

Элементы теории  
вероятностей и  
математической статистики

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение. Случайные величины могут быть дискретными (фиксированными) или непрерывными, принимающими любое значение в заданном интервале.

Вероятность события — это численная мера объективной возможности этого события.

Она изменяется от нуля (невозможность события) до 1 (достоверное событие). Если ввести понятие относительной частоты (частоты) события как отношение числа случаев  $n_i$  благоприятствующих событию  $i$ , ко всем наблюдавшимся случаям ( $n$ ), то вероятность  $i$ -го события находится по формуле

$$P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}.$$

Сумма вероятностей всех возможных событий  $i$  равна 1, т.е.

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1.$$

При достаточно большом значении  $n$  относительная частота достаточно правильно отражает (оценивает) значение вероятности события.

Суммарная вероятность

$$\left( \sum_{i=1}^n P_i \right)$$

распределена определенным образом между отдельными  $i$ -ми событиями.

Случайная величина полностью задана, если известно ее распределение.

Законом распределения называется соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины служит таблица, в которой перечислены все значения  $x$ , и  $p$ ,

$x_1$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_1$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

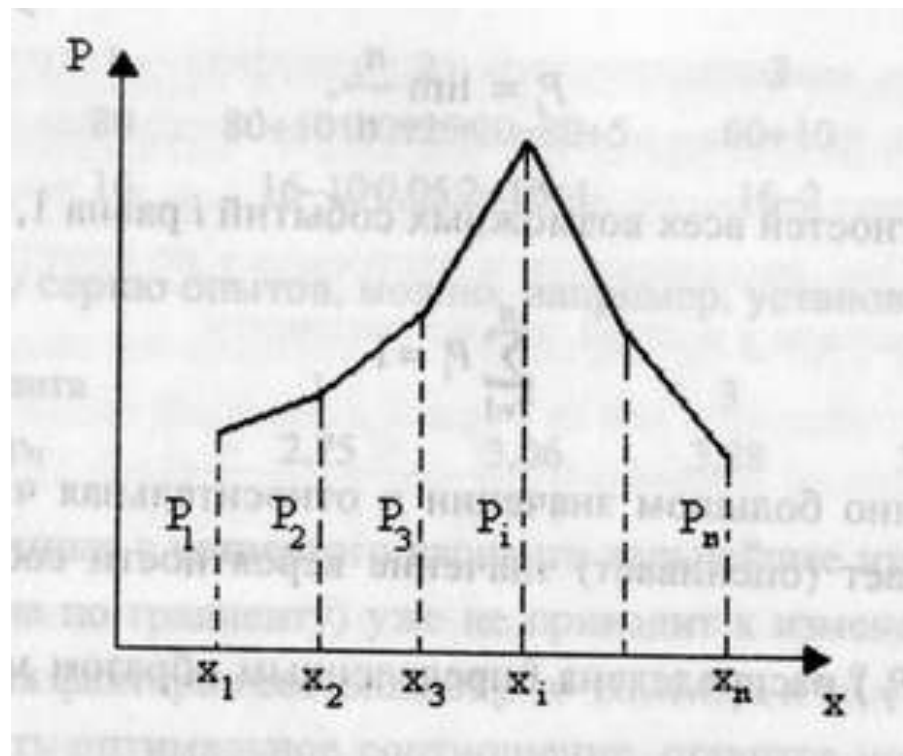
Указанная таблица называется рядом распределения.

Для наглядности ряд распределения часто изображается графически.

Для этого по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат — вероятности этих значений.

Полученная геометрическая фигура (рис.) называется многоугольником (полигоном) распределения.

Иногда удобна «механическая» интерпретация ряда распределения. Это некоторая масса, равная 1 и распределенная по оси  $x$  так, что в отдельных точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , помещены соответствующие массы  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .



Для количественной характеристики распределения непрерывной случайной величины удобно пользоваться не вероятностью данного события  $X = x$ , а вероятностью события  $X < x$ , где  $X$  — текущая переменная.

Вероятность события  $X < x$  величина переменная, функция от  $x$ . Эта функция называется функцией распределения случайной величины  $X$  и обозначается  $F(x)$ :  
 $F(x) = P(X < x)$ .

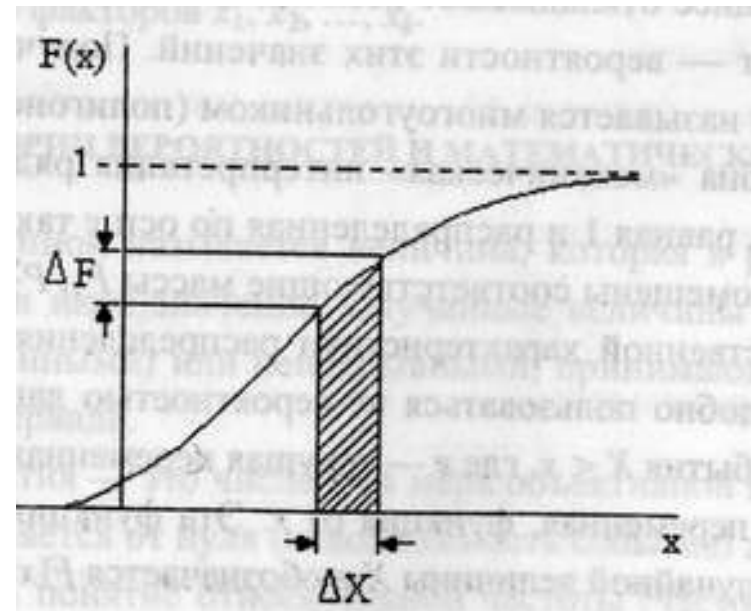
Функцию распределения иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. Она обладает свойствами

а)  $F(x)$  — неубывающая функция своего аргумента, т.е. при  $x_2 > x_1$   
 $F(x_2) > F(x_1)$

б) на минус бесконечности  $F(x)$  равна нулю  $F(-\infty) = 0$ ;

в) на плюс бесконечности  $F(x)$  равна 1  $F(+\infty) = 1$ .

График  $F(x)$  в общем виде показан на рис.



Если для непрерывных случайных величин  $F(x)$  — сплошная гладкая линия, то для дискретных величин  $F(x)$  выражается ступенчатой линией, скачки которой наблюдаются в точках возможных значений случайных величин и соответствующих им вероятностей.

Сумма высот всех скачков равна 1.

По мере увеличения числа возможных значений случайной величины скачки становятся меньше по высоте и функция  $F(x)$  все ближе приближается к распределению непрерывной величины. В пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$  закон распределения дискретной величины приближается к функции распределения непрерывной величины.

Вероятность попадания случайной величины на заданный участок  $\Delta x$  равна приращению функции распределения на этом участке. Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю

Вычисляя вероятность попадания в интервал  $\Delta x$ , воспользуемся понятием производной.

Тогда  $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F$ .

или в пределе

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Обозначим  $F'(x) = f(x)$ .

Производная функции распределения  $f(x)$  называется плотностью распределения (характеризует плотность распределения случайной величины).

Плотность распределения иногда называют дифференциальной функцией распределения. Это одна из форм закона распределения.

Эта функция существует только для непрерывных случайных величин (условие дифференцируемости). Вероятность попадания в элементарный промежуток  $\Delta x$  равна вероятности  $f(x)\Delta x$ . Вероятность попадания на отрезок

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

равна

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Геометрически это площадь криволинейной трапеции в промежутке

$$x \in [\alpha; \beta].$$

Связь функции распределения с плотностью распределения дается формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Свойства плотности распределения:

- а) плотность распределения неотрицательная функция:  $f(x) > 0$ ;
- б) интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности равен 1

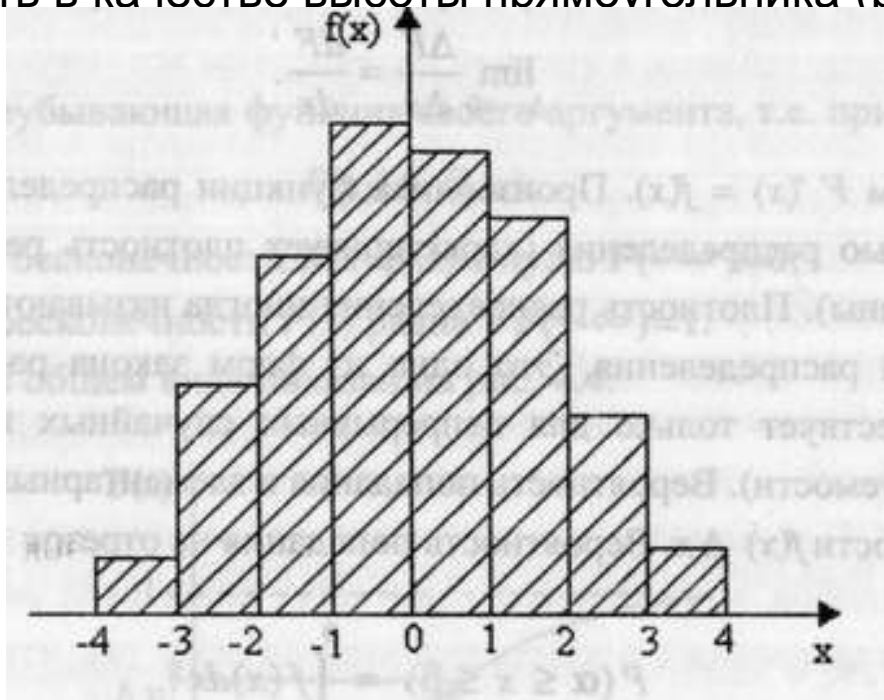
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Величина  $F(x)$  безразмерная, а  $f(x)$  имеет размерность, обратную случайной величины.



Гистограмма — это статистический ряд, оформленный графически.

Для построения гистограммы на оси абсцисс откладываются интервалы и на каждом из интервалов, как на основании, строится прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте данного разряда. Для построения гистограммы нужно частоту каждого разряда разделить на его длину и полученное число взять в качестве высоты прямоугольника (рис. ).



$$k \equiv \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \lg n},$$

Интервалы для построения гистограмм выбираются произвольно, но для определения оптимальной величины интервала можно применять формулу

где  $(x_{\max} - x_{\min})$  — размах изменения случайной величины;  $n$  — число наблюдений в выборке.

В качестве основных числовых характеристик применяется математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс.

Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений значений случайной величины на вероятность этих значений:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

при достаточно больших  $n$  математическое ожидание может быть оценено средним арифметическим  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Для непрерывной случайной величины

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Свойства математического ожидания:

- а)  $M(c) = c$ ;
- б)  $M(cx) = cM(x)$ ;
- в)  $M(x+y) = M(x) + M(y)$ ;
- г)  $M(xy) = M(x) M(y)$ .

Дисперсией (рассеиванием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(x) = \sigma^2(x) = M[x - M(x)]^2.$$

Для дискретных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 P_i$$

и для непрерывных случайных величин

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx.$$

Свойства дисперсии:

а)  $D(c) = 0$ ;

б)  $D(cx) = c^2 D(x)$ ;

в)  $D(x + y) = D(x) + D(y)$ , если  $x$  и  $y$  независимы;

г)  $D(x - y) = D(x) + D(y)$ ;

$$д) D(\bar{x}) = \frac{D(x)}{n}$$

(отсюда свойство стандартного отклонения

е)  $D(xy) = D(x)D(y) + D(x)(M(y))^2 + D(y)(M(x))^2$ ,

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}});$$

если  $x$  и  $y$  независимы.

Размерность  $D(x)$  равна квадрату размерности случайной величины.

Мода случайной величины ( $M_0$ ) — это ее наиболее вероятное значение.

В общем случае  $M(x)$  и  $M_0$  не совпадают, но при симметричном (нормальном) распределении оказывается  $M_0 = M(x)$ .

Медианой случайной величины ( $Me$ ) называется ее данное значение, для которого  $P(x < Me) = P(x > Me)$ .

Медиана делит площадь, ограниченную плотностью распределения  $F(x)$ , пополам.

Асимметрия — характеристика, служащая для определения степени скошенности плотности распределения.

Для симметричного распределения  $A_s = 0$ . Для выборочной совокупности наблюдений

$$A_s = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3.$$

Для дискретных случайных величин

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^3 P_i}{\sigma^3},$$

непрерывных —

$$A_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^3 f(x) dx}{\sigma^3}.$$

Эксцесс служит для характеристики крутости плотности распределения

$$E_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^4 P_i}{\sigma^4} - 3,$$

если рассматриваются дискретные величины, а для непрерывных —

$$E_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^4 f(x) dx}{\sigma^4} - 3.$$

распределения

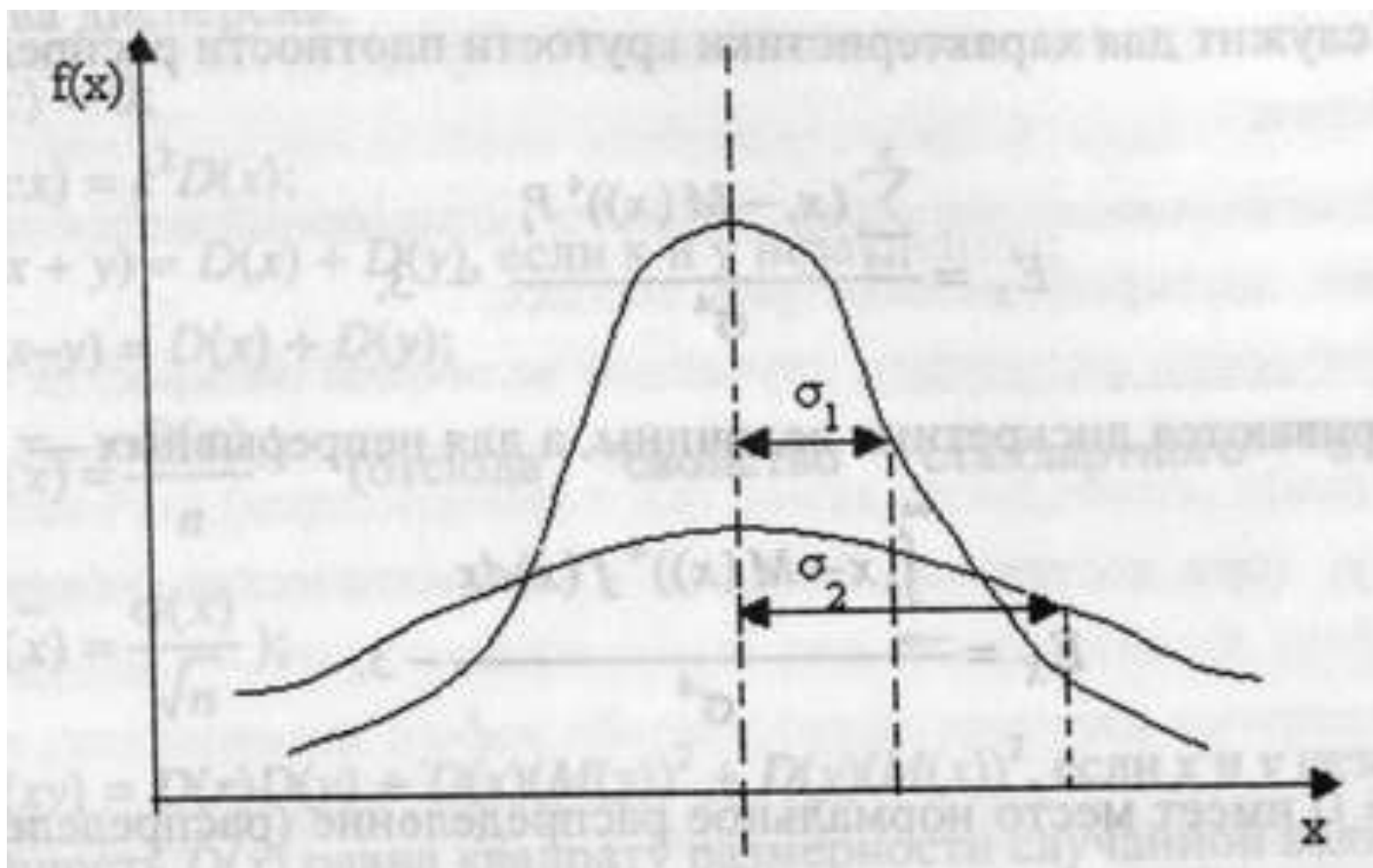
При  $E_x = 0$  имеет место нормальное распределение (распределение Гаусса).  
Для выборочной совокупности наблюдений

$$E_x = \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3.$$

Обычно характеристики  $E_x$ ,  $A_s$  применяют при  $n > 30-40$ .

Отличные от нуля  $E_x$ ,  $A_s$  указывают на отклонение распределения от нормального.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величиной которая описывается дифференциальной функцией



Кривая распределения по нормальному закону симметрична, имеет холмообразный (колоколообразный) вид (рис.).

Определяется двумя параметрами: математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением.

Математическое ожидание нормального распределения равно  $M(x) = a$ , а среднеквадратическое отклонение нормального распределения равно  $\sigma(x) = \sigma$  и  $D(x) = \sigma^2$ .

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Максимальная ордината кривой равна –

математическому ожиданию.

Точка перегиба соответствует величине среднеквадратического отклонения  $\sigma$

Плотность распределения  $f(x)$  при  $x \pm \infty$  стремится к  $f(x) = 0$ .

Наибольшая ордината обратно пропорциональна  $\sigma$ .

С увеличением  $\sigma$  вершина  $f(x)$  опускается, а сама кривая становится более плоской (рис.).



Нормированным называют нормальное распределение с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma = 1$ .

Нормирование проводят введением параметра

$$t = \frac{x-a}{\sigma}.$$

В этом случае  $M(t) = 0$ , а  $\sigma(t) = 1$ . Дифференциальная функция нормированного распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эта функция табулирована.

Вероятность того, что  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha, \beta)$ , равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Обозначив

$$t = \frac{x-a}{\sigma}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} P(|(x-a)| < t\sigma)$$

преобразуем интеграл в виде функции Лапласа

Функция  $\Phi(t)$  называется интегралом вероятности, ее значения можно найти в справочных таблицах.

$P$  — вероятность попадания случайной ошибки в симметричный интервал  $(-t_1, t_2)$ . В таблицах значения  $\Phi(t)$  даны лишь для положительных  $t$ , а для отрицательных значений аргумента справедливо выражение

$$\Phi(-t) = -\Phi(t).$$

Вероятность попадания в любой интервал  $(t_1, t_2)$ . в случае нормального закона

$$P(t_1 < t < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1).$$

И, наконец, вероятность того, что случайная ошибка выйдет за границы

$$\pm t\sigma (t > 0)$$

равна

$$P(|x-a| > t\sigma) = 1 - 2\Phi(t).$$

При больших значениях  $t$  вероятность  $P$  очень мала.

Так, при

$$P\{|x - a| > 4\sigma\} = 1 - 2\Phi(4) = 6 \cdot 10^{-5}, \text{ а при } P\{|x - a| > 5\sigma\} = 1 - 2\Phi(5) = 6 \cdot 10^{-7}.$$

Вероятность выхода за пределы  $3\sigma$  уже настолько мала, что ее считают невозможной.

Отсюда следует правило трех сигм: случайные ошибки измерения практически ограничены по абсолютной величине значением  $3\sigma$ .

Для анализа близости экспериментального распределения нормальному закону используют критерий согласия  $\chi^2$  («хи»-квадрат):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

который при достаточно большом числе испытаний и приближенно распределен по закону  $\chi^2$  с  $(k-3)$  степенями свободы.

В формуле  $p_i$  — оценка вероятности попадания в интервал  $(t_i, t_{i+1})$ . находится как разность значений функции Лапласа:

$$P_i = \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i).$$

Найденное значение  $\chi^2$  сравнивается с табличными значениями.

По числу степеней свободы  $\nu = k - 3$  и экспериментальному  $\chi^2$  находим вероятность  $P$  того, что рассматриваемое различие экспериментального и нормального распределений является случайным.

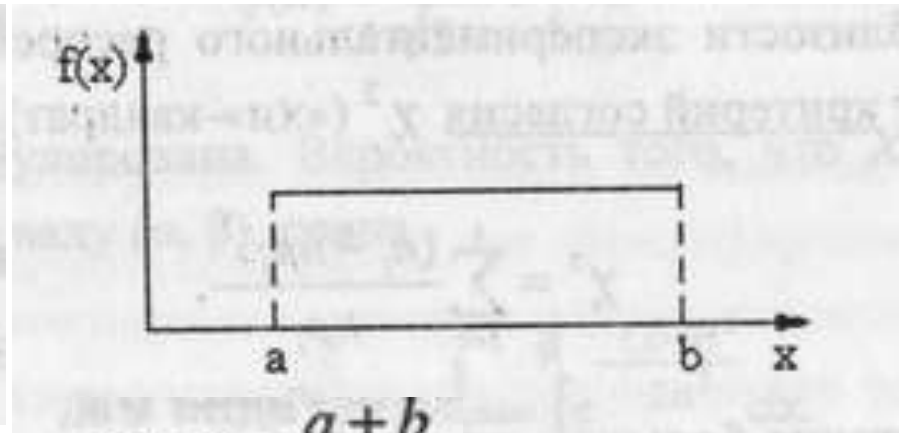
Малые значения  $P$  соответствуют малой вероятности случайного отличия и свидетельствуют о наличии систематических отклонений от нормального закона.

Нормальный закон распределения случайной место когда исходы их представляют собой сумму большого переменных величин, дисперсии которых малы сравнению с дисперсией всей суммы.

В том случае, если возможные значения случайной величины лежат в интервале  $(a, b)$  и нет оснований отдать предпочтение какому-либо из этих закону может подчиняться, например, погрешность при измерениях, если одному из возможных значений нельзя отдать предпочтение.

Закон равномерного распределения записывается в виде (рис.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$



Математическое ожидание в этом случае

$$M(x) = \frac{a+b}{2}$$

и среднеквадратическое отклонение

дисперсия

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Медиана совпадает с математическим ожиданием, а моды этот закон не имеет, так как все значения плотности вероятности равны между собой.

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda x^{-\lambda} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  — постоянная положительная величина.

Как видим, показательный закон распределения определяется всего одним параметром  $\lambda$ .

Это особенность указывает на преимущество этого закона распределения.

Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий в потоке.

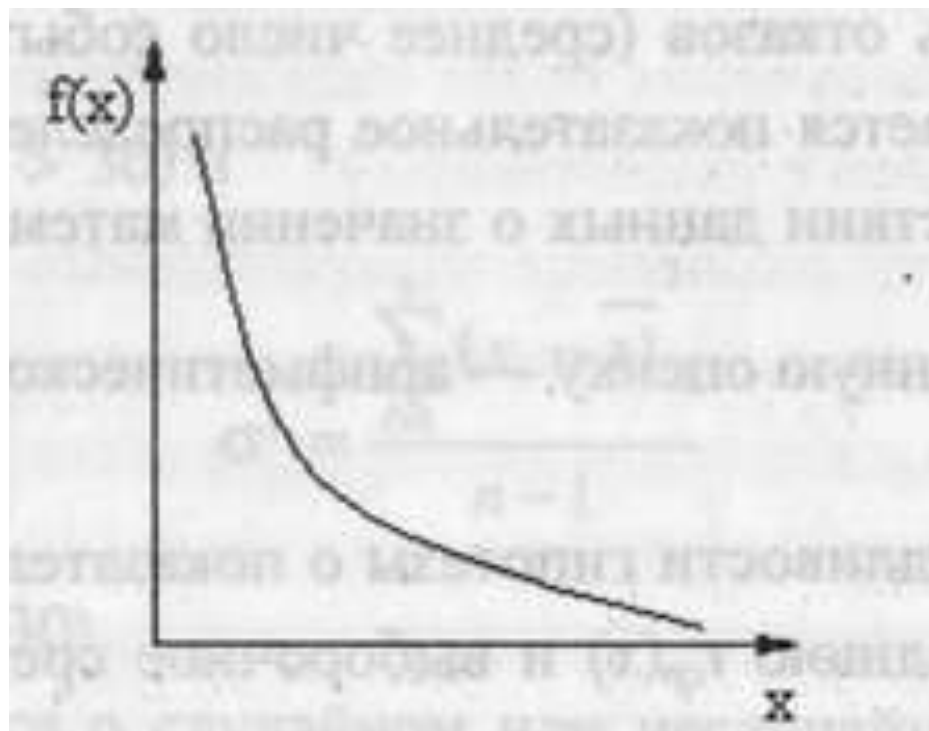
Интегральная функция показательного закона распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

График показательного закона распределения показан на рис.

Вероятность попадания в интервал  $(a, b)$  непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, находится по формуле

$$P(a < x < b) = e^{-ax} - e^{-bx}.$$



Математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра  $\lambda$ :

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия распределения в этом случае

$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

а среднее квадратическое отклонение -

$$\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, в случае показательного закона распределения

$$M(x) = \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}.$$



Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности, в теории надежности.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, интегральная функция которого

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Функция надежности, определяющая вероятность безотказной работы элемента за время длительностью  $t$ , в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Таким образом, показательным законом надежности называют функцию

$$R(t) = e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda$  — интенсивность отказов (среднее число событий в единицу времени).

Если на практике изучается показательное распределение с неизвестным параметром  $\lambda$  то при отсутствии данных о значении математического ожидания используют его приближенную оценку — арифметическое среднее, т.е.

$$\lambda = \frac{1}{t_{cp}}$$

Для оценки справедливости гипотезы о показательном распределении находят выборочную среднюю  $t_{cp}(x)$  и выборочное среднее квадратическое отклонение

$$(t_{cp} \text{ и } \sigma_t)$$

$$\sigma_{t(x)}$$

Если эти величины отличаются незначительно, то есть все основания считать справедливым применение экспоненциального закона распределения случайных величин.

В противном случае от этой гипотезы следует отказаться.

Нередко возникает необходимость сравнения результатов экспериментов различных серий с целью установления закономерного или случайного характера расхождения.

Например, одна и та же характеристика измеряется разными приборами или способами (типовым или экспериментальным) или сравниваются свойства одной и той же горной породы, но пробы которой взяты из разных месторождений.

В результате сравнения средних и дисперсий устанавливают, является ли расхождение случайным или нет с заданной надежностью вывода.

Если расхождение не случайно, то следует искать причину этого (различие состава породы из разных месторождений, ошибка выбранного принципа измерения и т.д.).

Если же расхождения случайны, то измерения двух серий наблюдений могут быть объединены в одну совокупность.

Таким образом, это также процесс сопоставимости результатов исследований различных авторов или сравнения качества изделий с одними и теми же номинальными характеристиками, но изготовленными на разном оборудовании или по различным технологиям.

Сравнение средних значений проводится следующим образом.

Пусть с одной и той же точностью произведены две серии независимых измерений, и при этом  $n_1$  наблюдений первой серии дали средние значения

$$\bar{x}_1$$

и эмпирическую дисперсию  $\sigma_1^2$ ,

а во второй серии соответственно получили  $n_2, \bar{x}_2, \sigma_2^2$ .

Напомним, что

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

для большой выборки ( $n > 30$ ) и

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

для малой выборки ( $n < 30$ ).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении средних значений рассчитываем отношение

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

$$t(P, f),$$

Задаем желаемую вероятность вывода  $P$  и по табл. находим значение соответствующее заданной вероятности  $P$  и числу степеней свободы

$$f = n_1 + n_2 - 2.$$

Значения распределения  $t(P, f)$  Стьюдента

$f$	4	5	6	7	8	9	10	18	20	50	100
0.9	2,132	2,015	1,943	1,895	1,860	1,833	1,812	1,734	1,725	1,676	1,66
$P$ 0.95	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228	2,103	2,086	2,008	1,98
0.99	4,604	4,032	3,707	3,499	3,355	3,250	3,169	2,878	2,845	2,677	2,62

Если величина расчетного значения  $t$  превосходит найденное табличное значение

$$t(P, f)$$

то расхождение средних значений можно считать неслучайным (значимым) с надежностью вывода  $P$ .

В противном случае нет оснований считать расхождение значимым.

При значимом расхождении следует выяснить причины этого и сделать выводы о степени пригодности нового метода или прибора, технологии.

Заметим, что если расчетное отношение  $t$  оказывается немногим меньше значения

при заданном  $t(P, f)$  может быть целесообразным увеличить число измерений для получения более надежного вывода, тем более что значения

уменьшаются с увеличением  $f$ .

$$t(P, f)$$

Сравнение точности различных измерительных приборов, степени влияния случайных факторов и многие другие исследовательские и производственные задачи связаны с анализом дисперсий различных серий наблюдений.

Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении дисперсий рассматривают отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей (критерий Фишера):

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1.$$

Затем задают желаемую надежность вывода  $P$  и находят по известным степеням свободы

критическое значение отношения  $P$  (табл.)

$$f_1 = n_1 - 1 \text{ и } f_2 = n_2 - 1$$

Критические значения отношения  $F_{кр}$  по формуле (4.9) для  $P = 0,95$

$f_2$	$f_1$						
	4	6	8	10	15	20	30
6	4,53	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81
7	4,12	3,87	3,73	3,63	3,50	3,44	3,38
8	3,84	3,58	4,44	3,34	3,21	3,15	3,08
9	3,63	3,37	3,23	3,13	3,00	2,93	2,86
10	3,48	3,22	3,07	2,97	2,84	2,77	2,70
12	3,26	3,00	2,85	2,76	2,62	2,54	2,46
14	3,11	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31
16	3,01	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,20
18	2,93	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11
20	2,78	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04

(Таблица допускает линейную интерполяцию).

Если отношение F по оказывается больше критического (табличного) значения  $F_{кр}$  то расхождение дисперсий считается неслучайным (значимым) с надежностью вывода P.

В этом случае следует искать причину неслучайного расхождения. В противном случае для этого нет оснований.

Пример.

Сравнить средние дисперсии содержания примесей в руде по данным 1982, 1985гг.:

$$\bar{x}_1 = \frac{344,7}{12} = 28,7; \quad \bar{x}_2 = \frac{320,8}{12} = 26,7;$$

$$\sigma_{x1} = \sqrt{\frac{7,76}{11}} = 0,84; \quad \sigma_{x2} = \sqrt{\frac{5,52}{11}} = 0,71.$$

№ п/п	1982 г.			1985 г.		
	KCl	$\Delta x_1$	$\Delta x_1^2$	$x_2$	$\Delta x_2$	$\Delta x_2^2$
2	28,4	-0,3	0,09	26,9	0,2	0,04
	29,7	1,0	1,0	26,4	-0,3	0,09
3	28,6	-0,1	0,01	26,0	-0,7	0,49
4	28,4	-0,3	0,09	25,8	-0,9	0,81
5	28,5	-0,2	0,04	25,5	-1,2	1,44



№ п/п	1982 г.			1985 г.		
	KCI	$\Delta x_1$	$\Delta x_1^2$	$x_2$	$\Delta x_2$	$\Delta x_2^2$
6	29,5	0,8	0,64	27,4	0,7	0,49
7	29,3	0,6	0,36	27	0,3	0,09
8	29,2	0,5	0,25	27,3	0,6	0,36
9	29,7	1,0	1,0	27,4	0,7	0,49
10	28,9	0,2	0,04	26,7	0	0
11	27,5	-1,2	1,44	27,8	1,1	1,21
12	27,0	-1,7	2,89	26,6	-0,1	0,01
$\Sigma$	344,7		7,76	320,8		5,52

Сравнение средних:

$$t_{\text{рас}} = \frac{|28,7 - 26,7|}{0,77 \sqrt{\frac{24}{144}}} = \frac{2,0}{0,31} = 6,45; \quad \sigma = \sqrt{\frac{11 \cdot 0,84^2 + 11 \cdot 0,71^2}{22}} = 0,77;$$

$$t_{\text{табл}} (P=0,95; f=n_1+n_2-2) = 2,086.$$

$t_{\text{табл}} < t_{\text{расч}}$

— следовательно, расхождение значимо с надежностью вывода 0,95.

Это значит, что есть объективная причина расхождения, например, изменение качества руды, и, следовательно, объединять в одну выборку данные 1982 и 1985 гг. нельзя.

$$F_p = \frac{0,84^2}{0,71^2} = \frac{0,706}{0,504} = 1,4; \quad F_{np} = 2,97 \quad (f_1 = f_2 = 11; P = 0,95).$$

Следовательно, дисперсии свойств (содержание КС/) отличаются незначительно (точность одна и та же) с надежностью вывода 0,95.

## ПОДБОР ВИДА ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Далеко не всегда удастся аналитически, опираясь лишь на теоретическое исследование данного процесса, описать необходимую зависимость.

В таких случаях основой количественного описания являются экспериментальные данные.

Применяют два метода построения эмпирических формул.

Один из них состоит в том, что подбирается алгебраический многочлен, принимающий в заданных точках установленные значения, а именно: по наблюдаемым двум точкам строится линейная функция (прямая), по трем — квадратичная (парабола) и т.п.

Достоинство метода в том, что полученная формула в точности воспроизводит экспериментальные значения. Такого рода формулы называются интерполяционными многочленами.

Способы построения интерполяционных многочленов (Лагранжа, Ньютона, Чебышева) освещены в курсе «Высшая математика».

К недостаткам интерполяционных многочленов следует отнести то, что при большом числе экспериментальных наблюдений многочлен получается высокой степени и нахождение коэффициентов требует громоздких вычислений, а в интервалах между значениями различия между опытной и расчетной зависимостями могут быть как угодно большими.

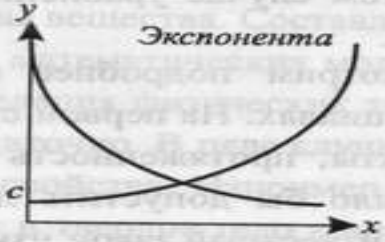
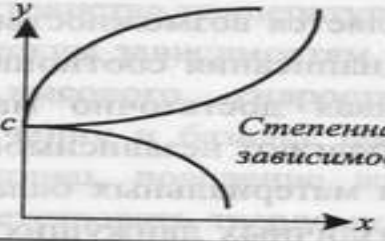
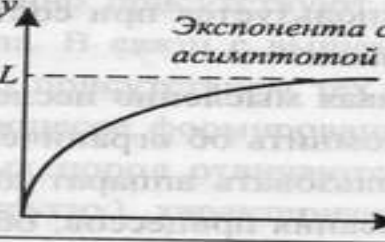

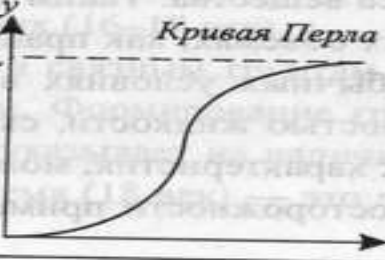
Кроме того, качество математической модели тем выше, чем меньше эмпирических коэффициентов она содержит.

Другой метод подбора эмпирических формул состоит в том, что подбирается наиболее простая формула того или иного вида, во многих случаях содержащая всего два коэффициента, определяемых по экспериментальным данным

Если при подборе вида формулы удастся учесть теоретические представления об изучаемом процессе, то это часто позволяет ограничиться минимумом экспериментальных данных и при этом возможна экстраполяция за пределами проведенных исследований.

В некоторых случаях при подборе вида формулы удастся воспользоваться известными заранее соотношениями для скорости процесса (охлаждения, нагревания, фильтрации, диффузии и др.) или данными об угловом коэффициенте касательной к искомой траектории.

В табл. приведены наиболее распространенные случаи скоростей изменения функций и виды их общих закономерностей.

№ п/п	Скорость	Закономерность	График зависимости
1	$\frac{dy}{dx} = ky$	$y = c1^{kx}$	 <p>Экспонента</p>
2	$\frac{dy}{dx} = kx^n$	$y = kx^{n+1} + c$	 <p>Степенная зависимость</p>
3	$\frac{dy}{dx} = -k(L - y)$	$y = L(1 - 1^{-kx})$	 <p>Экспонента с асимптотой</p>
4	$\frac{dy}{dx} = -kxy$	$y = ce^{-kx^2}$	 <p>Кривая вероятностей (нормальный закон распределения)</p>
5	$\frac{dy}{dx} = -ky(L - y)$	$y = \frac{L}{1 + ce^{-kLx}}$	 <p>Кривая Перла</p>

В других случаях вид формул может быть получен при использовании механического (работа, давление и др.) или геометрического (объем, поверхность, дуга и др.) смысла определенного интеграла.

Уравнения в дифференциалах получают в результате составления соотношений между приращениями и переменными. Для этого процесс мысленно разбивают на элементарные акты, позволяющие допустить линейность соотношения между приращениями и переменными, независимость частей целого, применимость фундаментальных законов физики.

При использовании материальных или тепловых балансов допускают для элементарного акта или объема независимость потоков субстанций за счет различных движущих сил.

Наиболее надежным и простым является определение коэффициентов  $a$ ,  $b$  линейной зависимости  $y = ax + b$ .

Применяют один из способов:

метод выбранных точек,  
метод средних и  
метод наименьших квадратов.

По методу выбранных точек выбирают две точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ ,  
отстоящие друг от друга и от концов исследуемого интервала. Коэффициенты  $a$ ,  $b$  находятся из уравнения

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$  методом средних находятся из условия равенства нулю алгебраической суммы отклонений экспериментальных  $n$  точек от прямой:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i = a \sum_{i=1}^m x_i + mb; \\ \sum_{i=m+1}^n y_i = a \sum_{i=m+1}^n x_i + mb, \quad \left( m = \frac{n}{2} \right). \end{cases}$$



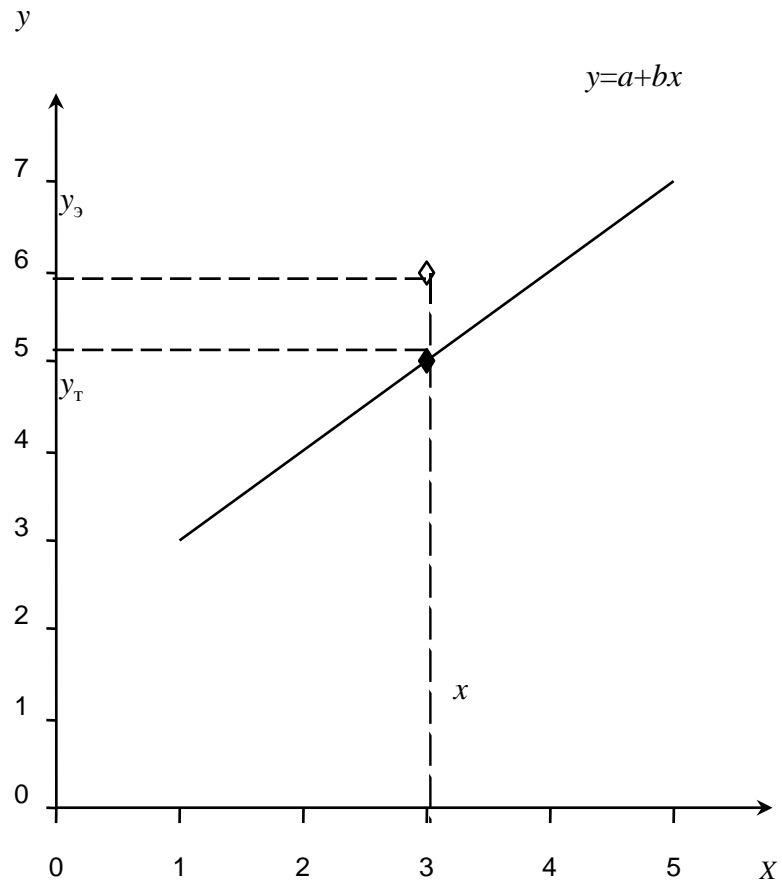
## **Определение коэффициентов уравнения регрессии**

Коэффициенты уравнения регрессии (теоретической линии регрессии) определяются методом наименьших квадратов. Этот метод широко используется при обработке результатов наблюдений в эконометрии.

Суть метода состоит в том, чтобы подобрать параметры (коэффициенты) теоретической линии регрессии с условием минимизации суммы квадратов отклонений теоретических значений результативного показателя от его эмпирических значений.

Например, для линейного уравнения регрессии необходимо определить такие значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , которые минимизировали бы сумму квадратов отклонений теоретических значений  $y_T$  от эмпирических  $y_э$  для всех точек, построенных по данным наблюдений

$$S = \sum_{i=1}^m (y_{T_i} - y_{э_i})^2 \rightarrow \min$$



Геометрический смысл метода  
наименьших квадратов

## *Линейная зависимость*

В соответствии с методом наименьших квадратов минимизируемая сумма имеет следующий вид  $S = \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \min$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i) = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)x_i = 0$$

Выполним простейшие преобразования

$$ma + b \sum x_i - \sum y_i = 0 \quad a \sum x_i + b \sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0.$$

Первое уравнение умножим на  $\sum x_i$ , а второе — на  $(-m)$

$$ma \sum x_i + b \left( \sum x_i \right)^2 - \sum x_i \sum y_i = 0$$

$$-ma \sum x_i - bm \sum x_i^2 + m \sum x_i y_i = 0$$

Решив эту систему уравнений, найдем  
искомые коэффициенты:

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{m}$$

$$b = \frac{\sum x_i \sum y_i - m \sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - m \sum x_i^2}$$

## *Гиперболическая зависимость*

Гиперболическую факторную модель вида можно линеаризовать путем замены переменной  $x$  на  $x' = 1/x$ , после этого коэффициенты  $a$  и  $b$  можно определить по формулам, выведенным для линейной зависимости.

$$y = ax^b$$

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

## *Степенная зависимость*

Степенная факторная модель                      линеаризуется методом  
логарифмирования

Для определения коэффициентов линии регрессии  
производится замена переменных:

На основе расчетов, выполненных по формулам  
линейной зависимости, определяются параметры линейной  
модели

$$y' = a' + bx'$$

Коэффициент  $a$  степенной модели определяется из выражения

$$a = e^{a'} \quad a' = \ln a$$

В конечном итоге записывается степенная факторная модель

$$y' = \ln y \quad x' = \ln x \quad y = ax^b$$

Параболическая зависимость

$$(y = ax^2 + bx + c)$$

$$S = \sum (ax^2 + bx + c - y)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum (ax^2 + bx + c - y)x^2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum (ax^2 + bx + c - y)x = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum (ax^2 + bx + c - y) = 0$$

Для определения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  используется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 - \sum yx^2 &= 0 \\ a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x - \sum xy &= 0 \\ a \sum x^2 + b \sum x + mc - \sum y &= 0 \end{aligned}$$



Метод наименьших квадратов является более предпочтительным, так как не требует равенства нулю суммы квадратов отклонений. Параметры  $a$ ,  $b$  находятся из системы

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Во многих случаях нелинейные зависимости (степенные, показательные, логарифмические) могут быть приведены к линейному виду с помощью простейших алгебраических действий и замены переменных.

Этот метод называется выравниванием функций.

Например, зависимость

$$y = ae^{bx}$$

после логарифмирования и замены  $\ln y = Y$  приводится к линейному виду

$$Y = \ln a + bx.$$

Зависимость

$$y = \frac{x^2}{ax^2 + b} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{ax^2 + b}{x^2} \rightarrow \frac{1}{y} = a + \frac{b}{x^2}$$

после замены

$$Y = \frac{1}{y} \text{ и } X = \frac{1}{x^2}$$

представляется в линейном виде  $Y = a + bX$ .

Зависимость

$$y = ax^2 e^{bx} \rightarrow \frac{y}{x^2} = ae^{bx} \rightarrow \ln \frac{y}{x^2} = \ln a + bx$$

после замены

$$Y = \ln \frac{y}{x^2}$$

имеет вид

$$Y = \ln a + bx.$$

Наиболее полное исследование зависимости требует применения корреляционного и регрессионного анализов.

Две случайные величины являются корреляционно связанными, если математическое ожидание одной из них меняется в зависимости от изменения другой. Выборочный коэффициент линейной корреляции рассчитывается по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)\sigma_x\sigma_y},$$

средние арифметические значения

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

среднеквадратические отклонения

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad (n < 30).$$

Коэффициент корреляции изменяется в пределах  $r \in [-1; 1]$

Знак «минус» — признак обратной связи.

Недостаток коэффициента корреляции — его применимость лишь для оценки степени сопряженности величин, связанных линейной зависимостью.

Метод выравнивания функций, о котором говорилось выше, позволяет значительно расширить возможности использования коэффициента корреляции для оценки меры тесноты связей.

Линейную связь обычно считают слабой, если  $|r| < 0,5$ , сильной при  $|r| > 0,7$  и практически функциональной при  $|r| > 0,9$ .

В отличие от корреляционной, зависимость между случайной и неслучайной величинами называется регрессионной, а метод анализа этой зависимости - регрессионным анализом. Уравнение линейной регрессии  $y$  по  $x$  имеет вид

$$\rho = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

где

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}),$$

коэффициент линейной регрессии.

При подборе вида эмпирической формулы удобно пользоваться атласом графиков.

Иногда оказывается, что опытная кривая похожа на несколько кривых, уравнения которых различны.

Нередки случаи, когда та или иная формула достаточно точно выражает зависимость между заданными численными значениями величин, но типичный график этой формулы не похож на экспериментальную кривую.

Это может быть потому, что экспериментальная кривая и график формулы построены для различных интервалов изменения аргумента. Выбор масштаба координатных осей также может привести к искажению формы кривой и визуальному отличию.

Чисто формально выбор вида формулы может осуществляться с табл.

Таблица выбора вида эмпирической формулы

$x_l$	$y_l$	Формула
$\sqrt{x_1 x_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a \lg x + b$
$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = axb$
$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = abx$
$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \frac{1}{ax + b}$
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = \frac{a}{x} + b$
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \frac{x}{ax + b}$

С помощью таблицы опытных данных выбираем две точки

$$(x_1, y_1) \quad (x_n, y_n),$$

достаточно удаленные друг от друга и отстоящие от краев исследуемого интервала переменной  $x$ .

Затем, рассчитав  $x_e$  и  $y_e$  по табл. , сравниваем для одного и того же  $x_e$

, значения  $y_e$  и  $y_э$  (экспериментальное).

В случае близости значения  $y_e$   $y_э$  соответствующая формула считается подходящей (это следует проверить после нахождения параметров  $a$  и  $b$ ).

Лучшей будет та формула, при использовании которой дисперсия отклонений меньшая.

Пример.

Результаты испытаний на разрушение одноосным сжатием образцов каменной соли представлены ниже

$\frac{\sigma}{\sigma_0} 100$	150	100	87	80	75
$\frac{h}{d}$	0,35	1	2	3	4

( $\sigma$  — предел прочности на сжатие;  $h, d$  - высота и диаметр испытуемых образцов.

Обозначим

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} 100 = y, \quad \frac{h}{d} = x).$$

Требуется выразить:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} \left( \frac{h}{d} \right)$$

— — формулой.



Прежде построим график пользуясь табл. по экспериментальным данным.

Пользуясь табл. для точки 1 (0,35; 150) и точки 2 (4; 75), устанавливаем, что наиболее близкие  $y_1$  и  $y_2$

при одном и том же  $x_1$

для формулы  $y = \frac{a}{x} + b$ ,

которую и принимаем для последующего применения.

Эта формула приводится к линейному виду заменой переменной:

$$\frac{1}{x} = X : y = aX + b.$$

Для новых переменных с координатами в точках 1 (2,86; 150) и 2 (0,25;75) методом выбранных точек находим уравнение

$$\frac{y-150}{75-150} = \frac{X-2,86}{0,25-2,86} \rightarrow y = 28,7X + 67,8 = 28,7 \frac{1}{x} + 67,8$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,287 \frac{d}{h} + 0,678.$$

Расчеты коэффициентов а, b методами средних и наименьших квадратов требуют составления табл.

*К расчету коэффициентов а, b*

№	x	y	1/x	$\sum y$	$\sum \frac{1}{x}$	$x^2$	xy
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,35	150	2,86			8,18	429
2	1	100	1	337	4,36	1	100

1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	87	0,5			0,25	43,5
4	3	80	0,33	242	1,08	0,109	26,4
5	4	75	0,25			0,0625	18,75
$\Sigma$		492	4,94			9,60	627,25

Методом средних составляем систему уравнений, пользуясь результатами расчетов в столбцах 5,6 табл.

$$\begin{cases} 4,36a + 3b = 337; \\ 1,08a + 3b = 242. \end{cases}$$

$$a = 28,96; b = 70,23; \frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,289 \frac{d}{h} + 0,702.$$

Составляя систему уравнений методом наименьших квадратов, воспользуемся результатами расчетов в столбцах 3, 4, 7, 8 табл.:

$$\begin{cases} 9,6a + 4,9b = 627,25; \\ 4,94a + 5b = 492. \end{cases}$$

Решением системы уравнений служит

$$a = 29,9; b = 68,84.$$

Откуда

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,299 \frac{d}{h} + 0,688.$$

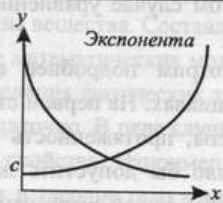

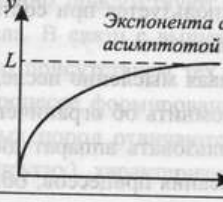
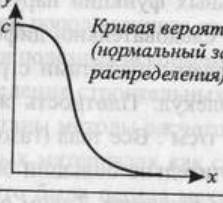

Лучшей из трех полученных формул будет та, которая дает меньшую суммарную дисперсию отклонений экспериментальных данных от расчетной кривой.

Продолжая рассматривать варианты одной и той же зависимости, можно было бы воспользоваться табл.

Сравнение графика зависимости с представленными в табл. кривыми показывает возможность использования в нашем случае экспоненты

$$y = be^{ax}$$

*Скорость и общая закономерность некоторых процессов*

№ п/п	Скорость	Закономерность	График зависимости
1	$\frac{dy}{dx} = ky$	$y = ct^{kt}$	 Экспонента
2	$\frac{dy}{dx} = kx^n$	$y = kx^{n+1} + c$	 Степенная зависимость
3	$\frac{dy}{dx} = -k(L - y)$	$y = L(1 - e^{-kt})$	 Экспонента с асимптотой
4	$\frac{dy}{dx} = -kxy$	$y = ce^{-kx^2}$	 Кривая вероятностей (нормальный закон распределения)
5	$\frac{dy}{dx} = -ky(L - y)$	$y = \frac{L}{1 + ce^{-kx}}$	 Кривая Перла

Логарифмируя, получим

$$\ln y = \ln b + ax$$

или

$$Y = B + ax \quad (\ln y = Y).$$

Для нахождения параметров  $b$  и  $a$  достаточно двух точек  $(0,35; 150)$  и  $(4; 75)$ :

$$\begin{cases} \ln 150 = B + 0,35a; \\ \ln 75 = B + 4a. \end{cases}$$

Решением системы служат  $a = -0,19$  и  $b = 160,3$ .

Следовательно,

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} 100 = 160,3 e^{-0,19 \frac{h}{d}} \quad \sigma = 1,603 \sigma_0 e^{-0,19 \frac{h}{d}}.$$

или

В последнем случае формула имеет большие возможности для анализа.

Например, скорость изменения

$$(\sigma / \sigma_0) 100$$

с увеличением

$$h/d$$

пропорциональна текущему значению

$$(\sigma / \sigma_0) 100$$

Пример.

Определение корреляционной связи между содержанием Mn и Fe в сильвините

1. Определение корреляционной связи между содержанием *Mn* и *Fe* в сильвините БПКРУ-1 по слоям 1–7:

№	<i>Mn</i>	<i>Fe</i>	$Fe - \overline{Fe}$	$Mn - \overline{Mn}$	$\Delta Fe^2$	$\Delta Mn^2$	$\Delta Fe \Delta Mn$
1	44	1212	95	1	9025	1	95
2	90	1400	283	47	80089	2209	13301
3	31	570	-447	-12	199809	144	5364
4	38	870	-147	-5	21609	25	735
5	23	490	-527	-20	277729	400	10540
6	51	1100	83	8	6889	64	664
7	21	460	-557	-22	310249	484	12254
$\Sigma$					905399	3327	42953

$$\overline{Fe} = 1017;$$

$$\overline{Mn} = 43;$$

$$\sigma_{Fe} = 388,5; \sigma_{Mn} = 23,5;$$

$$r_{MnFe} = \frac{420153}{\sqrt{90539 \cdot 3327}} = \frac{42953}{54884} = 0,78.$$

## Уравнение регрессии

$$Fe - 1017 = 0,78 \frac{388,5}{23,5} (Mn - 43) \rightarrow Fe = 12,9 Mn + 460,7.$$

2. Проверим, принадлежат ли одной выборке данные по содержанию Мп в сильвините БПКРУ-1 и СПКРУ-3:

БПКРУ-1	СПКРУ-3
44	36
90	21
31	31
38	40
23	
51	
21	



Для БПКРУ-1  $\overline{Mn} = 43$ ,  $\sigma_{Mn} = 23,5$ .

Для СПКРУ-3  $\overline{Mn} = 32$ ,  $\sigma_{Mn} = 8,2$ .

$$\sigma_{Mn} = \sqrt{\frac{16+121+1+64}{3}} = 8,2;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 23,5^2 + 3 \cdot 8,2^2}{8}} = 20,96;$$

$$t_p = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}} = \frac{11}{20,96 \sqrt{\frac{10}{21}}} = \frac{11}{14,46} = 0,76;$$

Следовательно, расхождение незначимо и с надежностью  $P = 0,95$  данные можно объединить в одну выборку.

$$P = 0,95, f = n_1 + n_2 - 2 = 8;$$

$$t_{\text{табл}} (P = 0,95, f = 8) = 2,306 > t_p = 0,76.$$

Расхождение дисперсии по критерию Фишера

$$F_p = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 = \frac{552,25}{67,24} = 8,21.$$

$$F_{\text{табл}} (P = 0,95, f_1 = n_1 - 1 = 6, f_2 = n_2 - 1 = 3) = 4,53.$$

$$F_{\text{табл}} = 4,53 < F_p = 8,21,$$

расхождение дисперсии неслучайно с надежностью вывода 0,95.

Это значит, что точность этих двух серий измерений различна для БПКРУ-1 и СПКРУ-3.

3. Методом наименьших квадратов определить зависимость  $Fe$  от  $Mn$ .

$N_0$	$Mn$	$Mn^2$	$Fe$	$Fe Mn$
1	44	1936	1212	53328
2	90	8100	1400	126000
3	31	961	570	17670
4	38	1444	870	33060
5	23	529	490	11270
6	51	2601	1100	56100
7	21	441	460	9660
$\Sigma$	298	16012	6100	307088

$$Fe = kMn + b;$$

$$\begin{cases} k \sum Mn^2 + b \sum Mn = \sum MnFe; \\ k \sum Mn + nb = \sum Fe; \end{cases} \begin{cases} k16012 + b \cdot 298 = 307088; \\ 298k + 7b = 6100. \end{cases}$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 307088 & 298 \\ 6100 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16012 & 298 \\ 298 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{2149616 - 1817800}{112084 - 88804} = \frac{331816}{23280} = 14,25.$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 16012 & 307088 \\ 298 & 6100 \end{vmatrix}}{23280} = \frac{9767320 - 91512224}{23280} = \frac{6160976}{23280} = 264,6.$$

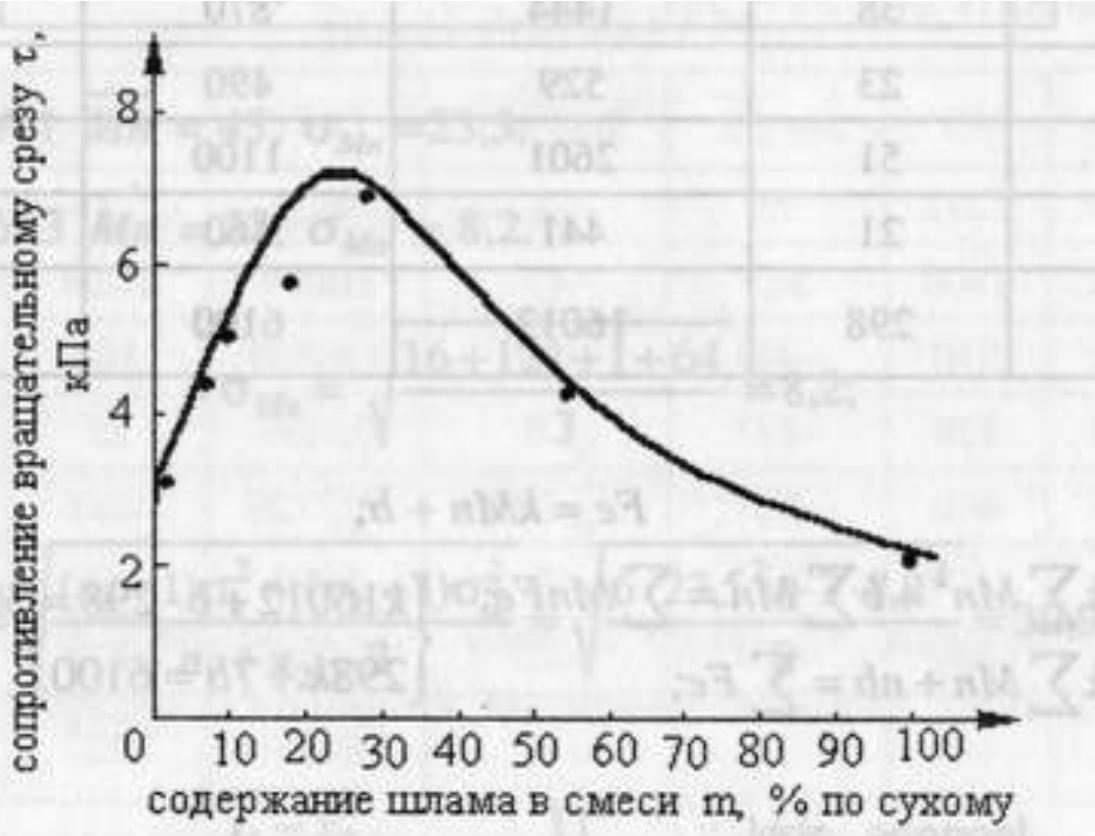
$$Fe = 14,25 Mn + 264,6.$$

Лучшую из найденных формул связи Fe(Mn) определит наименьшая дисперсия отклонений экспериментальных точек от расчетной прямой.

В следующем примере требуется определить математическую зависимость сопротивления вращательному срезу ( $\tau$ , кПа) от содержания шлама  $m$  (%) в смеси соль + шлам отходов калийного производства. Экспериментальные данные приведены в табл.

$\tau$ , кПа	3,0	4,4	4,9	6,7	5,3	3,8	1,6
$m$ , %	0	5	9	17	25	50	100

Графически экспериментальная зависимость представлена на рис.



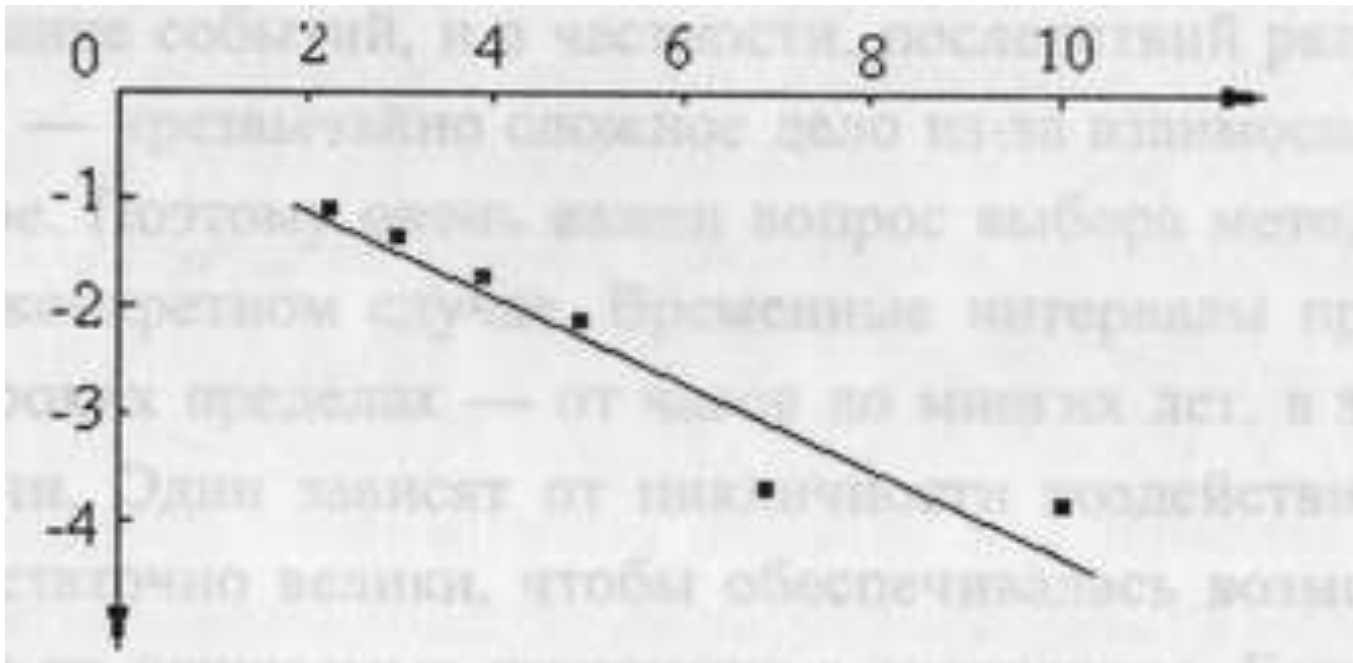
Воспользовавшись атласом кривых, находим зависимость  $\tau(m)$  в виде формулы

$$\tau - \tau_0 = a m e^{-k\sqrt{m}} \quad (\tau_0 = 3 \text{ по эксперименту}),$$

которая приводится к линейному виду  $Y = A - kM,$

$$Y = \ln \left| \frac{\tau - \tau_0}{m} \right|, \quad M = \sqrt{m}, \quad A = \ln a.$$

Правильность гипотезы подтверждается графическим построением



Коэффициенты А и к в находим методом средних по данным табл.

$$Y = -0,06 - 0,48 \sqrt{m} .$$

Следовательно:

$$\tau = \tau_0 + 0,94 m e^{-0,48\sqrt{m}} \quad (\tau_0 = 3).$$

Исследование формулы на экстремум

$$\frac{\partial \tau}{\partial m} = 0,94 e^{-0,48\sqrt{m}} - 0,94 \cdot 0,48 \cdot \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot e^{-0,48\sqrt{m}} = 0$$

позволило установить оптимальное содержание шлама в смеси:  $m = 17,36$ .

Таким образом, для обеспечения максимальных прочностных показателей и безопасной эксплуатации отвала, состоящего из смеси гапитовых и шламовых отходов, оптимальное содержание шламов должно составлять порядка 17% при  $\tau_0 = 3$ .

Полученная формула может быть использована при составлении математической модели технологии складирования шламов калийного производства.