Постановка и методы решения конечных игр

Методы теории игр рассматривают так называемые конфликтные ситуации, где сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих разные цели.

Наибольшее распространение получили парные игры. Стратегией стороны называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действия в сложившейся ситуации; оптимальная стратегия обеспечивает наилучший исход (максимальный выигрыш, минимальный проигрыш) одной из зачач теории игр — выявление оптимальных стратегий противоборствующих сторон. При этом рассматриваются ситуации, имеющие элемент неопределенности, что отражается и на достоверности окончательных решений.

Самый простой случай — конечная парная игра. Допустим, что в ней участвуют две противоборствующие стороны со стратегиями

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \text{ и } B = \{B_1, B_2, \ldots B_m\}.$$

Выигрыш стороны А является проигрышем стороны В. Обозначим исход игры А. Таким образом, сторона А, выбирая стратегию А, (или совокупность стратегий), стремится максимизировать выигрыш а сторона В — минимизировать.

Противопоставляя каждой стратегии А, стратегию В, с исходом a_{ij} игру можно представить в виде прямоугольной матрицы

		B				
		B_1	B_2	B_3	...	B_m
A	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1m}
	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2m}
	...	...	...	...	...	...
	A_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nm}

Матрицу игры изобразим кратко: $\| a_{ij} \|$. Анализ проводится на основе принципа осторожности: сторона А выбирает стратегию, при которой минимальный выигрыш максимален, — «поступает так, чтобы при наихудшем для тебя поведении противоборствующей стороны получить максимальный выигрыш».

Аналогично строит свое поведение и сторона В — максимальный проигрыш должен быть минимальным.

Для реализации указанного принципа анализа матрицы конечной игры n x m устанавливаем для каждой строки $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$

и затем из чисел a_i, выбираем максимальное значение

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij}$$

(α — нижняя цена игры).

Для стороны B анализ проводим подобным образом.

Для каждой стратегии B_j по сторонам находим максимальное значение

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

а затем из их числа выбираем минимальную величину

(β — верхняя цена игры). $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$

В случае, если $\alpha = \beta$, игра решается в чистых оптимальных стратегиях и называется игрой с седловой точкой.

В этом случае можно указать для сторон А и й В оптимальные стратегии с исходом $\alpha = \beta = \gamma$.

Пример.
Дана матрица конечной игры 2х3:

		B		
		B_1	B_2	B_3
A	A_1	−1	−2	3
	A_2	2	−3	0

Элементы матрицы a_{ij} выражают выигрыш (положительное число) и проигрыш (отрицательное) для стороны А. Прибавим к каждому элементу матрицы a_{ij} положительное число три (цена игры изменится на три, а свойства матрицы не изменятся) и получим преобразованную матрицу

		B			α_i
		B_1	B_2	B_3	
A	A_1	2	1	6	1
	A_2	5	0	3	0
β_i		5	1	6	

Рассматривая исход стратегий A_1 и A_2, находим

$$\alpha_1 = \min_j a_{ij} = 1 \qquad \alpha_2 = \min_j a_{ij} = 0$$

и затем, исходя из принципа минимакса, $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 1,$

т.е. наиболее осторожную стратегию стороны A – A_1.

Также анализируем игру с позиций стороны B:

$$\beta_1 = \max_i a_{ij} = 5, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 6$$

и, следовательно

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 1$$

Таким образом, $\alpha = \beta = \gamma$. Это игра с седповой точкой.

Оптимальными стратегиями сторон являются A_1 и B_2.

В этом случае исход удовлетворяет наилучшим образом принципу осторожности минимаксу и максимину.

В тех случаях, когда $\alpha \neq \beta$, игра называется игрой со смешанными стратегиями. Целесообразно в оптимальном варианте чередовать в игре нескольких стратегий Ai и Bi.

Задача анализа игры — найти частоты (вероятности) принятия стратегий Ai и Bi.

Оптимальная стратегия определяется так:

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}, \qquad B^0 = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_m \\ q_1, q_2, \ldots, q_m \end{pmatrix},$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_m = 1.$$

Цена игры γ удовлетворяет неравенству a $\alpha<\gamma<\beta$, т.е. стороны стремятся к максимально возможному среднему выигрышу (минимально возможному среднему проигрышу).

Поиск оптимальной смешанной стратегии для игрока А связан с решением системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n \geq \gamma; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n \geq \gamma; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots; \\ a_{1m}p_1 + a_{2m}p_2 + \ldots + a_{nm}p_n \geq \gamma; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Поделим левую и правую части каждого уравнения на γ получим новую систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{1}{\gamma} \to \min; \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \geq 1; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots; \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \geq 1, \end{cases}$$

$x_i = \dfrac{p_i}{\gamma}$ - неотрицательные переменные.

Так как γ средний гарантированный выигрыш, который надо максимизировать

(или $\frac{1}{\gamma}$ — минимизировать),

то система уравнений представляет собой модель линейного программирования, в которой необходимо определить оптимальные x_i, (или p_i при данном γ).

Оптимальная стратегия стороны B находится уже из системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \dfrac{1}{\gamma} \to \max; \\ a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{1m} y_m \le 1; \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2m} y_m \le 1; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots; \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nm} y_{mn} \le 1, \end{cases}$$

Где $$y_j = \frac{q_j}{\gamma}$$

Искомыми являются в данной задаче y_i (или q_i, при определенной γ , гарантирующей минимальный средний проигрыш).

Пара задача линейного программирования по определению оптимальных стратегий

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \dots, & A_n \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B^0 = \begin{pmatrix} B_1, & B_2, & \dots, & B_m \\ q_1, & q_2, & \dots, & q_m \end{pmatrix}$$

относится к двойственным задачам линейного программирования. Таким образом, решение игры n x m эквивалентно решению задачи линейного программирования. Более того, любая из этих задач может быть приведена в соответствие игре

Во многих практически важных случаях игра может быть упрощена до игры 2x2, если в заданной матрице имеются так называемые доминирующие стратегии.

Стратегия Ai является доминирующей над стратегией Ак, если в i-й строке все выигрыши a_{ij} не меньше, чем в соответствующих клетках k-й строки.

Для стороны В доминирующей является та стратегия, при которой везде стоят не большие a_{ij} чем в соответствующих клетках другой.

Например, в рассмотренном примере стратегия B_2 является дотирующей над стратегией B_3 и матрицу игры 2x3 можно упростить, опустив стратегию B_3, как заведомо худшую, чем B_2 для стороны В.

Метод игр может быть проиллюстрирован варианта сооружения или реконструкции шламохранилища.

Поскольку вышеуказанная задача многокритериальная (несколько элементов Ci системы, каждый из которых может быть выбран в качестве самостоятельного критерия безопасности) и решение принимается в условиях неопределенности, то для ее решения можно использовать метод игр и статистических решений.

В условиях неопределенности используются критерии Лапласа, Гурвица, Сэвиджа, минимакса.

Основное различие между указанными критериями определяется стратегией лица, принимающего решение в условиях большой неопределенности

Например, критерий Лапласа, приписывающий всем возможным состояниям равные вероятности, более оптимистичен, чем принцип минимакса, рассчитывающий на лучший вариант среди худших исходов.

Критерий Гурвица можно использовать при различных подходах — от наиболее оптимистического до наиболее пессимистического.

Перечисленные критерии, несмотря на их количественную природу, отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решение.

К сожалению, не существует общих правил оценки применимости того или иного критерия, так как поведение (часто меняющееся) лица, принимающего решение, обусловленное неопределенностью ситуации, по всей видимости, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Все критерии, перечисленные выше, базируются на том, что лицу (группе лиц), принимающему решение, не противостоит разумный противник. Когда в роли противника выступает «природа», нет оснований предполагать, что она стремится причинить вред лицу, принимающему решение.

Данные, необходимые для принятия решений в условиях неопределенности. обычно задают в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы — возможным состояниям системы.

Каждому действию Ai и каждому возможному состоянию Bj соответствует результат (исход), определяющий выигрыш a_{ij} (или потери r_{ij}) при выборе данного действия и реализации данного состояния.
Рассмотрим несколько вариантов принятия решений в условиях неопределенности
.

Сторона А, принимающая решение, имеет две стратегии:

A_1 - заниженная оценка безопасности системы(это реализация принципа осторожности, пессимизма). Обычно это лучший образ действия (принцип максимина, критерий Ваальда, Сэвиджа);

A_2 - завышенная оценка безопасности системы (это оптимизм при анализе факторов, влияющих на безопасность).

Сторона В характеризуется двумя состояниями:

B_1 - безаварийное и

B_2 — аварийное.

Затраты на обеспечение и поддержание безаварийного состояния или на преодоление последствий аварии изменяются в пределах от

C_{min} до C_{max}.

Эти величины можно пронормировать

$$r = \frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} \in [0, 1]$$

Все элементы матрицы r_{ij} можно взять в долях 1 или, после умножения всех элементов матрицы на 10, $r_{ij} < 10$.

В рассмотренной ситуации матрица игры может быть записана в виде

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	r11	r12
	A_2	r21	r22

В этой таблице можно допустить (экспертная оценка) в первом случае

$r_{22} > r_{21}$, $r_{22} > r_{11}$, $r_{11} < r_{12} < r_{21}$.

В оценочных цифрах (можно рассмотреть, как это сделано ниже, различные варианты) матрица игр имеет вид

		B		α
		B_1	B_2	
A	A_1	4	6	4
	A_2	3	10	3
β		4	10	

Методы решения игр изложены в специальной литературе и поэтому здесь не рассматриваются.

Находим нижнюю цену игры

$$\alpha = \max_i \min_j r_{ij} = 4$$

и верхнюю цену игры

$$\beta = \min_j \max_i r_{ij} = 4 .$$

Это игра в чистых стратегиях, которая рекомендует использовать A_1, (заниженную оценку безопасности) и ориентирует на безаварийную эксплуатацию объекта.

Во втором варианте принятия решений можно рассмотреть ситуацию, когда

$$r_{22} > r_{11} > r_{12} > r_{21}.$$

Матрица игры в этом варианте имеет вид

		B		
		B_1	B_2	α
A	A_1	6	4	4
	A_2	3	10	3
β		6	10	

В данной ситуации нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i \min_j r_{ij} = 4$$

Верхняя цена игры

$$\beta = \min_j \max_i r_{ij} = 6 .$$

В данной ситуации $\alpha < \beta$ и, следовательно, решение может быть смешанным:

$$A^0 \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{Bmatrix}; \qquad B^0 \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{Bmatrix};$$

$$p_1 + p_2 = 1. \qquad q_1 + q_2 = 1.$$

Здесь p_i и q_j — частоты (вероятности) использования стратегий Ai Bi, для нахождения средних потерь γ ($\alpha < \gamma < \beta$) и p_i и q_j необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6p_1 + 3p_2 = \gamma \\ 4p_1 + 10p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6q_1 + 4q_2 = \gamma \\ 3q_1 + 10q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}.$$

Из первой системы уравнений находим

$$6p_1 + 3(1 - p_1) = 4p_1 + 10(1 - p_1),$$

Таким образом

$$p_1 = 0{,}78 \text{ и } p_2 = 0{,}22;\ \gamma = 5{,}33\ (\alpha < \gamma < \beta).$$

Из второй системы уравнений получим

$$6q_1 + 4(1 - q_1) = 3q_1 + 10(1 - q_1),$$

Таким образом

$$q_1 = 0{,}67,\ q_2 = 0{,}33,\ \gamma = 5{,}33.$$

Таким образом, в рассмотренном случае оптимальный образ действий может быть записан так:

$$A^0 \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}78 & 0{,}22 \end{Bmatrix}; \qquad B^0 \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}67 & 0{,}33 \end{Bmatrix}.$$

Предпочтение, хотя и не безоговорочно, и в этой ситуации отдается принятию решения с заниженной оценкой безопасности ($p1 = 0,78 > p2 = 0,22$), и ориентация также в большей степени на обеспечение безаварийной эксплуатации шламохранилища ($q1 = 0,67 > q2 = 0,33$).

В связи с полученным анализом методом игр, влияние неопределенности при оценке безопасности шламохранилища, на наш взгляд, представляет интерес рассмотрение двух решений по шламохранилищам

А1 — строительство нового шламохранилища;
А2- реконструкция существующего шламохранилища;

Матрица игры для обоснования решения в рассматриваемом случае содержит:

А1 — решение по строительству нового шламохранилища,
А2 -решение по реконструкции старого шламохранилища,
В1 — затраты на строительство или реконструкцию шламохранилища,
В2 — затраты на преодоление негативных последствий в случае возникновения аварии в шламохранилище.

Рассматриваются различные варианты соотношения затрат Cij при Ai, и Bj.

Так же, как и в предыдущем случае, проведено нормирование Cij« все элементы r_{ij} умножены на 10.

Допускается, что $r_{22} > r_{11},\ r_{11} > r_{12},\ r_{11} > r_{21},\ r_{12} < r_{21}.$

Проанализированы различные варианты решений с отношениями

$$n = \frac{r_{11}}{r_{12}}$$

$$m = \frac{r_{22}}{r_{21}}.$$

Варианты	1	2	3	4	5
n	1,16	1,14	1,75	1,8	2,0
m	2,5	2,2	2,0	1,8	1,5

Решение находилось тем же методом из принципа максимина:

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} r_{ij}$$

$$\beta = \min_{j} \max_{i} r_{ij}$$

Во всех пяти вариантах ситуация имеет смешанную игру. Результаты расчетов сведены в таблицу.

Вариант	A		B		γ	$\frac{n}{m}$
	p_1	p_2	q_1	q_2		
1	0,86	0,14	0,57	0,43	6,57	0,464
2	0,73	0,27	0,66	0,34	6,33	0,636
3	0,625	0,375	0,75	0,25	6,25	0,875
4	0,58	0,42	0,81	0,19	6,41	1,0
5	0,49	0,51	0,94	0,06	6,8	1,33

Рассмотрены самые различные варианты соотношений потерь при различных вариантах сочетания Ai, и Bj.

Это дает возможность проанализировать общие тенденции при обосновании решения Ai.

Во-первых, во всех случаях, кроме пятого варианта, предпочтение по безопасности (риску возникновения аварии и преодоления ее последствий) отдается решению по строительству нового шламохранилища. С точки зрения безопасности это легко обосновывается (рассредоточение нагрузки, повышенная надежность элементов сооружения, уменьшение масштабов негативного влияния экстремальных природных явлений — ураганов, бурь, землетрясений

При этом учитывается высокая степень (заниженная экспертная оценка) опасности аварии и различного рода нарушений безопасности (достаточно высокое значение q_2).

В пятом варианте предпочтение отдается (с очень малым преимуществом p_1=0,49 против p_2 = 0,51) выбору решения по реконструкции старого шламохранилища. Однако при этом следует обратить внимание, что доля влияния безопасности решения (q_1 = 0,86) ничтожно мала по сравнению с весом затрат на реконструкцию (q_1 = 0,94).

Этот вариант имеет, на наш взгляд, не очень высокий уровень достоверности.

Поэтому остается признать наиболее обоснованным с позиции уменьшения риска возникновения аварий на шламохранилище решение о строительстве нового сооружения.

Методы теории статистических решений

Теория статистических решений использует идеи теории игр.

Принципиальная разница в том, что неопределенная ситуация не имеет конфликтной окраски — никто никому не противодействует, но элемент неопределенности остается. Применительно к технологии неопределенность может быть связана например с неизвестностью погоды на предстоящий период.

Поэтому такая игра называется игрой с природой, или игрой статистика с природой, или Синтетической игрой.

Пусть сторона А располагает несколькими стратегиями

$$(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$$

в условиях недостаточной информации о природе, состояния которой могут быть охарактеризованы

$$B_1, B_2, \ldots, B_m.$$

Положительный исход (выигрыш) o,, заранее известен для каждой пары стратегий AiBj.

Кроме матрицы выигрышей в статистической игре статистик А должен располагать информацией о вероятностях состояний природы.

Задача состоит в выборе от стратегии поведения стороны А в рассматриваемой ситуации.

Упростим матрицу игры выбрасыванием из нее дублирующих стратегий (с той лишь разницей, что за природу этого делать нельзя, любая стратегия, в том числе и невыгодная B для самой природы).

После предварительного анализа исходной матрицы выигрышей переходим к матрице рисков.

Риском r_{ij} статистика при использовании стратегии Ai в условиях Bj называется разность между максимальным выигрышем, который может быть получен по данным матрицы выигрышей, и выигрышем, соответствующим данным Ai и Bj:

$$r_{ij} = \max_{i,j} a_{ij} - a_{ij}.$$

В теории статистических игр разработано несколько принципов выбора решений в условиях природных неопределенностей.

Байесовский принцип выбора оптимальной стратегии в теории статистических решений заключается в максимизации среднего выигрыша.

При выборе оптимальной стратегии можно исходить из минимизации среднего риска $\overline{r_{ij}}$

В теории статистических решений доказывается, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш $\overline{a_{ij}}$

совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск $\overline{r_{ij}}$

Применяется несколько критериев оптимальности выбора решений.

Согласно максиминному критерию Ваальда, в качестве оптимально выбирается стратегия Ai, при которой минимальный выигрыш по Bj, максимален по Ai

$$W = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Данный критерий ориентирует принимающего решение н максимального выигрыша в худших условиях. В связи с этим его называют критерием крайнего пессимизма.

Следующий критерий — критерий Сэвиджа — рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшую величину в самой неблагоприятной обстановке, т.е.

$$S = \max_i \min_j r_{ij} .$$

Сущность его — любыми путями избежать большого риска при принятии решения. Это также критерий крайнего пессимизма.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица рекомендует при выборе решения в условиях неопределенности не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. Он имеет вид

$$H = \max_i \left[\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right],$$

где λ— коэффициент, выбираемый субъективно из интервала между 0 и 1. При $\lambda = 0$ критерий H обращается в критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ — крайнего пессимизма.

Задача принимающего решение — назначить λ сообразно содержанию задачи.

Целесообразно анализировать игру с позиций различных критериев, и если рекомендации со всех позиций совпадают, то это подтверждает правильность принимаемого решения. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, противоречивы, то окончательное решение следует принимать с

Пример
Дана матрица игры:

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	7	4
	A_2	3	10

Требуется найти оптимальную стратегию игры исходя из критериев Ваальда. Сэвиджа и Гурвица (при λ = 0,5)

Решение.

Оптимальная стратегия по критерию Ваальда $W = \max_i \min_j a_{ij} = 4(A_1)$.

Оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа находим по матрице рисков:

		B		S
		B_1	B_2	
A	A_1	3	6	6
	A_2	7	0	7

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = 6(A_1) \ .$$

Оптимальная стратегия по критерию Гурвица (при разумном сочетании и оптимизма) λ = 0,5.

		B				
		B_1	B_2	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	$0{,}5 \min\limits_j a_{ij} + 0{,}5 \max\limits_j a_{ij}$
A	A_1	7	4	4	7	5.5
	A_2	3	10	3	10	6,5

Из этой таблицы видно что $H = \max\limits_i \left[0{,}5 \min\limits_j a_{ij} + 0{,}5 \max\limits_j a_{ij} \right] = 6{,}5$,

т.е. в этом случае лучшей оказывается стратегия A_2.
Таким образом, с теориям Ваальда и Сэвиджа лучшей является стратегия A_1 а по критерию Гурвица рекомендуется принять A_2. Право окончательного выбора остается за принимающим решение.

В случае, когда неопределенность Bj можно охарактеризовать вероятностью, при принятии решения стремятся выбрать ту стратегию, которая дает максимум для среднего значения выигрыша или, что одно и то же, минимум среднего риска

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{m} q_i a_{ij}\right\} \qquad \min\left\{\sum_{j=1}^{m} q_i r_{ij}\right\}.$$

В случаях, когда исход от стратегии Ai при одном и том же состоянии имеет вероятностный характер, число возможных стратегий следует увеличить.

В заключение необходимо отметить, что с точки зрения строгой обоснованности решения и достоверности полученного результата метод теории статистических решений является наилучшим по сравнению со всеми вышеизложенными. Однако всегда следует учитывать наличие неопределенности в задаче. Метод теории статистических игр рассматривает задачи, которые нельзя решить другими методами, и это обстоятельство подчеркивает его важность.

Пример .

В рассмотрим пример решения статистической игры в случае, когда вероятность плохой погоды B_1 по прогнозу $q_1 = 0,4$, а хорошей B2 — $q_2 = 0,6$. В зависимости от Bj исходы технологических операций Ai различны, их положительный эффект a_{ij} Матрица игры имеет вид

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	8	2
	A_2	5	12

Составим матрицу рисков:

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	4	10
	A_2	7	0

Средний риск для Ai равен

$$\bar{r}_{1j}(A_1) = 4 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,6 = 7,6,$$

$$\bar{r}_{2j}(A_2) = 7 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 = 2,8\,,\ (\min_i \bar{r}_{ij} = 2,8)\,.$$

Минимальный риск (Байесовский) имеет место при принятии решения которое обеспечивает минимум среднего риска. Максимум среднего выигрыша также соответствует А2:

аи(А,) = 8 0,4 + 2-0,6 = 4,4, a2J(A2) = 5-0,4 +12-0,6 = 9,2 (maxaij =9,2).

Это только некоторые методы существуют и другие способы….

Градиентные методы оптимизации

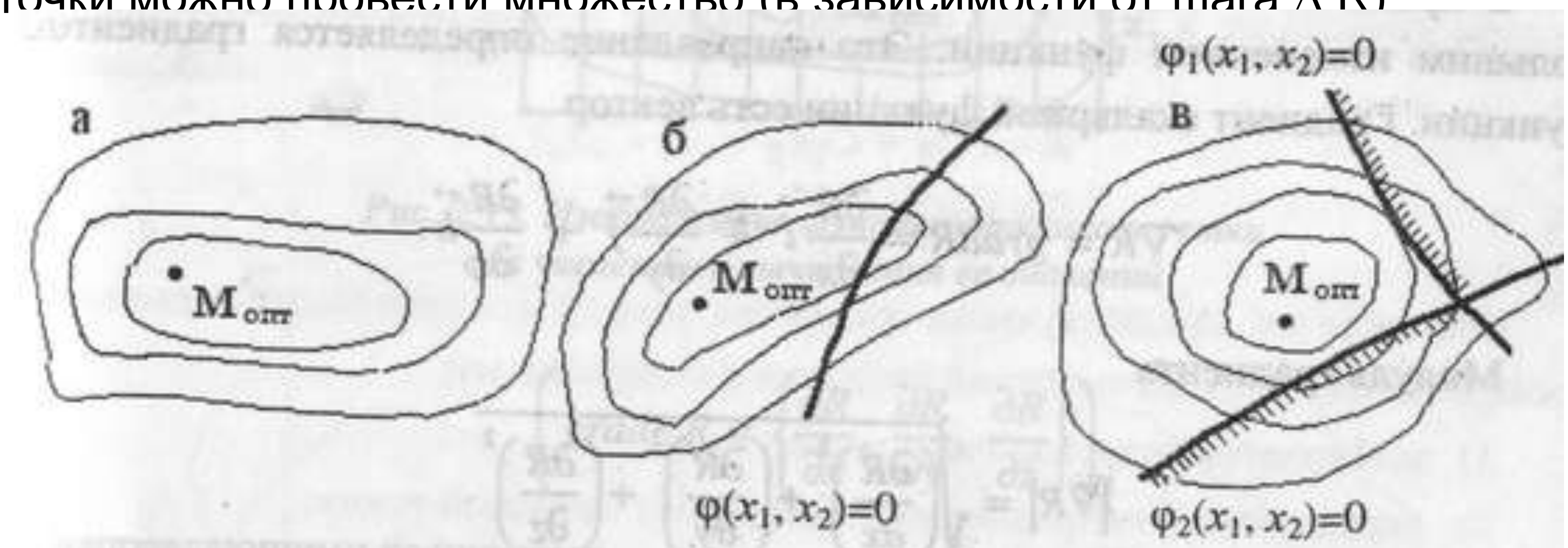
Задачи оптимизации с нелинейными или трудно вычислимыми соотношениями определяющими критерий оптимизации и ограничения, являются предметом нелинейного программирования. Как правило, решения задач нелинейного программирования могут быть найдены лишь численными методами с применением вычислительной техники.

Среди них наиболее часто пользуются градиентными методами (методы релаксации, градиента, наискорейшего спуска и восхождения), без градиентными методами детерминированного поиска (методы сканирования, симплексный и др.), методами случайного поиска. Все эти методы применяются при численном определении оптимумов и достаточно широко освещены в специальной литературе.

В общем случае значение критерия оптимизации R может рассматриваться как функция $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

определенная в n-мерном пространстве,
Поскольку не существует наглядного графического изображения n-мерного пространства, воспользуемся случаем двумерного пространства.

Если R (x1, x2) непрерывна в области D, то вокруг оптимальной точки $M°(x°_1, x°_2)$ можно провести в данной плоскости замкнутую линию, в которой значение R=const. Таких линий, называемых линиями равных уровней вокруг оптимальной точки можно провести множество (в зависимости от шага Δ R)



При ограничении φ (x1, x2) = 0 типа равенства оптимум целевой функции ищется вдоль линии φ (x1, x2) = 0 Ограничения типа неравенств на функцию цели наглядно изображены на рис. в и определяют область допустимых значений x1, x2

Среди методов, применяемых для решения задач нелинейного программирования, значительное место занимают методы поиска решений, основанные на анализе производной по направлению оптимизируемой функции.

Если в каждой точке пространства скалярная функция нескольких переменных принимает вполне определенные значения, то в данном случае имеем дело со скалярным полем (поле температур, поле давлений,- поле плотностей и т.д.).

Подобным образом определяется векторное поле (поле сил, скоростей и т.д.).

Изотермы, изобары, изохроны и т.д. — все это линии (поверхности) равных уровней, равных значений функции (температуры, давления, объема и т.д.).

Поскольку от точки к точке пространства значение функции меняется: то становится необходимым определение скорости изменения функции в пространстве, то есть производной по направлению.

Производная u(x,y,z) по направлению вектора

$$\frac{du}{d\vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{n}$, равные соответственно

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

В практических задачах представляет интерес выбор направления с наибольшим изменением функции. Это направление определяется градиентом функции. Градиент скалярной функции есть вектор

$$\nabla R = gradR = \frac{\partial R}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial R}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{k}.$$

Модуль градиента

$$|\nabla R| = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}.$$

Направление градиента указывает направление наиболее крутого возрастания величины R(x,y).

Понятие градиента широко используется в инженерных расчетах при нахождении экстремумов нелинейных функций.
Градиентные методы относятся численным медодам поискового типа.

Они универсальны и особенно эффективны в случаях поиска экстремумов нелинейных функций с ограничениями, а также когда аналитическая функция неизвестна совсем. Сущность этих методов заключается в определении значений переменных, обеспечивающих экстремум функции цели, путем движения по градиенту (при поиске мах) или в противоположном направлении (min).

Различные градиентные методы отличаются один от другого способом определения движения к оптимуму. Суть заключается в том. что если линии равных уровней

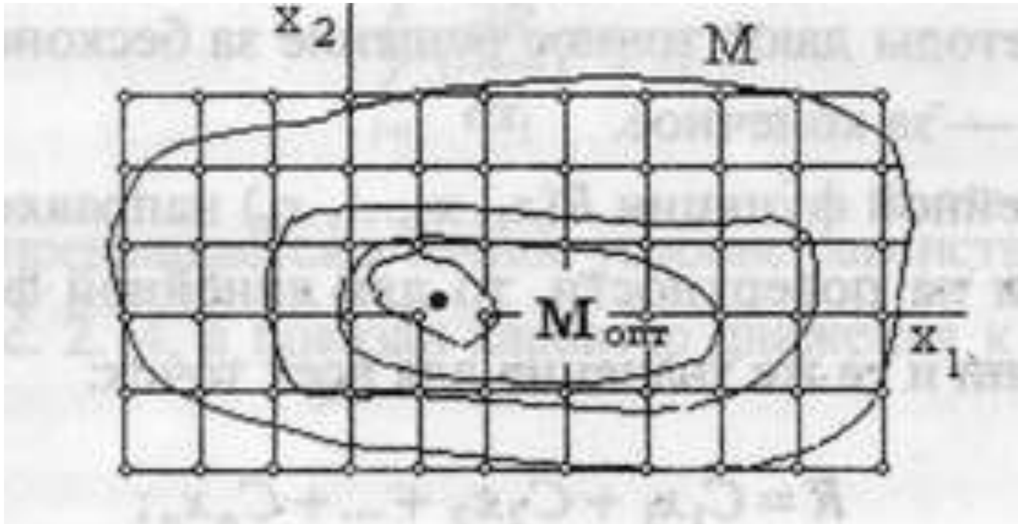
$R(x_1,\ x_2)$

характеризуют графически зависимость

$R(x_1, x_2)$

то поиск оптимальной точки можно вести по-разному

Например, изобразить сетку на плоскости x1,x2 с указанием значений R в узлах сетки (рис.).



Затем можно выбрать из узловых значений экстремальное. Путь рациональный, связан с большим количеством вычислений, да и точность не велика, так как зависит от шага, а оптимум может находиться между узлами. Более правильно использовать градиентный способ, при котором от на точки М к оптимуму движемся по градиенту

$$\left(grad \quad R = \left\{ \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \right\} \right)$$

с направляющими косинусами

$$\cos(\nabla \widehat{R, x_i}) = \frac{\dfrac{\partial R}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial R}{\partial x_i}\right)^2}}.$$

Важнейшим вопросом наряду с определением направления расположения оптимума является выбор шага движения по градиенту.

Выбор, шага зависит от вида оптимизируемой функции.

При слишком малом шаге число вычислений резко возрастает, при большом — падает точность и можно пройти мимо оптимума.

Для в ы п у к л о й функции необходимым и достаточным условием оптимальности точки M° является равенство, нулю в этой точке, градиента

$$|\nabla R| = 0.$$

Размер «шага» из точки $M_i(x_{1i}, x_{2i})$

по направлению градиента $|\nabla R|(M_i)$

в задаче на max (по антиградиенту на min) определяется значением параметра X в скалярном произведении векторов

$$\frac{d\Delta R}{d\lambda} = \nabla R(M_i)\,\nabla R(M_{i+1}) = 0,$$

являющемся необходимым признаком экстремума приращения ∆R при переходе в новую точку.

Градиентные методы дают точное решение за бесконечное число шагов и только в некоторых — за конечное.

Если для нелинейной функции $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

направление градиента зависит от выбора точки на поверхности, то для линейной функции компоненты градиента имеют одни и те же значения для всех точек:

$$R = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n;$$
$$\nabla R = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}.$$

Несмотря на существующие различия между градиентными методами, последовательность вычислений сводится к следующему:
1) выбирается базисная (начальная) точка;
2) определяется направление движения от базисной точки;
3) находится размер шага;
4) определяется следующая точка поиска;
5) вычисляются значение градиента для найденной точки и степень j
6) при значительном отличии от нуля градиента в последней точке вычисления продолжаются по пунктам 2, 3 и т.д. до определения экстремума.

Метод релаксации заключается в отыскании осевого направления, вдоль которого функция цели уменьшается наиболее сильно.

Для этого в начальной точке определяются производные оптимизируемой функции по всем независимым переменным.

Движение начинают в осевом направлении с наибыстрейшим изменением целевой функции (наибольшая по модулю величина производной).

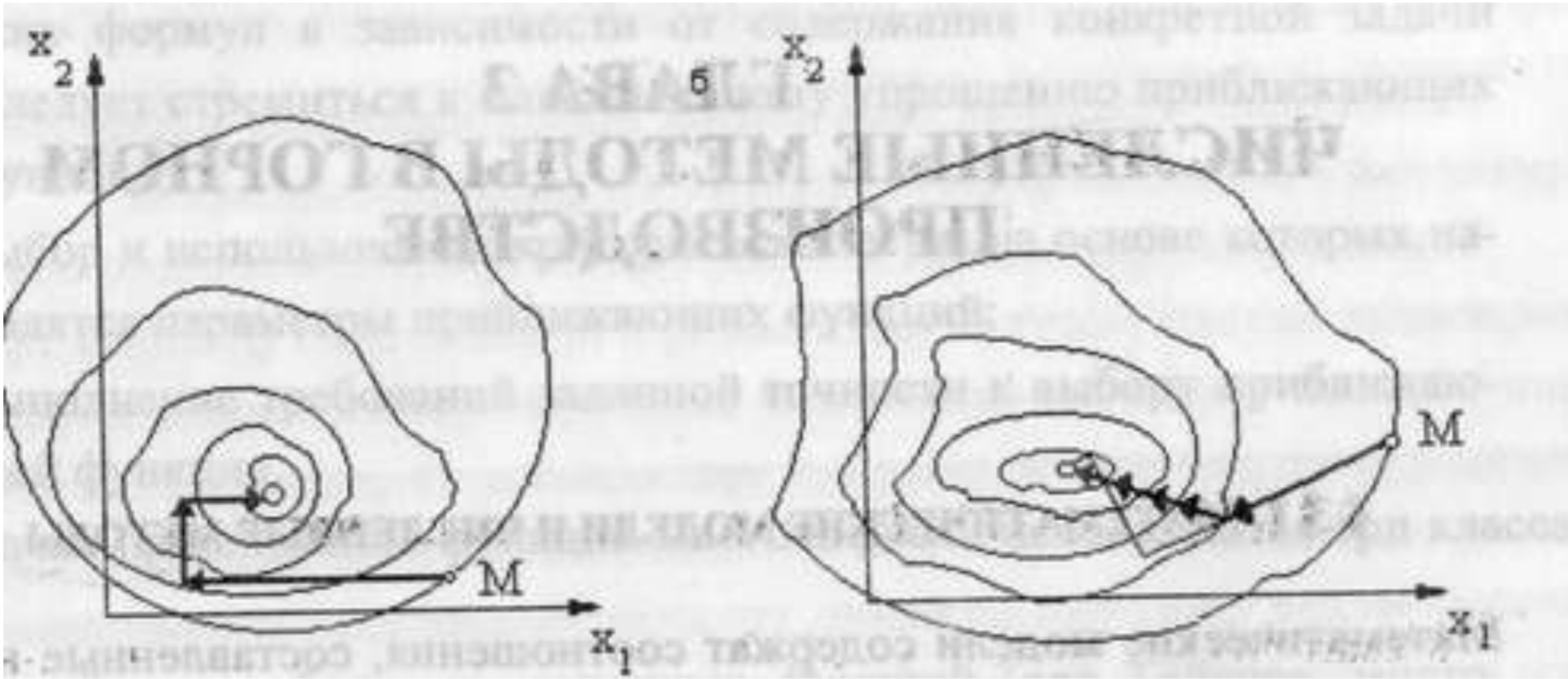
Если знак производной в данной точке отрицательный, то целевая функция убывает в направлении оси и при поиске максимума двигаться надо в сторону увеличения переменной.

Перемещение по выбранной оси продолжается до тех пор, пока модуль производной не принимает минимальное значение. Затем в последней точке снова определяют производные по всем переменным, кроме той, вдоль которой только что перемещались, и выбирают направление оси с наибыстрейшим изменением переменной.

Далее перемещение ведется только по ней до минимальных значений производной. Затем процедура продолжается. Критерием окончания поиска экстренна служит условий

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 < \delta,$$

которое при 5 —»0 превращается в точное условие равенства производных в точке оптимума. На рис. показан характер движения к экстремуму методом релаксации


x2
x1
M
б
x2
x1
M

Метод наискорейшего спуска (или в задачах на max крутого восхождения) заключается в следующем.

После того как в начальной точке найден градиент оптимизируемой функции и тем самым определено направление ее наискорейшего убывания, в данном направлении делается шаг спуска (подъема). Если значение функции уменьшилось в данном направлении (в задаче на min), то делается следующий шаг в том же направлении и так до тех пор, пока не будет найден минимум, после чего вычисляется новое направление наибыстрейшего убывания функции.

Этот метод от метода релаксации отличается тем. что по крайней мере первые шаги делаются в оптимальном направлении, а не по одной из осей. Чем менее резко изменяется направление градиента целевой функции, тем выгоднее использовать метод наискорейшего спуска по сравнению с другими. На рис. б показана схема движения к оптимуму методом наискорейшего спуска.

Важной особенностью метода наискорейшего спуска является то, что при его применении каждое новое направление движения к оптимуму ортогонально предшествующему.