УДК 517.5

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОШИ

Волчкова Н.П.

Донецкий национальный технический университет

Аннотация. *Рассматриваются различные подходы к доказательству классической интегральной теоремы Коши. Предложен новый метод доказательства указанной теоремы, основанный на свойствах оператора свертки.*

I. Вступление. Одним из наиболее важных результатов теории функций комплексного переменного является интегральная теорема Коши. Она утверждает (см., например [1]), что всякая функция f, голоморфная в односвязной области D комплексной плоскости C, имеет нулевой интеграл по любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в D. Доказательство этого факта легко следует из формулы Грина, если дополнительно предположить, что производная f' является непрерывной в области D. Как известно, производная голоморфной функции всегда является голоморфной и, следовательно, непрерывной функцией. Однако, указанный вывод уже опирается на интегральную теорему Коши. Чтобы избежать «логического круга», необходимо дать доказательство интегральной теоремы Коши, не предполагающее непрерывность f'. Такое доказательство впервые было дано Э. Гурса и затем упрощено А. Прингсхеймом. Оно проводится по следующему плану (см., например, [2]):

1 шаг. γ - контур произвольного треугольника, лежащего в области D;

2 шаг. γ - контур произвольного многоугольника из D;

3 шаг. γ - произвольная кривая.

На первом шаге применяется обобщенный принцип Кантора о вложенных отрезках и тот факт, что голоморфную функцию «в малом» можно заменить линейной. Второй шаг требует рассмотрения различных случаев, связанных с разбиением многоугольника на треугольники. Наконец, общий случай основан на аппроксимационной лемме Гурса. Отметим, что аккуратная реализация указанного плана является весьма трудоемким процессом. Другое доказательство интегральной теоремы Коши, использующее понятие гомотопии, можно найти в [3].

II. Постановка задачи. В связи с изложенным выше, представляют интерес иные доказательства интегральной теоремы Коши, не использующие громоздких геометрических построений и сложных топологических конструкций.

III. Результаты. В данной работе приводится новое доказательство указанной теоремы, основанное на простейших свойствах оператора свертки.

Интегральная теорема Коши. Пусть функция f голоморфна в односвязной области D комплексной плоскости C. Тогда для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в области D, выполняется равенство

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 .$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, φ_{ε} - функция на C со следующими свойствами:

(i) φ_{ε} - бесконечно дифференцируема на C как функция двух вещественных переменных;

(ii) $\varphi_{\varepsilon} \geq 0$,

(iii) $\varphi_{\varepsilon}(z) = 0$ при $|z| \geq \varepsilon$;

(iv) $\int_{|z|\leq\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}(z)dm(z) = 1$, где $dm(z) = dxdy$ - мера Лебега на C.

Примером такой функции является «шапочка»

$$z \to \begin{cases} c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |z|^2}}, & |z| < \varepsilon, \\ 0, & |z| \ge \varepsilon \end{cases}$$

при подходящем выборе константы c_ε (см., например, [4]). Рассмотрим свертки

$$(f * \varphi_\varepsilon)(z) = \int_C f(w)\varphi_\varepsilon(z-w)dm(w) = \int_{|u| \le \varepsilon} f(z-u)\varphi_\varepsilon(u)dm(u).$$

Эта функция является бесконечно дифференцируемой на множестве $D_\varepsilon = \{z \in D : dist(z, \partial D) > \varepsilon\}$. (Здесь, как обычно, ∂D - граница области D, $dist(A, B)$ - расстояние между множествами A и B). При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ по формуле Грина имеем

$$\int_\gamma (f * \varphi_\varepsilon)(z)dz = 2i \iint_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f * \varphi_\varepsilon)dm(z), \tag{1}$$

где $\operatorname{int}\gamma$ - внутренность кривой γ. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f * \varphi_\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} * \varphi_\varepsilon$$

в смысле обобщенных функций, из (1) и голоморфности функции f заключаем, что

$$\int_\gamma (f * \varphi_\varepsilon)(z)dz = 0. \tag{2}$$

Из свойств функции φ_ε следует, что при $\varepsilon \to +0$ функции $f * \varphi_\varepsilon$ сходятся равномерно к f на компактах в D. Поэтому, переходя в (2) к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано.

В заключение отметим, что еще одно доказательство интегральной теоремы Коши можно получить, используя гладкостные свойства решений эллиптических дифференциальных операторов (см. [5]).

IV. Выводы. В работе дан анализ различных доказательств классической интегральной теоремы Коши, рассматриваемой в теории функций комплексного переменного. Предложен новый метод доказательства указанной теоремы, основанный на свойствах операции свертки.

Литература

1. Сидоров Ю.В. , Федорюк М.В. , Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.

2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1967. – Т. 1.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Ч. 1.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

5. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965.