuz} \frac{d}{du} \left(\left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right) du =$$

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{2} \int_{-1}^{1} e^{iuz} \frac{d^{2}}{du^{2}} \left(\left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right) du = \cdots = \left(\frac{i}{z}\right)^{k} \int_{-1}^{1} e^{iuz} \frac{d^{k}}{du^{k}} \left(\left(1 - u^{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right) du.$$

Отсюда и из (10) следует (9).

Далее символами $c(\nu)$, $c_1(\nu)$, $c_2(\nu)$, $c_3(\nu)$,… будут обозначаться константы, зависящие только от ν.

Лемма 3. *Пусть* $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $f \in L[0,1]$. *Тогда*

$$\left| \int_{0}^{1} x^{\nu+1} f(x) J_{\nu}(zx)\, dx \right| \leq \frac{c(\nu) e^{|\operatorname{Im} z|}}{\left(1 + |z|\right)^{[\nu]}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

где $[\nu]$ *– целая часть числа* ν **.**

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1 случай: $\nu \ge 0$. Используя лемму 2 при $k = \nu$, имеем

$$J_\nu(zx) \le \frac{c_1(\nu)}{(x|z|)^{[\nu]}}\, e^{|\mathrm{Im}\, z|}, \quad z \ne 0, \quad 0 < x \le 1.$$

Пусть $|z| \ge 1$. Тогда

$$\frac{1}{|z|} \le \frac{2}{1+|z|}$$

и

$$\left| \int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx \right| \le c_1(\nu) \int_0^1 x^{\nu-[\nu]+1} |f(x)| dx\, \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{|z|^{[\nu]}} \le c_2(\nu) \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{(1+|z|)^{[\nu]}}. \quad (12)$$

Если $|z| \le 1$, то учитывая голоморфность интеграла в левой части (11), получаем

$$\left| \int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx \right| \le c_3(\nu) \le c_4(\nu) \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{(1+|z|)^{[\nu]}}. \quad (13)$$

Комбинируя (12) и (13), приходим к (11).

2 случай: $-\frac{1}{2} < \nu < 0$. Из (6) видно, что

$$|I_\nu(zx)| \le c_5(\nu) e^{|\mathrm{Im}\, z|}, \quad 0 \le x \le 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда

$$\left| \int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx \right| \le c_5(\nu) e^{|\mathrm{Im}\, z|} \int_0^1 x^{\nu+1} |f(x)| dx \le c_6(\nu) e^{|\mathrm{Im}\, z|} \le$$

$$c_6(\nu)(1+|z|) e^{|\mathrm{Im}\, z|} = c_6(\nu) \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{(1+|z|)^{[\nu]}},$$

что и требовалось.

3 случай: $\nu = -\frac{1}{2}$. Согласно формуле (5) находим

$$\int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ f(x)\ \frac{J_{-1/2}(zx)}{(zx)^{-1/2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \sqrt{x}\ f(x)\cos(zx)dx.$$

Как и во втором случае, отсюда следует оценка (11).

Таким образом, лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Условие (3) можно переписать в виде

$$\int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(\lambda_n x)dx = 0, \quad n = 1,2,....$$

Отсюда и из свойств нулей функции Бесселя следует, что функция

$$F(z) = \frac{\int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx}{I_\nu(z)} \tag{14}$$

является четной целой функцией. При этом лемма 3 и представление (10) показывают, что целая функция F является отношением двух целых функций порядка не выше первого. Поэтому F также имеет порядок не выше первого.

Далее, учитывая, что

$$|\cos z| \sim \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2} \qquad \text{при} \qquad \operatorname{Im} z \to \infty,$$

на основании (7) получаем

$$|I_\nu(z)dx| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}, \qquad \operatorname{Im} z \to \infty. \tag{15}$$

Ввиду оценки (15) и леммы 3, из (14) делаем вывод, что

$$F(z) = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^{[\nu]}}\ \frac{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}{e^{|\operatorname{Im} z|}}\right) = O\left(|z|^{\nu-[\nu]+\frac{1}{2}}\right) = O\left(|z|^{\frac{3}{2}}\right) \tag{16}$$

при $z \to \infty$ по прямым $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re} z$.

Рассмотрим угол

$$\Lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Функция

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{(1+z)^{3/2}}$$

голоморфна в замыкании угла Λ и $|\Phi(z)| \le const$ на границе Λ (см. (16)). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$

$$\Phi(z) = O\left(e^{|z|^{1+\varepsilon}}\right), \qquad z \in \Lambda\,,$$

так как порядок F не превосходит единицы.

Применяя лемму 1 при $\alpha = \dfrac{1}{2}$, заключаем, что

$$|F(z)| = O\left((1+|z|)^{\frac{3}{2}}\right), \qquad z \in \Lambda.$$

Повторяя подобные рассуждения для углов $\pm i\Lambda.,\ -\Lambda$ видим, что оценка (16) справедлива при $z \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$. В силу теоремы Лиувилля это означает, что F является многочленом не выше первой степени. Поскольку функция F четная, то она совпадает с константой. Итак,

$$\int_0^1 x^{\nu+1} f(x) I_\nu(zx)dx \equiv cI_\nu(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Равенство (17) эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)2^{2k+\nu}} \int_0^1 x^{2k+\nu+1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c\ z^{2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)2^{2k+\nu}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

(см. (4)). Сравнивая коэффициенты при степенях z, получаем

$$\int_0^1 x^{2k+\nu+1} f(x)dx = c, \qquad k = 0,1,2,\ldots\ . \tag{18}$$

Сдвиг параметра k на единицу в (18) приводит к соотношению

$$\int_0^1 x^{2k} h(x)dx = \int_0^1 x^{2k+\nu+3} f(x)dx - \int_0^1 x^{2k+\nu+1} f(x)dx = 0,$$

где

$$h(x) = \left(x^2 - 1\right)\, x^{\nu+1} f(x), \quad x \in [0,1].$$

Продолжим функцию h четным образом на $[-1,0]$. Тогда

$$\int_{-1}^1 x^n h(x)dx = 0 \quad \text{для любого} \quad n = 0,1,\ldots\ .$$

Отсюда $h = 0$, а значит, функция f также является нулевой. Теорема 1 доказана.

Выводы. Теорема 1 означает, что система функций $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^\infty$ полна в пространстве $L^2[0,1]$ с весом x. При $\nu = \frac{1}{2}$ рассуждения выше и формула (5) показывают, что система $\{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$ является полной в пространстве $L^2[0,\pi]$. Аналогично, при $\nu = -\frac{1}{2}$ получаем полноту системы $\{\cos(2n-1)x\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L^2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Приведенный метод применим также для доказательства полноты других систем функций (см. [14]-[16]). Его целесообразно использовать в учебном процессе при чтении специальных курсов.

1. *Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука. 1973. – 294 с.*
2. *Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Ч. 1. /Г. Ватсон. – М.: ИЛ. 1947. – 799 с.*
3. *Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.*
4. *Владимиров В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.*
5. *Зорич В.А. Математический анализ/ В.А. Зорич. – М.: Наука. 1984. – 640 с.*

6. *Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций/ Б.Г. Коренев. – М.: Наука. 1971. – 288 с.*
7. *Курант Р. Методы математической физики. Т 1/ Р. Курант, Д. Гильберт. – М.:Гостехиздат. 1951. – 538 с.*
8. *Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука. 1987. – 688 с.*
9. *Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики/ А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – М.: Наука. 1978. – 320 с.*
10. *Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции/ А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука. 1983. – 750 с.*
11. *Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Гостехиздат. 1966. – 470 с.*
12. *Толстов Г.П. Ряды Фурье/ Г.П. Толстов. – М.: Наука. 1980. – 382 с.*
13. *Уиттекер Е.Т. Курс современного анализа. Т. 1, 2/ Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон. – М.: Физматгиз. 1963. – 520 с.*
14. *Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations/ V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer. 2003. – 454 p.*
15. *Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group/ V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer. 2009. – 671 p.*
16. *Volchkov V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces/ V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser-Springer. 2013. – 592 p.*

Резюме. **Волчкова Н. П., Волчков Вит. В. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ.** *В статье рассматривается вопрос о полноте системы* $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – *занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя* J_ν, $\nu \geq -1/2$. *Обсуждаются известные доказательства полноты, основанные на теории вычетов и методе решения краевых задач для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка с помощью функции Грина. Приводится новое доказательство теоремы о полноте методами теории целых функций. Описанный метод применим к решению задач о полноте других систем специальных функций. Его можно использовать в учебном процессе для студентов математических специальностей университетов.*

Ключевые слова: *цилиндрические функции, полнота системы, обучение математике в университете.*

Abstract. **Volchkova N. P., Volchkov Vit. V. DIFFERENT APPROACHES TO THE PROOF OF THE COMPLETENESS OF THE BESSEL FUNCTIONS SYSTEM.** We consider the question on the completeness of the system $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^{\infty}$, where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ is the sequence of all positive zeros of the Bessel function J_ν ($\nu \geq -1/2$) indexed in increasing order. The well-known proofs of the completeness based on the residue theory and the method of solution of boundary value problems for self-adjoint differential operators of the second order by means of the Green function are discussed. A new proof of the completeness theorem based on the properties of entire functions is presented. It includes the following:

1) definition of the even entire function F of special form connected with function $I_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z)$;
2) investigation of the growth of the function F on the complex plane;
3) refinement of the growth of the function F on bisectrixes of co-ordinate angles;
4) application of the Phragmen-Lindelöf principle;
5) application of Liouville's theorem for entire functions;
6) reduction of the problem to the completeness of the system $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Realization of this approach is based on well-known properties of the Bessel functions. In particular, the decomposition in a power series, the Poisson integral representation, the asymptotic expansion as well reality and simplicity of the zeros play an important role here. The described method is applicable to the solution of problems on the completeness of other systems of special functions. It can be used in an educative process for students of mathematical specializations of Universities.

Key words: *cylindrical functions, completeness of a system, mathematics teaching at the University.*

References

1. *Bateman H. Higher Transcendental Functions. V. 2 / H. Bateman, A. Erdelyi. – New York.: MC Graw-Hill Book Company, INK. 1953. – 294 p.*
2. *Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. V. 1. / G.N. Watson. – Moscow: IL. 1947. – 799 p.*
3. *Vilenkin N.Y. Special Functions and the Theory of Group Representations / N.Y. Vilenkin. – Moscow: Nauka. 1991. – 576 c.*
4. *Vladimirov V. S. The Equations of Mathematical Physics/ V. S. Vladimirov. – Moscow: Nauka. 1981. – 512 p.*

5. *Zorich V.A. Mathematical Analysis / V.A. Zorich. – Moscow: Nauka. 1984. – 640 p.*
6. *Korenev B.G. Introduction to the Theory of Bessel Functions / B.G. Korenev. – Moscow: Nauka. 1971. – 288 p.*
7. *Courant R. Methods of Mathematical Physics. V. 1/ R. Courant, D. Hilbert. – Moscow: Gostekhizdat. 1951. – 538 p.*
8. *Lavrentiev M.A. Methods of the Theory of Functions of Complex Variables / M.A. Lavrentiev, B.V. Shabat. – Moscow: Nauka. 1987. – 688 p.*
9. *Nikiforov A.P. Special Functions of Mathematical Physics / A.P. Nikiforov, V.B. Uvarov. – Moscow: Nauka. 1978. – 320 p.*
10. *Prudnikov A.P. Integrals and Series. Special Functions / A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: Nauka. 1983. – 750 p.*
11. *Tikhonov A.N. Equations of Mathematical Physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskiy. – Moscow: Gostekhizdat. 1966. – 470 p.*
12. *Tolstov G.P. Fourier Series / G.P. Tolstov. – Moscow: Nauka. 1980. – 382 p.*
13. *Whitteker E.T. Course of Modern Analysis. T. 1, 2/ E.T. Whitteker, G.N. Watson. – Moscow: Phismathgiz. 1963. – 520 p.*
14. *Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations/ V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer. 2003. – 454 p.*
15. *Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group/ V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer. 2009. – 671 p.*
16. *Volchkov V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces/ V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Birkhäuser-Springer. 2013. – 592 p.*