Элементы вариационного исчисления

Наряду с задачами механики, в которых требуется определить экстремальное значение функции y = f(x), нередко возникает необходимость найти максимум или минимум переменных величин, называемых функционалами значение которых выражается определенным интегралом и зависит от выбора вида одной или нескольких функций.

Примером функционала служит выражение для длины дуги

$$J(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

Величина J(x, y) может быть вычислена , если известна y(x).

Моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой кривой или поверхности и др.также являются являются функционалами, и их вычисление зависит от вида функции входящей в уравнение кривой или поверхности.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить экстремальные значения функционалов.

Многие задачи механики и физики сводятся к утверждению, что функционал в рассматриваемом процессе должен достигать максимума или минимума.

Эти законы носят название вариационных принципов механики или физики.

К числу вариационных принципов принадлежат: принцип действия, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения количества движения, принцип Кастилиано в теории упругости и многие другие..

Таким образом, предметом вариационного исчисления является отыскание неизвестных функций y(x) или $y_i(x)$ реализующих максимум или минимум функционалов вида

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x]dx$$

или

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \ldots, y'_n(x), x]dx,$$

Где F — подынтегральное выражение.

Пределы интегрирования x_1 и x_2 и граничные значения искомых функций y или y_i известны. Рассматриваются также задачи, в которых пределы интегрирования (граничные значения функций) неизвестны и нуждаются в определении.

Предполагается, что рассматриваемые интегралы существуют, а функции y(x) или $y_i(x)$, дающие экстремум функционалу, выбираются из множества всех функций, имеющих на заданном отрезке непрерывные вторые производные.
Подынтегральная функция F (интегрант) также имеет непрерывные производные.
Каждая из n функций $y_i(x)$ реализующая экстремум функционала

$$J(y_i,\ y_i', x),$$

должна удовлетворять, согласно необходимому условию, системе n дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

при заданных граничных условиях. Искомые функции $y_i(x)$, удовлетворяющие уравнениям Эйлера, называются экстремалями рассматриваемой задачи.
Характер экстремума функционала определяется условием Лежандра. В одномерном случае J(y, y', x) имеет минимум, если $F''_{y'y'} \geq 0$

если $F''_{y'y'} \leq 0$ — максимум.

Пример

На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$J = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Воспользуемся уравнением Эйлера

$$\frac{d}{dx}(F'_{y'}) - F'_y = 0 \quad F = (y')^2 + 12xy$$

имеем $F'_y = 12x \quad \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 2y''$

После подстановки полученных выражений в уравнение Эйлера для определения экстремали получим уравнение

$$2y'' - 12x = 2(y'' - 6x) = 0.$$

Дважды интегрируя уравнение

$$y''-6 = 0,$$

получаем общее решение

$$y=x^3+c_1x+c_2$$

Воспользовавшись граничными условиями, устанавливаем, что C_1= О, C_2 = 0 и. следовательно, экстремаль имеет виду

$$y=x3$$

По условию Лежандра $F''_{y'y'} = 2 > 0$

следует, что при $y = x^3$ заданный функционал принимает минимальное значение

Вариационное исчисление играет основополагающую роль в составлении уравнений механики и физики.

Большинство этих уравнений может быть получено на основе вариационного принципа при помощи понятия энергии.

Так, например, принцип Гамильтона (принцип наименьшего действия) состоит в том, что переход системы из одного состояния в другое при стационарных связях происходит так, чтобы интеграл действия (функционал) имел минимальное значение

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)dt = \int_{t_0}^{t_1} Ldt ,$$

где T,U — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы L= T-U — функция Лагранжа). Это типичная вариационная задача.

Принцип Гамильтона можно переносить разнообразные физические процессы с целью составления уравнений в математической физике.

Очевидно помощью этого принципа могут быть решены многие задачи обоснования решений при работе с различными дисперсионными материалами.

Пример

Найти экстремаль функционала

$$\int_0^1 (48y-(y'')^2 dx \to extr\ ,\ y(0)=y'(0)=0\ ,\ y(1)=1\ ,\ y'(1)=S\ .$$

Решение.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=48-2y^{(IV)}=0$$

$$(F'_y=48\ ,\ \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=-2y^{(IV)}\ ,\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=0).$$

Решением уравнения $y^{(IV)}$ = 24 служит функция

$$y=x^4+(C_1/6)x^3+(C_2/2)x^2+C_3x+C_4.$$

Воспользовавшись граничными условиями, находим С, = 6, С2 = -2, С3 = 0, С4 = 0.

Следовательно,

$$y=x^4+x^3-x^2.$$

Дальность воздействия взрыва на горную породу

Задача о взрыве, важнейшая для горного производства, решалась многими выдающимися учеными аналитическими методами и с применением методов подобия и размерностей. Эти исследования позволили установить важней закономерности этого процесса, распределение скорости, давления, плотно и температуры за фронтом ударной волны для различных термодинамических характеристик газа.

Аналитически установлено, что вблизи центра взрыва возникают большие градиенты температуры, а плотность стремится к нулю температура и энтропия — к бесконечности.
Закон затухания ударной в зависит от формы заряда. Свойства вязкости и теплопроводности могут вызывать некоторое влияние на движение газа вблизи центра взрыва.
При сильном взрыве можно пренебречь давлением перед ударной волной по сравнению с давлением за ударной волной. Скорость распространения ударной волны в общем случае зависит от термодинамических характеристик газа

(показатель Пуассона $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$).

Если же возмущение распространяется с бесконечно большой скоростью, то возможно решение без ударной волны. С использованием метода теории подобия и размерностей установлено, что применение больших сосредоточенных зарядов для подъема горной массы энергетически невыгодно по сравнению с рассредоточением зарядов.

Таким образом, аналитические исследования взрыва очень важны, но для практического применения мало пригодны, так как требуют знания многих опытных коэффициентов, зависящих от характеристик породы, от свойств ВВ, газа и многих других факторов, для определения которых нужен эксперимент. Поэтому на практике часто действие взрыва характеризуют только массой ВВ, которая пропорциональна энергии взрыва, и в этом случае пренебрегают формой, химической и физической природой заряда. Это не всегда правильно, в частности, в вопросах действия кумулятивных зарядов.

В нормативной литературе при расчете расстояний (г), безопасных по действию ударной волны при взрывах, рекомендуется применять следующие формулы:

$$r_B = k_B \sqrt[3]{Q}$$

Для открытых зарядов ВВ при Q > 10 т;

$$r_B = k_B \sqrt{Q}$$

Для тех же условий при Q < 10 т;

где Q — масса заряда ВВ.

Для определения расстояний (м), при которых колебания грунта, вызываемые однократным взрывом сосредоточенного заряда ВВ, становятся сейсмически безопасными для зданий и сооружений, рекомендуется формула:

$$r_c = k_r \cdot k_C \cdot a\sqrt[3]{Q}\ .$$

Все эти формулы эмпирические, найдены в определенных условиях и, справедливы лишь для исследованных интервалов изменения переменных.

Опытные коэффициенты

$$k_B, k_B, k_r, k_C, a$$

изменяются в широком диапазоне,

Так, для открытых зарядов $к_в$ в изменяется от 400 (отсутствие повреждений зданий) до 30 — 50 (полное разрушение застекления, повреждение рам и дверей).

В формулах $к_в$ уменьшается с 50-150 (отсутствие повреждений) до 2-4 (разрушение внутренних перегородок, рам, дверей, сараев) и 1,5-2,0 (разрушение малостойких каменных и деревянных зданий).

Рекомендуется принимать $к_г$=5 (ненарушенные скальные породы), (нарушенные скальные породы), $к_г$= 12 (необводненные песчаные, глинистые грунты глубиной до 10 м), к,=20 (водонасыщенные грунты).

Коэффициент $к_с$ изменяется от 1 (одиночные производственные здания с железобетонным металлическим каркасом) до 2 (небольшие жилые поселки).

И, наконец а= 1 — взрыв на рыхление; а=0,8 — взрыв на выброс; а=0,5 — взрыв полу углубленного заряда.

В случае, когда не подходит ситуация под указанные варианты, используют коэффициенты, дающие больший радиус безопасной

Как отмечалось, формулы эмпирические, но и в этом будет получен лучший результат, если при подборе вида формулы учитывались теоретические представления о сущности происходящего процесса.

Применительно к рассмотренным примерам легко убедиться, что выше приведенные формулы могут быть получены из допущения пропорциональности я действия заряда площади поражения, так как из

$$\frac{dQ}{dr} = kr^2$$

следует

$$\int_0^Q dQ = k\int_0^{r_B} r^2 dr \rightarrow Q = \frac{k}{3}\cdot r_B^3,$$

оттуда

$$r_B = k_B\sqrt[3]{Q}.$$

Формула может быть получена следующим образом

$$\frac{dQ}{dr} = kr \rightarrow \int_0^Q dQ = k\int_0^{r_H} r dr \rightarrow Q = k\frac{r_B^2}{2},\ r_B = k_B\sqrt{Q}.$$

Применяя тот же принцип можно определить зависимость давления ударной волны Р от расстояния /- исходя из допущения

$$\frac{dP}{dr} = -kP$$

-(скорость ударной волны пропорциональна текущему значению Р). В результате интегрирования находим экспоненциальный закон изменения Р(г). Учитывая неоднозначность ситуации из-за большой вариабельности коэффициентов пропорциональности в эмпирических формулах, считаем возможным рекомендовать использовать для принятия решений (особенно в вопросах безопасности) упрощенные методы расчета последствий взрыва.

Конечно, при этом следует знать, что пренебрегаем сопротивлением воздуха, допускаем аддитивность потоков энергии взрыва. До 10-15% энергии ВВ расходуется на разрушение горной массы (при заглублении ВВ). Часть энергии ВВ идет на нагрев среды (в центре) и химические реакции, а какая-то часть может быть поглощена или, напротив, отражена от препятствия (стены или др.) и тем самым усилить ударную волну в одном из направлений.

Рассмотрим приближенный вариант расчета разброса (разлета) кусков породы при взрыве.

Тепловая энергия E (в единицах механической работы) взрыва ВВ массой

$$E = Q \cdot q ,$$

где q — удельная теплота взрыва ВВ (например, для тротила q = 4,2 МДж/кг).

Начальную скорость v_0 разлета кусков породы находим из выражения кинетической энергии

$$E = \frac{mv^2}{2};$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}},$$

E_1 — часть энергии взрыва, приходящейся на живое сечение ω «куска» с массой m.

Эта часть составляет долю сферы с поверхностью (l — расстояние "куска» от места взрыва):

$$\sigma = 4\pi\ell^2$$

$$E_1 = \frac{100 \cdot \omega}{\sigma} \cdot E.$$

Таким образом. $$v_0 = \sqrt{\frac{2E \cdot 100\omega}{m\sigma}}.$$

Исследуя баллистику (параболу) разлета «кусков», находим что

$$(v_0)_x = (v_0)_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

так как самая большая дальность полета у «куска», улетающего под углом 45°

Уравнение траектории полета куска породы находим из условия непрерывного перехода кинетической энергии, сообщенной телу (куску) в потенциальную.

В этой задаче используется вариационный принцип — принцип Гамильтона. Этот принцип состоит в переходе из одного состояния в другое таким образом, чтобы интеграл действия (функционал) имел минимальное значение

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (E - U) dt ,$$

где E, и U- соответственно кинетическая $\left(E = \frac{my'^2}{2} \right)$

и потенциальная $(U = mgy)$

энергии системы I = E - U - функция Лагранжа.

Экстремаль , дающую функционалу минимальное значение, находим из уравнения Эйлера:

$$F'_y - \frac{d}{dt} \cdot F'_{y'} = 0,$$

$$F = \frac{my'^2}{2} - mgy = m\left(\frac{y'^2}{2} - gy\right), \quad F'_y = -g, \quad F'_{y'} = y', \quad \frac{d}{dt} \cdot F'_{y'} = y''.$$

После подстановки найденных величин в уравнение Эйлера находим:

$$y'' + g = 0,$$

$$y' = -gt + c$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 .$$

С учетом начальных условий

$$(\, y'(t=0) = (v_0)_y \quad \text{и} \quad y(t=0) = h \,)$$

получим уравнение движения куска породы

$$y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0)_y t + h\,.$$

В самой высокой точке траектории

$$y' = v_y(t = t_1) = 0 .$$

Следовательно,

$$y' = -gt + (v_0)_y$$

при $t = t_1$ имеем

$$t_1 = \frac{(v_0)_y}{g} .$$

Полное время полета куска

$$T = 2t_1 = \frac{2(v_0)_y}{g}$$

а радиус поражения

$$R = (v_0)_x \cdot T .$$

Если рассматривается произвольный начальный угол α

$$(v_0)_x = v_0 \cdot \cos\alpha \ \text{ и } \ (v_0)_y = v_0 \cdot \sin\alpha .$$

Считаем также, что рассмотренный м можно использовать в обратном порядке — для определения массы ВВ известных R и m.

Например, для l = 2 м, m = 4 кг, w= 0,01 $м^2$, Q = 0,6 кг

$$v_0 = \frac{2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}102 \cdot 100 \cdot 0{,}01}{4\pi \cdot 2^2 \cdot 4} = 50{,}4 \ \text{м/с},$$

$$(v_0)_x = (v_0)_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 35{,}7 \ \text{м/с}.$$

Полное время полета куска породы

$$T = \frac{2(v_0)_y}{g} = \frac{2 \cdot 35,7}{9,84} = 7,28 \text{ с.}$$

Радиус поражения

$$R = (v_0)_x \cdot T = 35,7 \cdot 7,28 = 260 \text{ м.}$$

Приведенные примеры показывают эффективность аналитического следования при подготовке решения.