ЭКСПЕРИМЕНТ: ПЛАНИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Некоторые методы планирования экспериментов в приложении к горному производству

Если информации о рассматриваемом процессе недостаточно или изучаемое явление настолько сложно, что не представляется возможным составить детерминированную модель, то используют экспериментально-статистические методы

Различают пассивный и активный методы.

Пассивный эксперимент — традиционный метод, когда с целью изучения процесса ставится большая серия опытов с поочередным варьированием каждой из переменных. К пассивному эксперименту относится сбор статистических данных работы установок, предприятий с последующей обработкой методами математической статистики.

Традиционное планирование эксперимента по Зейделю-Гауссу состоит в том, что факторам $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$,

определяющим в конечном счете значение отклика (выхода) y, задают ряд значений (уровней). На каждом уровне одного фактора ставятся опыты по всем уровням другого. При равном числе m уровней, параллельных измерений каждом уровне n и факторов k необходимо выполнить количество опытов

$$N = n\, m^k.$$

Например, планируя опыты с двумя факторами, имеющими семь уровне и трехкратную повторность. необходимо сделать N = 3 • 72= 147 опытов.

Дальнейший поиск математической модели

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

ведется на основе корреляционно-регрессионного анализа.

Следует заметить, что эффективность реального производственного процесса (добыча полезного ископаемого, его обогащение) зависит от многих факторов (до десятка) и их полное изучение требует выполнения большого числа опытов. Это, конечно, неприемлемо практически и экономически.

Поэтому пассивный эксперимент обычно ограничивается последовательным изучением отдельных групп факторов. Для сокращения экспериментов могут быть использованы теоретический анализ и аналитические модели процесса.

Активный эксперимент ставится по заранее составленному плану (планирование эксперимента), и при этом предусматривается одновременное изменение всех параметров, влияющих на процесс, что позволяет сократить общее число опытов и установить силу взаимодействия параметров между собой.

В этом преимущество активного планирования над пассивными методами экспериментирования, как правило, не учитывающими взаимного влияния факторов и решающими, таким образом, частные вопросы.

В качестве примеров можно указать модели для изучения процесса прессования измельченных материалов в штемпельном прессе, динамики сушки горных пород в различных типах сушилок, измельчения и грохочения, флотации на обогатительных фабриках, оценки диспергирующей способности измельчителей для брикетных заводов, эффективности работы циклонов для осаждения пыли, скорости виброперемещения материалов по специальным конвейерам. эффективности грохочения на брикетных заводах, и многие другие.

Уже сам перечень задач указывает широкую область применения методов активного планирования экспериментов в горной отрасли.

Среди современных методов планирования экспериментов следует указать полный факторный эксперимент, метод дробных реплик, метод крутого восхождения, симплекс-метод и др.

Оптимальный двухуровневый план

Задачей активного планирования экспериментов служит кратчайший путь

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

связывающей параметр оптимизации (отклик, выход) y с переменными процесса

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

называемыми факторами. Координатное пространство

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

— это факторное пространство, а графическое изображение функции отклика в пространстве — поверхность отклика (на плоскости это совокупность линий равных уровней функции отклика).

При планировании экспериментов факторы имеют фиксированные значения уровней.

Если эксперименты проводятся лишь при двух значениях факторов и при этом в экспериментах осуществляются все возможные комбинации факторов, то постановка опытов по такому плану носит название полного факторного эксперимента (ПФЭ или $2^к$ плана).

Постановка полного факторного эксперимента сводится к выбору уравнения регрессии, составлению плана опытов, расчету коэффициентов регрессии, оценке значимости этих коэффициентов, анализу уравнения регрессии.

Выбор уравнения регрессии зависит от числа изучаемых факторов и априорной информации о характере их влияния на функцию отклика и наличия эффекта взаимодействия.

Для двух факторов уравнение регрессии без членов высшего порядка будет

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

и для трех факторов —

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$$

В этих уравнениях

x_1, x_2, x_3 — значения факторов; bo — свободный член при х, = 0;

b_1, b_2, b_3 — коэффициенты регрессии при соответствующих x_i. характеризующие влияние данного фактора на функцию отклика у;

b_{12}, b_{13}, b_{23} — коэффициенты регрессии, свидетельствующие о двойном взаимодействии факторов;

b_{123} — то же, свидетельствует о тройном взаимном влиянии факторов.

Аналогично записываются уравнения для четырех и более факторов.

При составлении плана эксперимента каждому фактору дается условный нулевой уровень, т.е. такие значения переменных, в области которых начинается изучение с целью выбора направления к оптимальному значению функции отклика. Хорошо, если имеется дополнительная информация или соображения по выбору условного нулевого уровня.

Затем для изучаемых факторов выбирается интервал их варьирования. Этот вопрос важен тем, что при слишком большом интервале варьирования факторов имеется опасность ошибки при выборе уравнения для описания функции отклика, а при очень малом можно получить эффект влияния некоторых факторов незначимым.

Все факторы представляются в кодированном виде $x_j = (z_j - z_j^0) / \Delta z_j$

$(j = 1, 2, \ldots, k)$,

где z_j — натуральные значения фактора, охватывающие интервал $z_j^{\min}$ $z_j^{\max}$

с условным нулевым значением в центре z_j^0;

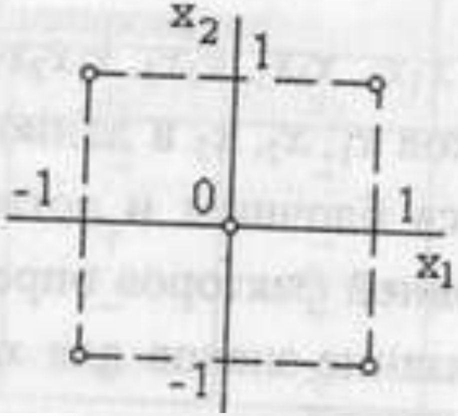
$\Delta z_j = (z_j^{\max} - z_j^{\min}) / 2$ — шаг варьирования переменной.

Закодированная переменная x_j безразмерна и в выбранном интервале изменяется от - 1 (нижний уровень) до + 1 (верхний уровень). Точка с координатами (х,°, х°,..., $x_к$°) носит название центра плана (х,°=0, х2°=0,.. -, x_k°=0).

План возможных комбинаций N из двух факторов $N = 2^2 = 4$ (для трех факторов $2^3 = 8$ и т.д.).
План проведения экспериментов задается в виде матрицы планирования, каждая строчка которой отвечает условиям проведения экспериментов. В табл. приведена матрица планирования для двух факторов.

На практике для сокращения записи в матрице планирования вместо +1 или -1 пишут + или -. Графически план экспериментов для к-2 изображен на рисунке.

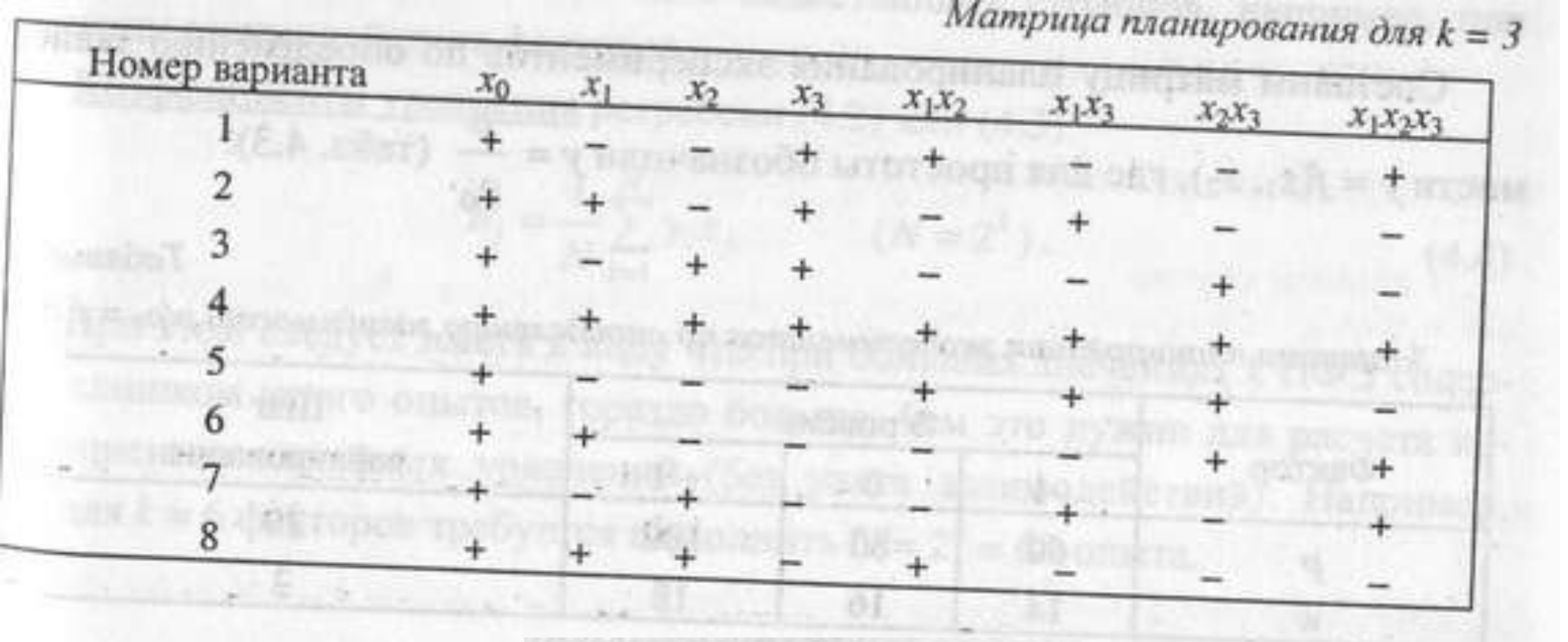
Для трех факторов план содержит $N = 2^3 = 8$ строчек. Для получения такой матрицы к матрице двух факторов приписывают ниже еще такую же, а для x_3 первые четыре эксперимента берут с плюсом, а остальные — с минусом т



Матрица планирования для двух факторов

Фактор	Уровень			Шаг варьирования
	−1	0	+ 1	
z_1	z_1^{min}	z_1^0	z_1^{max}	Δz_1
z_2	z_2^{min}	z_2^0	z_2^{max}	Δz_2

Номер варианта	Планирование			Расчет	Выход			
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$y_i^{(1)}$	…	$y_i^{(m)}$	y_i
1	+	−	−	+				
2	+	+	−	−				
3	+	−	+	−				
4	+	+	+	+				



Матрица планирования для $k = 3$

Номер варианта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	+	−	−	+	+	−	−	+
2	+	+	−	+	−	+	−	−
3	+	−	+	+	−	−	+	−
4	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	−	−	−	+	+	+	−
6	+	+	−	−	−	−	+	+
7	+	−	+	−	−	+	−	+
8	+	+	+	−	+	−	−	−

Знак при x_0 берут +, а при $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$, знак определяется произведением соответствующих знаков x_1, x_2, x_3 в данной строке.

Указанный способ составления планов называется блочным и остается в силе и при большем числе факторов. Значение уровней факторов определяется для каждого опыта (строки) знаком x_1, x_2, x_3

Указание знаков $x_0, x_1x_2, \ldots, x_1x_2x_3$ необходимо для расчета соответствующих коэффициентов уравнения регрессии.

Пример

Построить план первого порядка экспериментов $\rho/\rho_0 = f(p, w)$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Центр исследуемой области $p^0 = 80$ МПа, $w^0 = 16\%$

и в него переносится начало координат. Выбираем интервал варьирования переменных

p, w: $\Delta p = \pm 20$ Мпа, $\Delta w = \pm\ 2\%$.

Этот этап решается на основе знания объектов исследования (прессования шлама) и основных закономерностей влияния p, w на степень прессования p/po (p — плотность p_o— насыпная плотность шлама).

На следующем этапе переходим кодированным переменным x_1, x_2

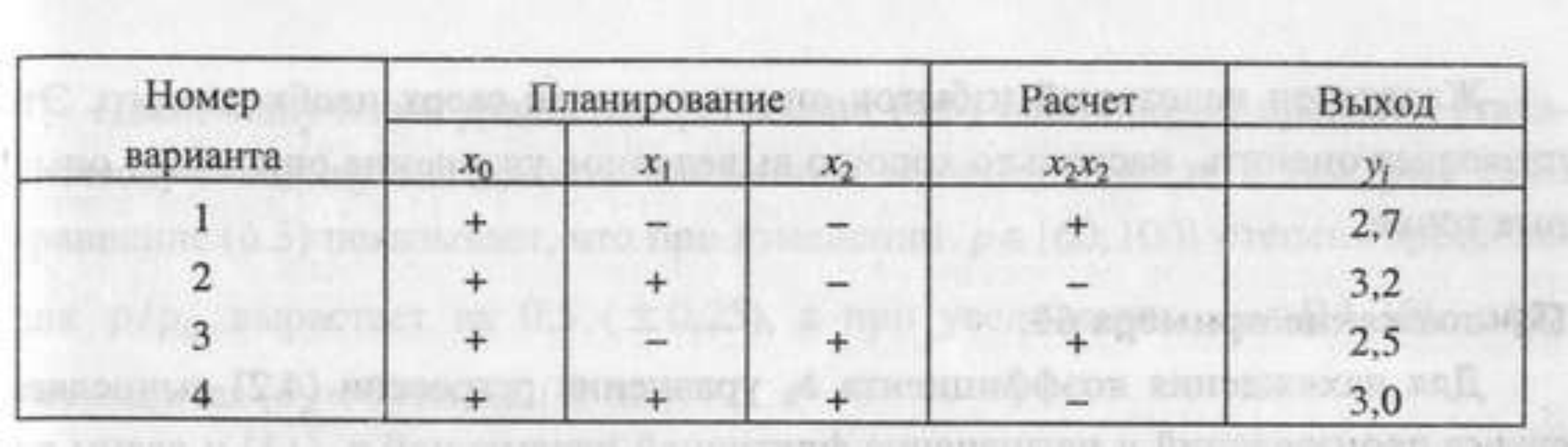
$$x_1^{\min} = \frac{p^{\min} - p^0}{\Delta p} = -1, \quad x_1^{\max} = \frac{p^{\max} - p^0}{\Delta p} = +1.$$

$$x_2^{\min} = \frac{w^{\min} - w^0}{\Delta w} = -1, \quad x_2^{\max} = \frac{w^{\max} - w^0}{\Delta w} = +1.$$

Составим матрицу планирования экспериментов по определению зависимости

$$y = f(x_1, x_2)$$

где для простоты обозначили $y = \frac{\rho}{\rho_0}$



Номер варианта	Планирование			Расчет	Выход
	x_0	x_1	x_2	x_2x_2	y_i
1	+	–	–	+	2,7
2	+	+	–	–	3,2
3	+	–	+	+	2,5
4	+	+	+	–	3,0

Например, первый опыт проводится (первая строка, табл) при р = 60. w = 14, второй опыт — при р = 100, w = 14 и т.д. В столбце «выход» указаны средние (с учетом повторности опытов) значения р/р0.

Таким образом, матрица (см. табл.) построена так, что каждая переменная x_j принимает в опытах только два значения (+1 или -1), т.е. варьируется лишь на двух уровнях (верхнем и нижнем). При этом в полном факторном эксперименте (ПФЭ) участвуют все возможные комбинации переменных x_j.

Расчет коэффициентов и анализ адекватности уравнения отклика

Расчет коэффициентов b_j ведется следующим образом.
Номера строк (см. табл.) обозначим i(i= 1, ... N), а столбцов j (0, 1, ...).

Из свойства ортогональности плана следует, что если взять два любых столбца в дополненной матрице и попарно перемножить величины, стоящие в одинаковых строках, то во всех полученных указанным способом столбцах-произведениях сумма всех четырех чисел в плане 2^{k2} или восьми в 2^{k3} равна нулю. Этим свойством пользуются иногда для составления недостающих столбцов, например, при изучении взаимодействия факторов.

Коэффициенты уравнения регрессии

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ji} \qquad (N = 2^k).$$

При этом следует иметь в виду что при больших значениях к ПФЭ содержит слишком много опытов, гораздо больше, чем это нужно для расчета коэффициентов линейных уравнений (без учета взаимодействий).

Например, Уже для к = 6 факторов требуется выполнить N = 2^6 = 64 опыта.

Желателен некоторый избыток опытных точек сверх необходимого.

Это позволяет оценить, насколько хорошо выведенное уравнение описывает опытные точки.

Для нахождения коэффициента b_0 уравнения регрессии сумму произведений y_i, на значение фиктивной переменной x_o (+1) и делим результат на N = 4 (при k=3 делить на N = 8).

$$b_0 = (1/4)\ (2,7 + 3,2 + 2,5 + 3,0) = 2,85.$$

Для вычисления b_1 по формуле вычисляем сумму произведений y_i на соответствующие значения x_1 (+1 или -1), и подобным образом поступаем при определении b_2 и b_3 (в последнем случае y_i умножим на значение x_1x_2) (см. табл.):

$$b_1 = (1/4)\ (-2,7 + 3,2 - 2,5 + 3,0) = 0,25,$$

$$b_2 = (1/4)\ (-2,7 - 3,2 + 2,5 + 3,0) = -\,0,1,$$

$$b_{12} = (1/4)\ (2,7 - 3,2 - 2,5 + 3,0) = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере уравнение регрессии

$$y = 2,85 + 0,25\ x_1 - 0,1\ x_2\ (|x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1).$$

Коэффициент b_{12} характеризует взаимодействие между факторами, т.е. показывает, что влияние одного фактора зависит от значения другого.
В данном примере $b_{12} = 0$, что свидетельствует об отсутствии взаимодействия между p и w.
Уравнение может быть представлено в натуральных значениях, для чего необходимо заменить x на

$$\left(\frac{z-z^{o}}{\Delta z}\right).$$

В данном случае

$$\rho/\rho_0 = 2{,}85 + 0{,}25(p-80)/20 - 0{,}1(w-16)/2$$

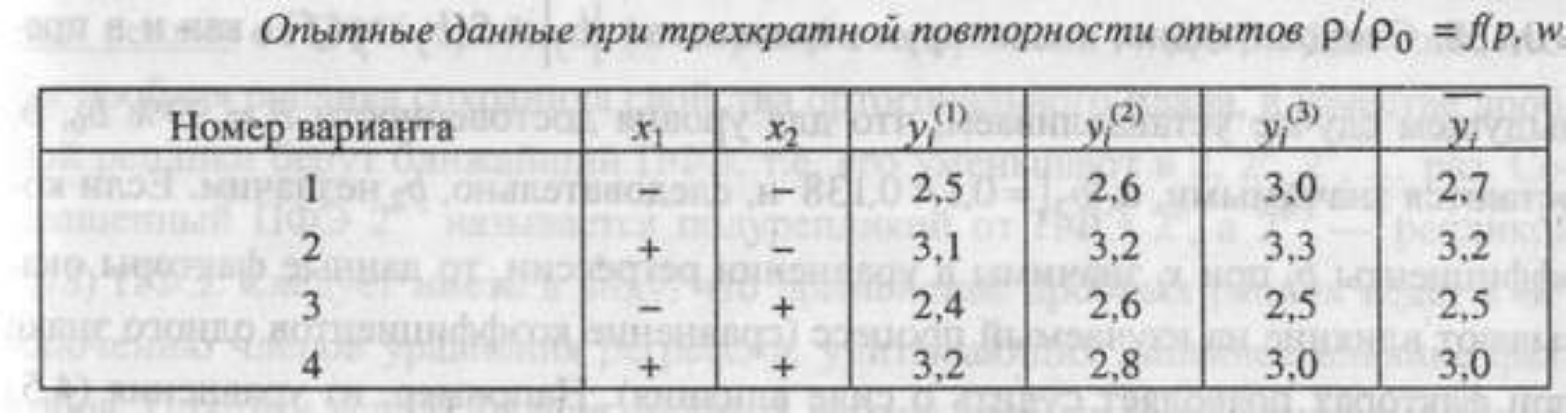
$$\rho/\rho_0 = 2{,}65 + 0{,}0125\,p - 0{,}05\,w$$

$$(p \in [60;100], \quad w \in [14,18]).$$

После получения уравнения регрессии необходимо провести статистическую оценку значимости найденных величин.

Вместе с тем, уже само уравнение показывает, что при изменении р $\in$[60; 100] степень прессования p/p_0 вырастает на 0,5 (±0,25), а при увеличении w$\in$ [14,18] р/р0 уменьшится ($b_2 < 0$) на 02 (±0,1).

Оценка значимости коэффициентов регрессии b_j проводится по выборочной дисперсии S^2 (bj). Коэффициенты регрессии вычисляют по средним значениям, (не менее трех повторностей (> 3) опытов по каждой строке ПФЭ).



Опытные данные при трехкратной повторности опытов $\rho / \rho_0 = f(p, w$

Номер варианта	x_1	x_2	$y_i^{(1)}$	$y_i^{(2)}$	$y_i^{(3)}$	$\overline{y_i}$
1	–	–	2,5	2,6	3,0	2,7
2	+	–	3,1	3,2	3,3	3,2
3	–	+	2,4	2,6	2,5	2,5
4	+	+	3,2	2,8	3,0	3,0

Расчет выборочной дисперсии ведут по формуле

$$S(b_j)=\sqrt{S^2(b_j)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{q=1}^{m}(y_i^q-\overline{y_i})^2}{m(m-1)N^2}}.$$

Вычисляем выборочную дисперсию S (b_j): $S\,(b_j)=\sqrt{S^2(b_j)}=0{,}041.$

Для оценки значимости коэффициентов регрессии составляем неравенство

$$|b_j|>S(b_j)\,t_p(f),$$

где S (bj) — ошибка коэффициента регрессии; t_p(f) — коэффициент Стьюдента находимый из специальных таблиц для заданной вероятности P и числа степеней свободы , с которыми определены коэффициенты регрессии. Число степеней свободы f = N(m - 1). Для примера f = 4(3 - 1) = 8.

Оценим значимость коэффициентов регрессии для уровня достоверности P=95%.

Из специальных таблиц находим $t_{95}(8) = 2,31$. Если выполняется неравенство

$$|b_j| > S(b_j)\, t_p(f) = 0{,}041 \cdot 2{,}31 = 0{,}095\,,$$

то коэффициенты значимы.

В формуле $|b_o| = 2,85 > 0,095$, $|b_1| = 0,25 > 0,095$, $|b_2| = 0,1 > 0,095$, т.е. все коэффициенты значимы с уровнем достоверности 95%.

При уровне достоверности P = 99% $t_{99}(8) = 3,36$ и

$$S(b_j)\ t_{99}(f) = 0{,}041 \cdot 3{,}36 = \; = 0{,}138.$$

Следовательно, анализируя неравенство

$$|b_j| > S(b_j)\, t_p(f)\,,$$

как и в предыдущем случае устанавливаем, что для уровня достоверности P=99% b_o, b_1, остаются значимыми, а $|b_2| = 0,1 < 0,138$ и, следовательно, b_2 незначим.

Если коэффициенты b_j при x_j значимы в уравнении регрессии, то данные факторы оказывают влияние на изучаемый процесс (сравнение коэффициентов одного знака при факторах позволяет судить о силе влияния).

Например, из уравнения следует, что давление сильнее влияет на степень прессования, чем влажность.

С увеличением $p\ (b_1 > 0)\ \rho/\rho_0$ растет, а с повышением $w\ (b_2 < 0)\ \rho/\rho_0$ уменьшается.

Сложнее, когда коэффициент при x, оказывается незначимым (в примере b_2 при P = 99%). Это может быть по многим причинам: выбран слишком малый интервал варьирования, нулевой уровень данного фактора уже лежит в области оптимума и, наконец, данный фактор действительно не является значимым. В примере имеет место второе — нулевой уровень находится в области оптимума.

В общем случае вопрос о незначимости Ь, изучают дополнительно, опираясь на теорию и практику задачи.

Возможность исключения парных взаимодействий определяется по критерию Фишера. Если парным взаимодействием пренебрегать нельзя, то линейное приближение неадекватно.

стратегия поиска оптимума

Метод многофакторного планирования экспериментов дает возможность достаточно достоверно и ускорено определить оптимум по двум-четырем факторам.
Однако при значительном числе факторов проведение ПФЭ также становится трудоемким, громоздким из-за большого числа коэффициентов.

Например, при десяти факторах (к = 10) число необходимых опытов по ПФЭ равно 1024 и число коэффициентов с учетом взаимодействий также составляет 1024.

Поэтому очень важен вопрос об ограничении числа факторов в экспериментов.

Для сокращения числа факторов, подлежащих изучению, используется так называемый метод отсеивающих экспериментов, цель которого — ранжировка факторов по степени их влияния на выход и исключение из рассмотрения тех, влиянием которых можно пренебречь.

Число экспериментов резко сокращается при использовании метода дробных реплик от ПФЭ (дробный факторный эксперимент — ДФЭ).

Для того, чтобы дробная реплика сохранила свойства ортогонального плана, в качестве дробной реплики берут ближайший ПФЭ, т.е. его уменьшают в 2, 2^2, 2^3, ... раз. Сокращенный ПФЭ 2^{k-1} называется полурепликой от ПФЭ 2^k, а 2^{k-3} — репликой (1/8) ПФЭ.

Следует иметь в виду, что применение дробных реплик ведет к исключению членов уравнения регрессии, учитывающих взаимное влияние факторов. Поэтому использование дробных реплик требует осторожности и дополнительного обоснования.

Допустим, что требуется получить линейное приближение поверхности отклика для трех факторов (x_1 x_2, x_3). При возможности пренебрежения эффектами взаимодействия

$$x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3,\ x_1x_2x_3$$

используем полуреплику ПФЭ, в качестве которой применяем матрицу планирования (см. табл.).

Столбец x_1,x_2 берем в качестве плана экспериментов по x_3.

Матрица планирования для двух факторов

Фактор	Уровень			Шаг варьирования
	–1	0	+1	
z_1	$z_1^{\min}$	z_1^0	$z_1^{\max}$	Δz_1
z_2	$z_2^{\min}$	z_2^0	$z_2^{\max}$	Δz_2

Номер варианта	Планирование			Расчет	Выход			
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$y_i^{(1)}$	…	$y_i^{(m)}$	y_i
1	+	–	–	+				
2	+	+	–	–				
3	+	–	+	–				
4	+	+	+	+				

При использовании дробного факторного эксперимента необходимо заранее иметь четкое представление о разрешающей способности дробной реплики, т.е. определить заранее, какие коэффициенты являются несмешанными оценками для соответствующих генеральных коэффициентов.

В этом случае удается извлечь максимальную информацию из эксперимента.

Например, в задаче с четырьмя факторами (k = 4) в качестве генерирующего соотношения можно взять $x_1x_2x_3 = x_4$ и любой из факторов двойного взаимодействия ($x_1x_2 = x_4$ или другой).

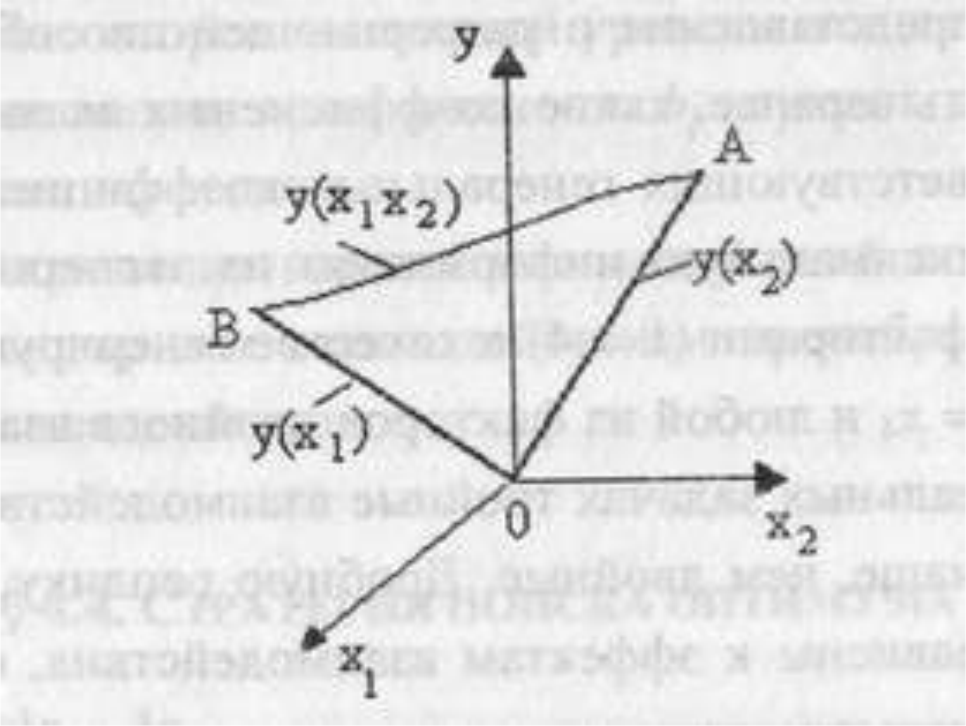
В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равными нулю значительно чаще, чем двойные. Дробную реплику, в которой v линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, обозначают 2^{k-v}

Таким образом, оптимальные двухуровневые планы 2^k и 2^{k-v} имеют следующие преимущества:

планы ортогональны, и поэтому все вычисления просты,
все коэффициенты определяются независимо друг от друга,
каждый коэффициент определяется по результатам N опытов,
все коэффициенты определяются одинаковой и минимальной дисперсией.

Для изучения влияния многих факторов иногда используют и другие приемы. В частности, разбивают все факторы на группы по три-четыре фактора в каждой. Количество групп и число факторов в каждой из них определяется субъективно с учетом особенностей изучаемого процесса.

Важно, чтобы факторы, отнесенные к разным группам, не оказались взаимодействующими.
Недопустимость разбиения факторов на группы наглядно демонстрируется на рис. на элементарном примере у = $f(x_1,x_2)$ показано, что в случае разбиения факторов на две группы, по существу, задача сводится к двум плоским случаям (прямые
У= $f_1(x_1)$ и у =$f_2(x_2)$) в целом пространственной задачи (поверхность у = $f(x_1,x_2)$).



Возможность разбиения факторов на группы привлекает резким сокращением экспериментов.

Например, ПФЭ $2^8 = 256$ опытов, а разбив эти $k = 8$ факторов всего на две группы, имеем $N_1 = 2^4 = 16$ и $N_2 = 2^4 = 16$, т.е. всего 32 опыта.

Отсюда видеть большую опасность недостаточно глубокого изучения исследуемых факторов. Вместе с тем, если есть уверенность независимости отдельных групп торов, то путем постановки ПФЭ можно найти частные оптимумы по факторам каждой группы, фиксируя факторы других групп на любом постоянном уровне.

Определив оптимальные значения факторов в каждой группе, можно отыскать истинный оптимум, который находится по значениям всех факторов в соответствующих частных оптимумах.

Конечная цель многофакторного эксперимента — это нахождение оптимальных значений факторов в исследуемом процессе.

Наилучший способ нахождения координат оптимальной точки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ поверхности отклика $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$
— это движение к экстремуму по кратчайшему пути, перпендикулярно к линиям y=const, т.е. по градиенту .....

$$grad\ y = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}$$

Бокс и Уилсон предложили «шаговый» метод отклика. В окрестности точки L ставится эксперимент описания поверхности отклика линейным уравнением регрессии $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$

Далее двигаются по поверхности отклика в направлении градиента линейного приближения: $\partial y / \partial x_1 = b_1,\ \partial y / \partial x_2 = b_2.$

При постановке опытов шаг должен быть пропорционален произведению коэффициентов b_j на шаг варьирования соответствующего фактора, т.е. $b_j \Delta z_j$

Если линейного приближения недостаточно, то ставится новая серия опытов с центром в точке, которая соответствует наибольшему значению у. и находится новое направление для движения по поверхности отклика.

Такой процесс продолжается до достижения области, близкой к экстремуму, или «почти стационарной» области.

Возвращаясь к примеру, отметим, что по ПФЭ 2^2 при центральных значениях P=80 и w = 16 и интервалах варьирования Δp = 20 и Δw = 2 получено уравнение регрессии

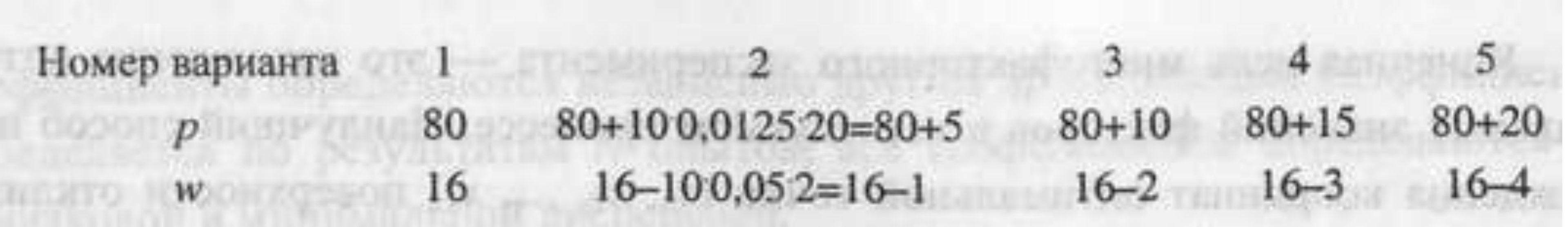
$$\rho/\rho_0 = 2{,}65 + 0{,}0125\ p - 0{,}05\ w,$$

или, в закодированном виде:

$$y = 2{,}85 + 0{,}25\ x_1 - 0{,}1\ x_2.$$

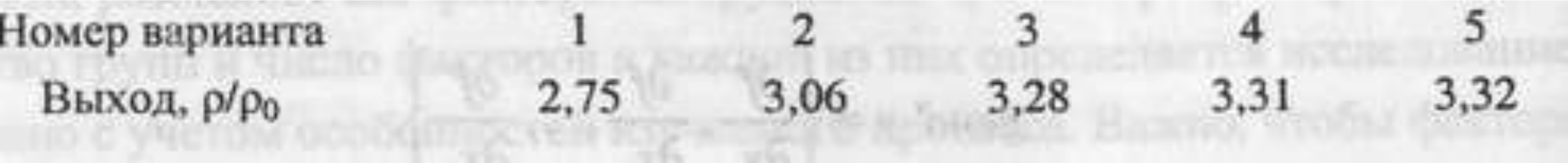
В качестве возьмем $b_j \Delta z_j$, , умноженное на 10

Тогда план эксперимента по крутому восхождению будет выглядеть так:



Номер варианта	1	2	3	4	5
p	80	80+10·0,0125·20=80+5	80+10	80+15	80+20
w	16	16–10·0,05·2=16–1	16–2	16–3	16–4

Реализовав эту серию опытов, можно, например, установить следующее:



Номер варианта	1	2	3	4	5
Выход, ρ/ρ_0	2,75	3,06	3,28	3,31	3,32

Как видим, начиная с четвертого варианта дальнейшее изменение значений факторов (движение по градиенту) уже не приводит к изменению выхода. Оптимальные значения факторов составляют

$$p^0 = 100\ \text{МПа и}\ w^0 = 12\%.$$

Чтобы уточнить оптимальное соотношение, ставится новый эксперимент с центром в точке оптимума, и если какой-либо из коэффициентов регрессии при линейных членах окажется значимым, то необходимо скорректировать полученные оптимальные значения факторов, наметив последующую программу крутого восхождения по вновь рассчитанному градиенту.

Если линейное приближение адекватно, то целесообразно проводить крутое восхождение.

В области, близкой к оптимуму, следует поставить несколько многофакторных экспериментов с выбором нулевого уровня при таких значениях

$$x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

при которых был получен наилучший результат в предыдущем эксперименте.

Нулевой уровень в том опыте, в котором все коэффициенты регрессии при линейных членах окажутся незначительными, можно принять за оптимальное соотношение факторов

$$x_1, x_2, \ldots, x_k.$$