Линейное программирование в задачах управления производством

Многие задачи управления, экономики и организации производства решаются с использованием метода линейного программирования.

Модель линейного программирования состоит из совокупности линейных алгебраических уравнений и неравенств, выражающих функцию цели и ограничения на нее.
Математическая модель линейного программирования в общем случае имеет следующий вид:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = S \rightarrow extr$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq A$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \leq B$$

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n = F$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0.$$

При решении задач на минимум преобладают ограничения на больше, а на максимум — типа меньше; в транспортных задачах преобладают ограничения в виде равенств.

В общем случае в любой из перечисленных задач могут встретиться ограничения всех трех типов

Решение задач составляет предмет линейного программирования.

В практических задачах критерий оптимизации является экономическим (приведенные затраты, прибыль, себестоимость), применяются и технологические показатели (число часов работы, производительность и др.); $x_1,x_2,—,x_n$ — искомые неотрицательные переменные, имеющие различный смысл в задачах (объем производства, число часов работы машин, планируемые под разработку площади, количество компонентов в смеси и т.д.).

Дополнительные условия представляют собой ограничения на функцию цели по материальным и сырьевым ресурсам, производственным заданиям, мощностям, трудоемкости, капитальным з м различных технологий, удельных расходов и затрат.

Приведем ряд задач горного производства, решенных методом линейного программирования.

К их числу относятся

задачи оценки запасов сырьевых баз с позиций оптимального удовлетворения потребностей проектируемых предприятий в сырье,

оптимизации использования сырьевых ресурсов при их комплексной переработке на основе малоотходной технологии,

оптимизации распределения технологического оборудования в цикле с целью улучшения качества добываемой продукции и экономики производства,

транспортные задачи оптимального распределения продукции, баланса топлива и ряд других.

Уже сам перечень указывает на их масштабность и важность для улучшения экономики горной отрасли.

Функция критерия оптимизации S, экстремум которой отыскивается. называется целевой или функцией цели.

Совокупность x удовлетворяющих ограничениям, называется областью допустимых значений при которых целевая функция принимает наибольшее или наименьшее значение — решением задачи линейного программирования или оптимальным планом. .

Задача оптимизации с ограничениями может не иметь ни одного допустимого решения или одно (несколько) множество оптимальных решений.

Экстремум может находиться лишь где-то на границе области, а не внутри.

В большинстве задач линейного программирования искомыми являются переменные, число которых достигает десятков, сотен и даже тысяч.

В таких случаях необходимо применение ЭВМ.

Однако многие практические задачи могут быть решены и ручными методами.

В случае двух искомых переменных задача линейного программирования может быть легко решена геометрическим методом.

С геометрической точки зрения задача состоит в отыскании координат точки (x_1, x_2) на границе допустимой области решения

Суть геометрического метода легко усвоить из следующего примера.

Пусть

$$3x_1 + 2x_2 = S \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях

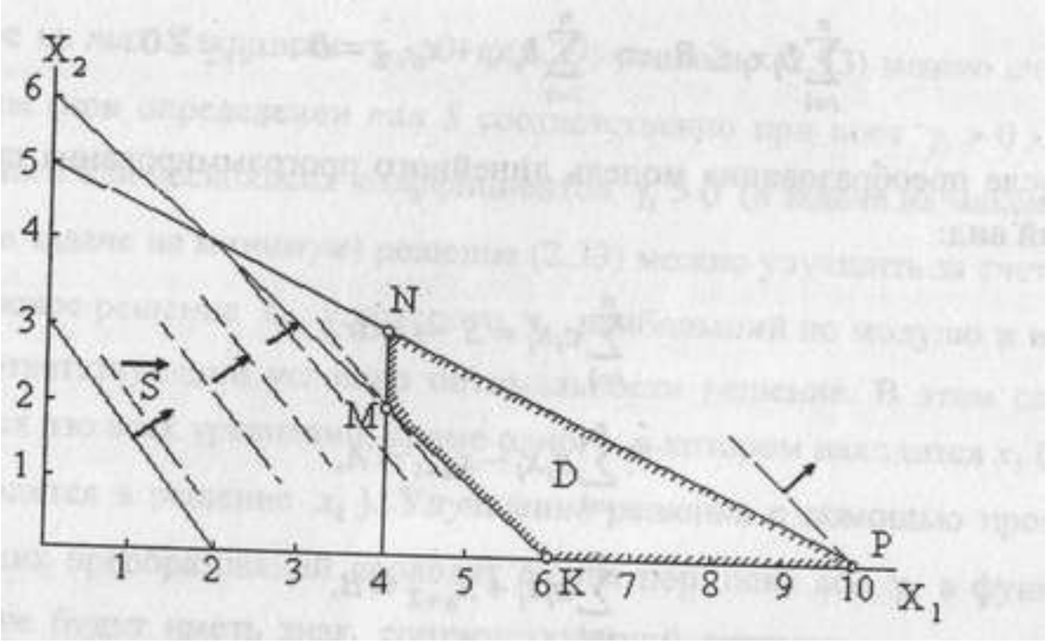
$$x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

На основе ограничений построим область допустимых решений О



Решением задачи является одна из вершин области D (или множество точек одной из сторон этого многоугольника). Для нахождения координат точки, обеспечивающей экстремальное значение функции цели, строим из произвольных значений S линейную функцию (в примере удобно принять S=6) и перемещаем параллельно самой себе, удаляя от начала координат в сторону области О.

Первая точка М области D которой касается S, определяет минимум, а последняя Р, которой касается S при выходе из области D, — максимум.

Подтвердим сказанное определением и сравнением значений функции цели для всех вершин области D; координаты точек (6,0); (4,2); (4,3); 10,0). Значения функции цели: S =3-6 + 2-0 = 18; S =16;S = 18 ; S = 30 Убеждаемся, что минимум S в точке М, а максимум —точке Р.

Координаты каждой вершины области D находятся совместным решением двух уравнении.
Решением оптимизационной задачи удовлетворяются лишь часть уравнений, ограничивающих область допустимых решений.
Это неудобно при поиске оптимального решения для большого числа переменных так как следует рассчитать и сравнить

$$S_{n+m}^{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

n независимых переменных из m уравнений ограничений. При значительных n и m

S_{n+m}^{n}

настолько велико, что поиск оптимального решения требует большого времени даже при использовании ЭВМ
Прямые методы поиска оптимального решения исчерпываются случаями решения задач линейного программирования, содержащих не более двух - трех независимых переменных при сравнительно небольшом числе ограничений

Универсальным способом решения Задач линейного программирования яляется симплекс-метод

Анализ модели на чувствительность позволяет ответить на ряд важных вопросов.
Останется ли решение оптимальным, если уменьшится удельный вклад в прибыль одной из базисных переменных?
К каким последствиям приведет сокращение объема ресурсов?
Что произойдет, если ввести в рассмотрение новую управляемую переменную?

Прежде всего представляет интерес ответ на вопрос, останется ли найденный допустимый оптимальный базис оптимальным, если изменить коэффициенты в целевой функции.

В теории линейного программирования существует важное понятие двойственности. Задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ x_i \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_i \ (j = 1, 2, \ldots, m) \ y_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

называются соответственно исходной и двойственной.

В качестве иллюстрации образования двойственной модели рассмотрим исходную задачу

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = S \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5, 3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 7, 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2.$$

Двойственная задача

$$5y_1 + 7y_2\ 2y_3 = R \rightarrow \min$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 1, y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 2, y_1 + y_2 - 5y_3 \ge 4.$$

Таким образом, по существу, двойственная задача — это на 90° повернутая исходная задача.

Переход к двойственной задаче в ряде случаев упрощает поиск решения и анализ чувствительности модели.

Если исходная (двойственная) задача допускает оптимальное решение, для которого значение целевой функции ограничено, то соответствующая ей двойственная задача имеет оптимальное решение при том же значении целевой функции.

В заключение отметим, что задача линейного программирования

$$\min S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

При заданных ограничениях

преобразуется в задачу

$$\max S = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при тех же ограничениях.

Динамическое программирование (планирование) применяется для нахождения оптимальных решений в многошаговых (многоэтапных) задачах.

Принцип оптимальности динамического программирования сформулирован Р.Беллманом:

«Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения».

Примерами задач, решаемых методом динамического программирования, могут служить:

планирование производственной программы по периодам года при минимальных затратах на производство и содержание запасов;

распределение средств и ресурсов на расширение производства при максимизации прироста выпуска продукции;

оптимальное планирование замены устаревшего оборудования более совершенным при максимизации прибыли;

календарное планирование ремонта либо замены устаревшего оборудования при минимуме эксплуатационных затрат;

выбор оптимального маршрута при минимуме транспортных расходов

Любую многоэтапную задачу можно решать двумя способами: искать оптимальное решение сразу на всем протяжении процесса или строить его шаг за шагом.

После оптимизации i-го шага, исходя из результатов предыдущего, оптимизируют следующий (i + 1)-й шаг.

Второй способ проще.

Его суть в постепенной, поэтапной оптимизации, что особенно ценно в задачах, где ситуация меняется во времени, и поэтому необходимо планировать с учетом временного фактора.

Принцип оптимальности Беллмана записывается в виде рекуррентного соотношения

$$f_{n-i}(x_i) = \max_{x_i, x_{i+1}}(\min)\left\{R_{i+1}(x_i, x_{i+1}) + f_{n-(i+1)}(x_{i+1})\right\}_{(i=\overline{1,n-1})},$$

где x_i, x_{i+1} — решение (управление), выбранное на i-м шаге -дуга из x_i в x_{i+1}

$x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(m)})$ – состояние системы на i-м шаге;

R, — эффект, достигаемый на i-м шаге;

f_{n-i} — оптимальное значение эффекта, достигаемого за n-i шагов;

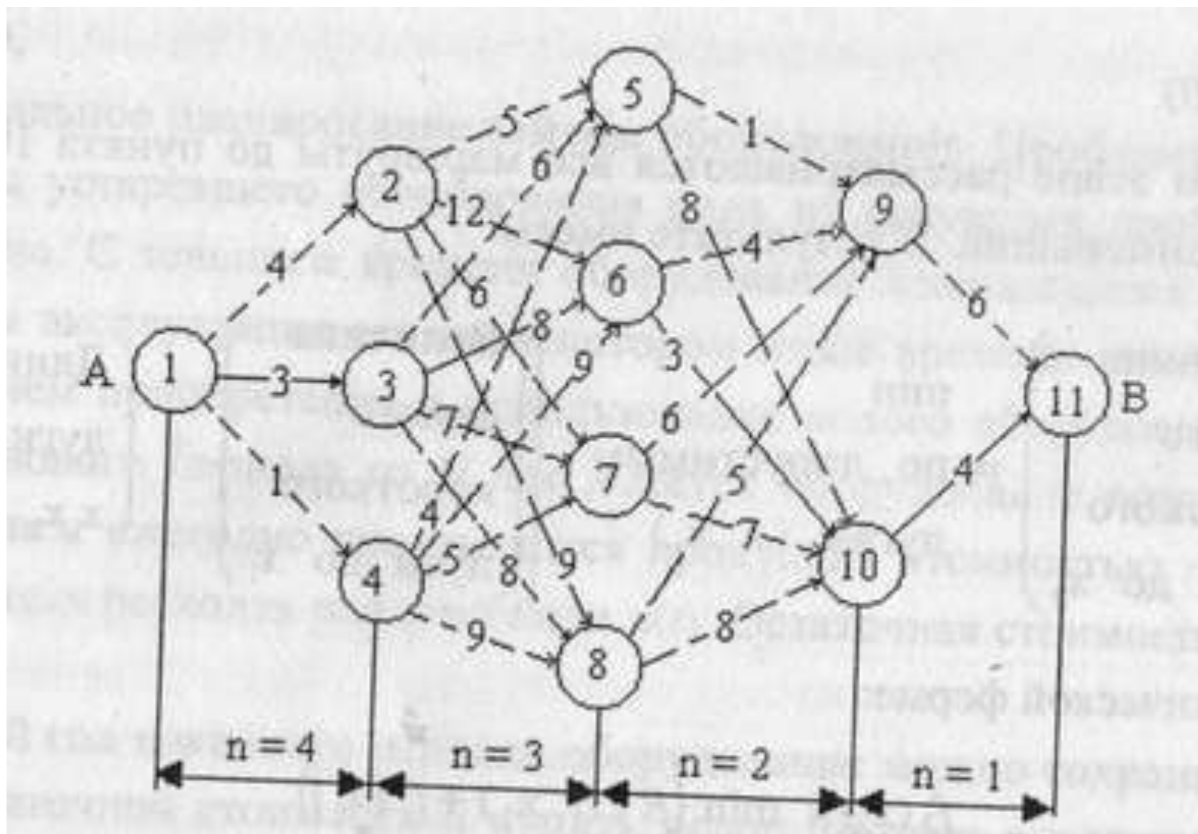
n число шагов (этапов).

Пример.

Требуется перевезти груз из пункта А в пункт В. Сеть дорог, связывающих эти пути, показана на рис.
Стоимость перевозок груза из пункта $x_{n-1}(x_{n-1}=\overline{1,10})$

в пункт $x_n(x_n = \overline{2,11})$

поставлена над соответствующими дугами сети. Необходимо найти маршрут, связывающий пункты А В, для которого суммарные транспортные расходы были бы наименьшими.



Решение.

Цифры в вершинах сети означают промежуточные пункты (2 - 10). а дугам соответствуют транспортные магистрали с указанием стоимости (условные единицы) перевозки.
Разобьем все множество пунктов на пять подмножеств (см. рис.): (1), (2,3,4), (5,6,7,8), (9,10), (11). Таким образом, любой маршрут из пункта А в пункт В содержит четыре этапа (четыре дуги). На первом этапе предстоит решить, через какой пункт, принадлежащий второму подмножеству, предстоит везти груз, затем, на втором этапе — через какой пункт третьего подмножества следует лучший маршрут из некоторого пункта второго множества.
Пронумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной (см. рис. 2).

Рассмотрим последний шаг (этап) при $n = 1$ и вычислим для него значение функции :

$$f_1(9) = x_{9,10} + f_0(11) = 6 + 0 = 6;$$
$$f_1(10) = x_{10,11} + f_0(11) = 4 + 0 = 4.$$

Оптимальный маршрут на последнем этапе

$$f_1(x_1) = \min_{x_{n-1}, x_n} \{6;4\} = 4,$$ т.е. из пункта 10.

На втором этапе рассматриваются все маршруты до пункта 10 и и выбирается наименьший. В результате имеем:

$$\begin{pmatrix}\text{Величина}\\ \text{самого}\\ \text{короткого}\\ \text{пути до } x_2\end{pmatrix} = \begin{matrix}\min\\ \text{по допустимым}\\ \text{дугам } (x_1, x_2)\end{matrix} \left\{ \begin{pmatrix}\text{Величина}\\ \text{самого}\\ \text{короткого}\\ \text{пути до } x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Длина}\\ \text{дуги}\\ x_1 x_2\end{pmatrix} \right\},$$

математической форме:

$$f_2(x_2) = \min_{x_1, x_2} \{R(x_1, x_2) + f_1(x_1)\},$$

или в цифрах:

$$f_2(5) = 8 + 4 = 12\; f_2(6) = 3 + 4 = 7\; f_2(7) = 7 + 4 = 11,\; f_2(8) = 4 + 4 = 8.$$

Отсюда

$$f_2(x_2) = \min_{x_1, x_2} \{12, 7, 11, 8\} = 7,$$

т.е. на втором этапе лучшим является маршрут из пункта 6 в пункт 10.
На третьем этапе рассматриваются маршруты в пункт 6 и из них выбирается наилучший:

$$f_3(x_3) = \min_{x_2, x_3} \{R_3(x_2, x_3) + f_2(x_2)\}, \quad f_3(3) = 8 + 7 = 15, f_3(4) = 9 + 7 = 16.$$

Отсюда

$$f_3(x_3) = \min_{x_2, x_3} \{15; 16\} = 15,$$

т.е. на третьем этапе выбираем маршрут из пункта 3 в пункт 6. И, наконец на четвертом этапе остается один-единственный возможный маршрут

$$f_4(x_4) = 3.$$

Оптимальный маршрут из А в В стоимостью, равной 18 усл. ед. (выделе на рис.)
Для сравнения заметим, что другие маршруты стоимости 22,21,20,26 усл. ед.

Пример
Оптимальное планирование замены оборудования.
Проблема своевременной замены устаревшего оборудования одна из насущных проблем горного производства. С течением времени оборудование изнашивается физически и морально, а эксплуатация его на некотором этапе времени становится менее выгодной, чем приобретение и использование нового оборудования.

Пусть в начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста t. Этим оборудованием ежегодно производится продукция стоимостью г (t) при эксплуатационных расходах для этой цели u(t). Остаточная стоимость оборудования s(t).

В любой год планового периода оборудование можно сохранить или продать по остаточной стоимости и купить новое по цене p с учетом затрат на эксплуатацию.

Требуется разработать оптимальную политику замены оборудования при условии максимизации прибыли за период времени длительностью N лет.

В соответствии с методикой решения задач динамического программирования начнем процесс оптимизации с конца планового периода, обозначив годы от конца периода к началу: n = 1,2,..., N.

Считаем, что к началу последнего года (n = 1) у нас имеется оборудование возраста t.
Если оборудование сохранить, то прибыль за последний год составит

$$r(t) - u(t),$$

а если оборудование продать по остаточной стоимости и купить новое, то прибыль к концу последнего года составит

$$s(t) - p + r(0) - u(0),$$

где r(0) — стоимость продукции, произведенной новым оборудованием за год
u(0) — расходы, связанные с эксплуатацией нового оборудования в течение года

Заменять оборудование выгодно лишь в случае, если

$$s(t) - p + r(0) - u(0) > r(t) - u(t),$$

когда доход от нового оборудования выше, чем от эксплуатации старого.

Обозначим через $f_n(t)$ максимально возможную прибыль за последние n лет планового периода при условии, что в начале периода имеется оборудование возраста t.
В соответствии с этим максимальную прибыль за последний год обозначим через $f_1(t)$ — это наибольшее

$$f_1(t) = \max_t \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) \rightarrow \text{сохранение} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \rightarrow \text{замена} \end{array} \right\}.$$

Пусть теперь n = 2 (второй этап планирования), т.е. рассматривается период из двух последних лет.

Если к началу этого периода принято решение сохранил оборудование возраста t, то к концу этого периода прибыль, составит r(t) - u(t). За 1 год оборудование постареет и к началу последнего года будет иметь возраст (t + 1) лет. На последнем году от этого оборудования будет получена дополнительная прибыль $f_1(t + 1)$, а общая прибыль за 2 года составит

$$r(t) - u(t) + f_1(t + 1).$$

Если в начале второго года принято решение обновить оборудование, затраты, связанные с продажей старого и приобретением нового оборудования, составят $s(t) - p$, а прибыль от эксплуатации нового оборудования за первый год равна $r(0) - u(0)$.

К концу первого года оборудование постареет и будет иметь возраст 1 год, а прибыль в последнем году составит $f_1(1)$.

Общая прибыль за два года при замене оборудования составит

$$s(t) - p + r(0) - u(0) + f_1(1).$$

Оптимальной в последние два года будет политика, обеспечивающая этот период максимальную прибыль, т.е. равную наибольшему из

$$f_2(t) = \max_t \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_1(t+1) \rightarrow \text{сохранение} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + f_1(1) \rightarrow \text{замена} \end{array} \right\}.$$

В общем случае рекуррентное соотношение (уравнение Беллмана) имеет вид

$$f_n(t) = \max_{t,n} \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_{n-1}(t+1) \rightarrow \text{сохранение} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + f_{n-1}(1) \rightarrow \text{замена} \end{array} \right\},$$

$n = 2, 3, \ldots; t = 0, 1, 2, \ldots.$

Выражение позволяет сформулировать оптимальную политику в области замен устаревшего оборудования с конца планируемого периода, находя

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t).$$

Пример

Проиллюстрируем задачу условным числовым примером. Пусть требуется на пятилетний период N = 5 разработать политику замен оборудования не старше t=10 лет. Стоимость r(t) продукции и расходы u(t), связанные с эксплуатацией оборудования, даны ниже.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	30	30	29	28	28	26	24	23	22	21	20
$u(t)$	10	11	11	12	12	14	15	17	17	18	20

Ликвидационная стоимость оборудования не зависі' равна 2 усл. ед., а цена единицы нового оборудования не меняется и равна 14 усл. ед.

Функциональные уравнение

$$f_1(t) = \max_t \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) \to \text{сохранение} \\ 2 - 14 + 30 - 10 = 8 \to \text{замена} \end{Bmatrix},$$

$$f_n(t) = \max_{t,n} \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + f_{n-1}(t+1) \to \text{сохранение} \\ 8 + f_{n-1}(1) \to \text{замена} \end{Bmatrix}.$$

Пользуясь формулами последовательно вычислим значение максимальной прибыли fn(t) при различных n, t и внесем полученные значения в табл.

Первую строку таблицы заполняем, придавая параметру t формулах значения 0, 1.....10 и пользуясь значениями t, r(t); u(t).

Значение максимальной прибыли

$f_n(t)$	t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$	20	19	18	16	16	12	9	8	8	8	8
$f_2(t)$	39	37	34	32	28	22	22	22	22	22	22
$f_3(t)$	57	53	50	45	45	45	45	45	45	45	45
$f_4(t)$	73	69	63	61	61	61	61	61	61	61	61
$f_5(t)$	89	82	79	77	77	77	77	77	77	77	77

Пусть t = 0, тогда

$$f_1(0) = \max_t \begin{Bmatrix} r(0) - u(0) \\ 8 \end{Bmatrix} = \max_t \begin{Bmatrix} 30 - 10 = 20 \\ 8 \end{Bmatrix} = 20.$$

Так как 20 > 8, то принимается решение сохранить оборудование. Далее при t = 1 находим :

$$f_1(1) = \max_t \begin{Bmatrix} 30 - 11 \\ 8 \end{Bmatrix} = 19.$$

Вывод — при t = 1 следует сохранить оборудование. Продолжая аналогично:

$$f_1(6) = \max_t \begin{Bmatrix} 24 - 15 \\ 8 \end{Bmatrix} = 9,$$

т.е. по-прежнему следует вывод о сохранении оборудования. При t = 7

$$f_1(7) = \max_t \begin{Bmatrix} 23 - 17 \\ 8 \end{Bmatrix} = 8,$$

что свидетельствует о необходимости замены оборудования при (t = 7, 6< 8).
Далее при t > 7 максимизация $f_1(t)$ требует замены оборудования.

Вторую строку таблицы (для двухлетнего периода) заполняем по формуле

$$f_2(t) = \max_t \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + f_1(t+1) \\ 8 + f_1(1) \end{Bmatrix}$$

$$f_2(t) = \max_t \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + f_1(t+1) \\ 27 \end{Bmatrix}.$$

Придавая значения t= 0, 1,..., 10, последовательно находим

$$f_2(0) = 39,\ f_2(1) = 37,\ f_2(2) = 34 \ldots$$

При этом значения u(t), r(r) берем из условия примера, а $f_1(t+1)$

— из первой строки табл.

До t = 4 (n = 2) убеждаемся, таким образом, что оптимальная политика состоит в сохранении оборудования, а при t > 5 лучше произвести его замену.

Третья строка табл. заполняется на основе формулы (для трехлетнего периода n=3)

$$f_3(t) = \max_t \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + f_2(t+1) \\ 8 + 37 = 45 \end{Bmatrix}.$$

Для $n = 3$ $f_3(0) = 57$, $f_3(1) = 53$, $f_3(2) = 50$

необходимо, согласно принципу оптимальности, сохранить оборудование, а уже при t = 3 имеем

$$r(3) - u(3) + f_2(4) = 44 < 8 + f_2(1) = 45,$$

и, следовательно, при t > 3 следует произвести замену оборудования.

Продолжая вычисления и сравнение, вышеуказанным способом постепенно заполняем табл.

Анализ данных табл. с целью выработки оптимальной политики замены оборудования проводится следующим образом. Область «сохранения» и «замен» оборудования отделим жирной чертой.

Допустим, что в начале пятилетнего периода (n= 5) имеется оборудование двухлетнего возраста (t= 2) и требуется выработать оптимальное решение относительно этого оборудования на предстоящие пять лет.

В табл. на пересечении f_5 (t) и t = 2 находим значение прибыли от эксплуатации этого оборудованияf_5 (2) = 79 и замечаем, что это значение находится в области принятия решения сохранения. Это означает, что для достижения в плановом периоде N = 5 лет на первом году оборудование двухлетнего возраста надо сохранить.

Это оборудование к концу года постареет на один год (t = 3), и, следовательно, при t = 4 прибыль от эксплуатации его будет меньше, чем в случае замены
(f_4(3) = 61).

Заменив это оборудование на втором году эксплуатации, при n = 3 имеем новое оборудование и через один год работы получим прибыль fз (1) = 53.

Далее, при n = 4 приобретенное оборудование стареет на год, следовательно, имеем прибыль $f_2(2) = 34$.

При n= 5, точно так же рассуждая находим $f_1(3) = 16$, и все это в области принятия решения сохранения оборудования.

Таким образом, символически формирование оптимальной можно изобразить следующим образом:

$$f_5(2) \xrightarrow[\text{сохранить}]{\text{1-й год}} \triangleright\ f_4(3) \xrightarrow[\text{заменить}]{\text{2-й год}} \triangleright\ f_3(1) \xrightarrow[\text{сохранить}]{\text{3-й год}} \triangleright$$

$$\triangleright\ f_2(2) \xrightarrow[\text{сохранить}]{\text{4-й год}} \triangleright\ f_1(3) \xrightarrow[\text{сохранить}]{\text{5-й год}} \triangleright$$

Анализируя полученный результат, замечаем, что вместо поиска решения сразу для всех пяти лет находим серию взаимно связных решений для отрезков времени меньшей длины (1 год), что упростило процедуру планирования.

Для иллюстрации укажем оптимальные решения для оборудования, имеющего на начальный период возраст t = 0 (вновь приобретенное),

$$t = 1, t = 10:$$

$$f_5(0) \to f_4(1) \to f_3(2) \to f_2(3) \to f_1(4) \to$$

замен не планировать

$$f_5(1) \to f_4(2) \to f_3(3) \to f_2(1) \to f_1(2)$$

замена

$$f_5(10) \to f_4(1) \to f_3(2) \to f_2(3) \to f_1(4)$$

- замена

При составлении оптимального плана методом динамического программирования замечаем, что, несмотря на то что в начале планируемого периода имелось разное по возрасту оборудование, к концу планируемого периода характеристики оборудования по возрасту в значительной степени сравнялись, уменьшив количество устаревшего оборудования.

Этим подтверждается важная особенность метода динамического программирования, состоящая в том прошлое оптимизируемого процесса не имеет значения при определении принятия решения, а играет роль лишь состояние системы при входе в данный этап.