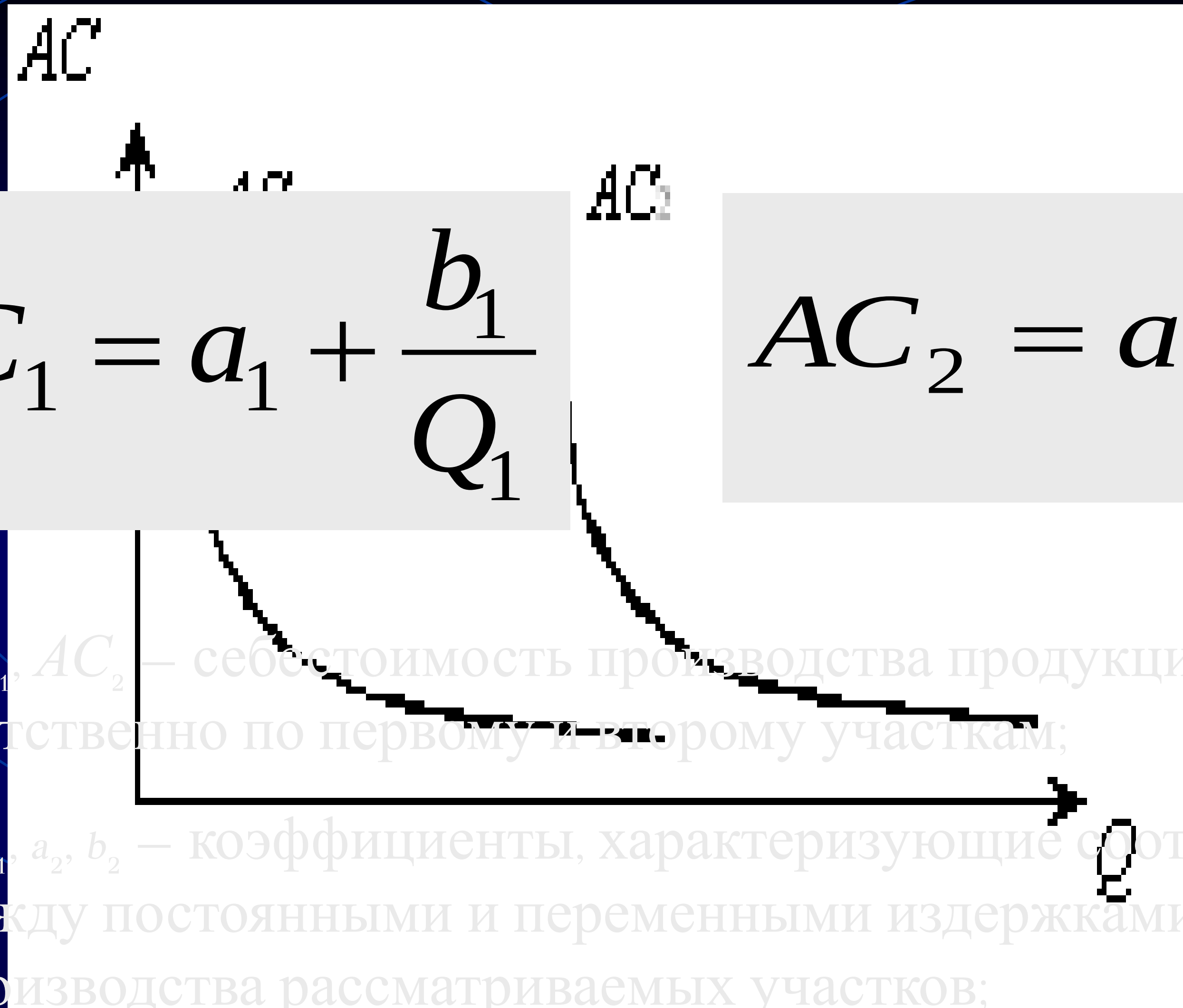
Лекция
Планово-экономические задачи, решаемые методами линейного программирования

. Задача распределения выпуска продукции по цехам и участкам предприятия.

Известны зависимости себестоимости продукции по производственным участкам от объема выпуска продукции . Участки производят однородную продукцию

$$AC_1 = a_1 + \frac{b_1}{Q_1}$$

$$AC_2 = a_2 + \frac{b_2}{Q_2}$$



— Зависимость себестоимости продукции от объема производства

где AC_1, AC_2 – себестоимость производства продукции соответственно по первому и второму участкам;

a_1, b_1, a_2, b_2 – коэффициенты, характеризующие соотношение между постоянными и переменными издержками производства рассматриваемых участков;

Q_1, Q_2 – объемы производства соответственно по первому и второму участкам.

Необходимо определить план производства продукции по каждому участку при условиях выполнения объема производства по предприятию и минимизации совокупных издержек производства.

Математическая модель задачи линейного программирования

$$TC = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + b_1 + b_2 \to min$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_{\text{пр}}$$

$$Q_1 \geq 0; \;\; Q_2 \geq 0$$

где TC – совокупные издержки производства по производственным участкам предприятия;

$Q_{\text{пр}}$ – объем производства продукции по предприятию.

Кроме ограничения по объему производства (2) в модель могут быть введены дополнительные ограничения по качеству продукции, ресурсные, технологические и другие ограничения.

Задачи оптимизации ассортимента

Предприятие при производстве n видов изделий использует m видов ресурсов в количествах a_1, ..., a_i, ..., a_m. Известны нормы расхода i–го ресурса на производство j–го изделия. Определить план выпуска изделий, при котором совокупные издержки на их производство будут наименьшими.Математическая модель задачи

$$x_i \geq 0,$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$$

$$a_{11}x_1 + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n \leq a_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{ij}x_j + a_{in}x_n \leq a_i;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{mj}x_j + a_{mn}x_n \leq a_m;$$

где c_j – себестоимость j–го изделия;

x_j – план выпуска j–го изделия;

a_{ij} – норма расхода i–го ресурса на производство j–го изделия;

a_i – ограничение расхода i–го ресурса по предприятию.

Календарное планирование объемов производства

Задача заключается в составлении плана производства продукции по m цехам на T лет при условии минимизации совокупных издержек производства за рассматриваемый период. Математическая модель задачи

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_{it} x_{it} \rightarrow min$$

где c_{it} – себестоимость продукции по i–му цеху в t–м году;

x_{it} – план производства i–го цеха в t–м году;

Q_t – объем производства предприятия в t–м году.

В модель могут быть введены дополнительные ресурсные и технологические ограничения, а также условия выполнения финансово-экономических показателей предприятия.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = Q_1;$$

....

$$\sum_{i=1}^{m} x_{it} = Q_t;$$

....

$$\sum_{i=1}^{m} x_{iT} = Q_T;$$

$$x_{it} \geq 0$$

Транспортная задача линейного программирования

Транспортная задача имеет следующую постановку.

Поставщики однородной продукции A_1, ..., A_i, ..., A_m имеют объемы производства a_1, ..., a_i, ..., a_m. Данная продукция имеет n потребителей: B_1, ..., B_j, ..., B_n, объемы потребления которых составляют b_1, ..., b_j, ..., b_n. Из каждого пункта производства возможна транспортировка продукции в любой пункт потребления. Транспортные издержки по перевозке единицы продукции от поставщика A_i до потребителя B_j равны c_{ij}.

Задача состоит в определении такого плана перевозок x_{ij}, при котором запасы всех потребителей удовлетворяются, вся продукция из пунктов производства вывозится при минимальных суммарных транспортных издержках.

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

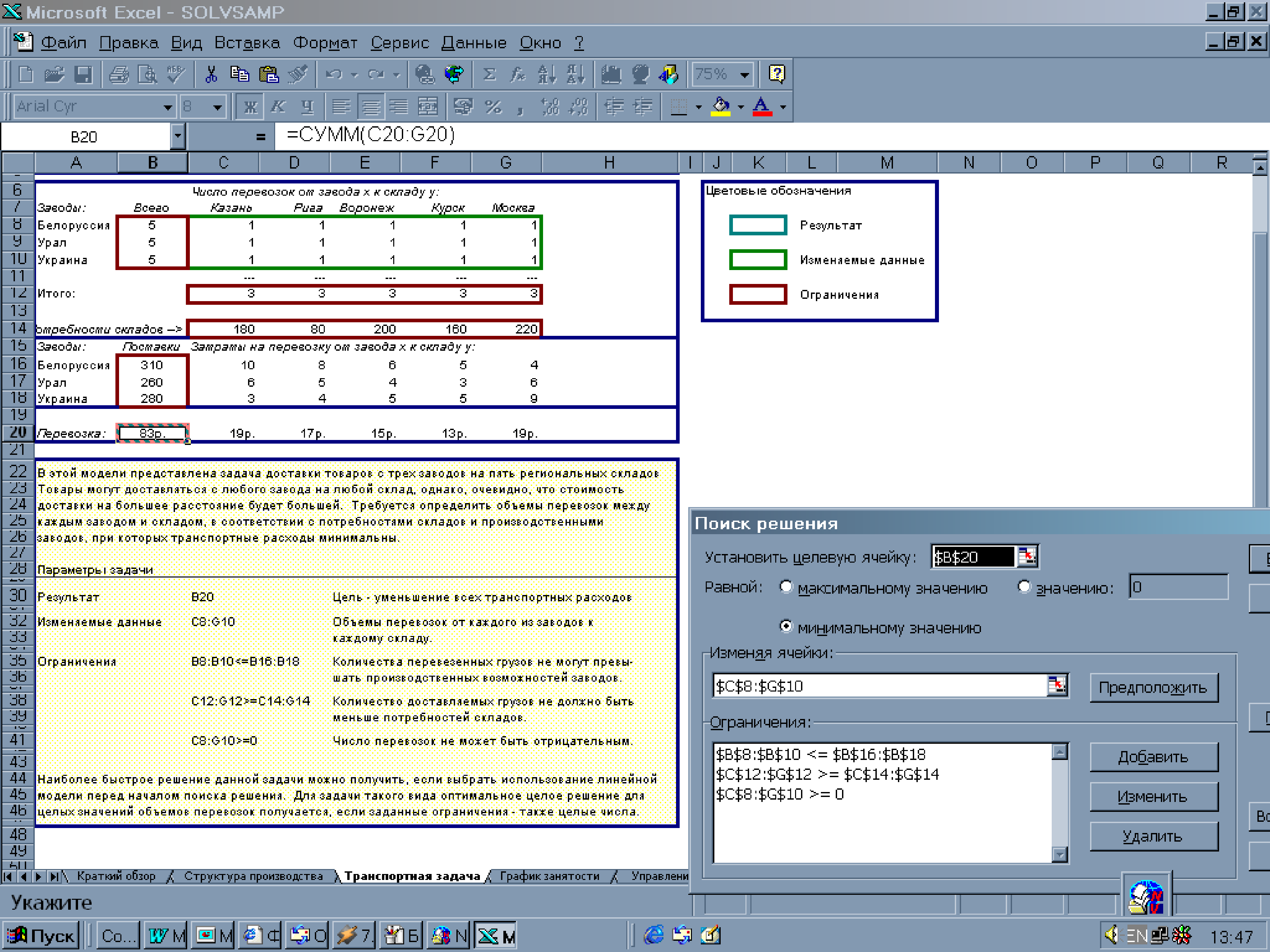
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В приведенной математической модели

- уравнение 1 является целевой функцией и выражает минимизируемую сумму транспортных издержек;
- 2 – условие вывоза всей продукции из пунктов производства;
- 3 – условие удовлетворения спроса всех потребителей;
- 4 – условие сбалансированности транспортной задачи (суммарная производительность поставщиков равна суммарному спросу потребителей).

Существует несколько методов решения транспортной задачи, среди которых наибольшее распространение получили метод потенциалов и венгерский метод .


Microsoft Excel - SOLVSAMP
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?
Arial Cyr
B20
=СУММ(C20:G20)
Число перевозок от завода x к складу y:
Заводы: Всего Казань Рига Воронеж Курск Москва
Белоруссия 5 1 1 1 1 1
Урал 5 1 1 1 1 1
Украина 5 1 1 1 1 1
Итого: 3 3 3 3 3
отребности складов –> 180 80 200 160 220
Заводы: Поставки Затраты на перевозку от завода x к складу y:
Белоруссия 310 10 8 6 5 4
Урал 260 6 5 4 3 6
Украина 280 3 4 5 5 9
Перевозка: 83р. 19р. 17р. 15р. 13р. 19р.
Цветовые обозначения
Результат
Изменяемые данные
Ограничения
В этой модели представлена задача доставки товаров с трех заводов на пять региональных складов. Товары могут доставляться с любого завода на любой склад, однако, очевидно, что стоимость доставки на большее расстояние будет большей. Требуется определить объемы перевозок между каждым заводом и складом, в соответствии с потребностями складов и производственными заводов, при которых транспортные расходы минимальны.
Параметры задачи
Результат B20 Цель - уменьшение всех транспортных расходов
Изменяемые данные C8:G10 Объемы перевозок от каждого из заводов к каждому складу.
Ограничения B8:B10<=B16:B18 Количества перевезенных грузов не могут превышать производственных возможностей заводов.
C12:G12>=C14:G14 Количество доставляемых грузов не должно быть меньше потребностей складов.
C8:G10>=0 Число перевозок не может быть отрицательным.
Наиболее быстрое решение данной задачи можно получить, если выбрать использование линейной модели перед началом поиска решения. Для задачи такого вида оптимальное целое решение для целых значений объемов перевозок получается, если заданные ограничения - также целые числа.
Краткий обзор
Структура производства
Транспортная задача
График занятости
Управлени
Поиск решения
Установить целевую ячейку: $B$20
Равной: максимальному значению значению: 0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$C$8:$G$10
Предположить
Ограничения:
$B$8:$B$10 <= $B$16:$B$18
$C$12:$G$12 >= $C$14:$G$14
$C$8:$G$10 >= 0
Добавить
Изменить
Удалить
Укажите
Пуск
13:47

Примеры экономических задач, которые сводятся к транспортной задаче линейного программирования

1. *Задача оптимального распределения ресурсов.*

Предприятие производит продукцию, используя m видов ресурсов на n технологических процессах. Известны производительность каждого процесса и нормы потребления каждого ресурса. Требуется распределить ресурсы по технологическим процессам таким образом, чтобы общий эффект использования ресурсов был максимальным.Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_{ij} x_{ij} \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = R_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Q_j$$

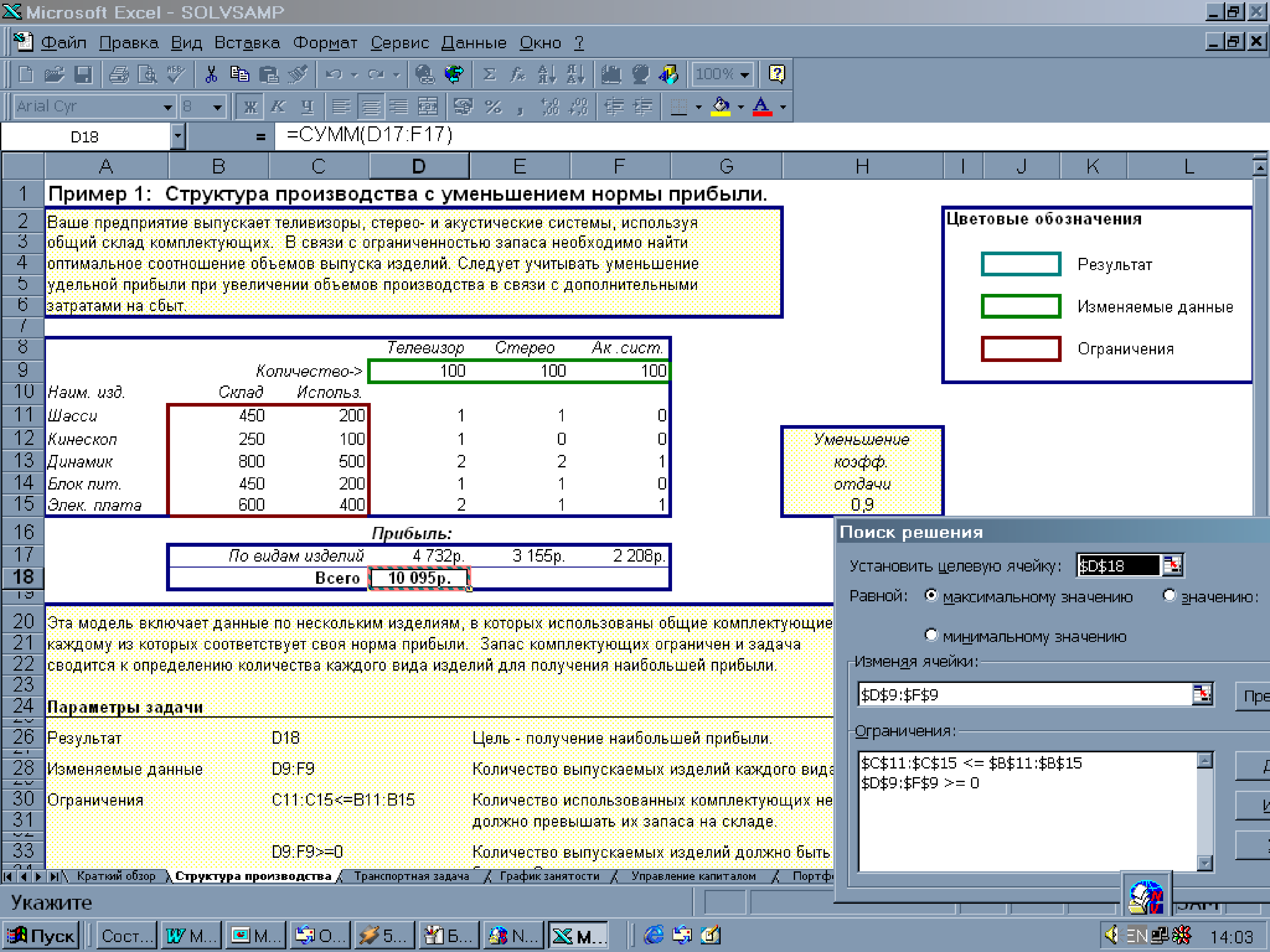
где E_{ij} – эффект от использования i–го ресурса в j–м процессе; x_{ij} – использование i–го ресурса в j–м процессе;R_i – количество i–го ресурса,используемогопредприятием за определенный период;Q_j – производитель предприятия по j–му технологическому процессу

Задача об оптимальном назначении.

На предприятии для выполнения m видов работ привлекаются n исполнителей. Известны удельные затраты на выполнение i–го вида работы j–м исполнителем. Необходимо распределить исполнителей по видам работ с таким расчетом, чтобы совокупные издержки на выполнение всего комплекса работ были минимальными.Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = Q_i \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = P_j$$

Где c_{ij}–удельные затраты на выполнение i–го вида работ j–м исполнителем;x_i объем работ i–го вида выполняемый j–м исполнителем; Q_i общий объем работ i–го вида ;P_j общая производительность j–го исполнителя


Microsoft Excel - SOLVSAMP
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?
Arial Cyr
D18
=СУММ(D17:F17)
Пример 1: Структура производства с уменьшением нормы прибыли.
Ваше предприятие выпускает теливизоры, стерео- и акустические системы, используя общий склад комплектующих. В связи с ограниченностью запаса необходимо найти оптимальное соотношение объемов выпуска изделий. Следует учитывать уменьшение удельной прибыли при увеличении объемов производства в связи с дополнительными затратами на сбыт.
Цветовые обозначения
Результат
Изменяемые данные
Ограничения
Телевизор Стерео Ак.сист.
Количество-> 100 100 100
Наим. изд. Склад Использ.
Шасси 450 200 1 1 0
Кинескоп 250 100 1 0 0
Динамик 800 500 2 2 1
Блок пит. 450 200 1 1 0
Элек. плата 600 400 2 1 1
Уменьшение коэфф. отдачи 0,9
Прибыль:
По видам изделий 4 732р. 3 155р. 2 208р.
Всего 10 095р.
Эта модель включает данные по нескольким изделиям, в которых использованы общие комплектующие
каждому из которых соответствует своя норма прибыли. Запас комплектующих ограничен и задача
сводится к определению количества каждого вида изделий для получения наибольшей прибыли.
Параметры задачи
Результат D18 Цель - получение наибольшей прибыли.
Изменяемые данные D9:F9 Количество выпускаемых изделий каждого вида
Ограничения C11:C15<=B11:B15 Количество использованных комплектующих не должно превышать их запаса на складе.
D9:F9>=0 Количество выпускаемых изделий должно быть
Поиск решения
Установить целевую ячейку: $D$18
Равной: максимальному значению значению:
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$D$9:$F$9
Ограничения:
$C$11:$C$15 <= $B$11:$B$15
$D$9:$F$9 >= 0
Краткий обзор Структура производства Транспортная задача График занятости Управление капиталом
Укажите
Пуск
14:03

Распределение оборудования между подразделениями предприятия.

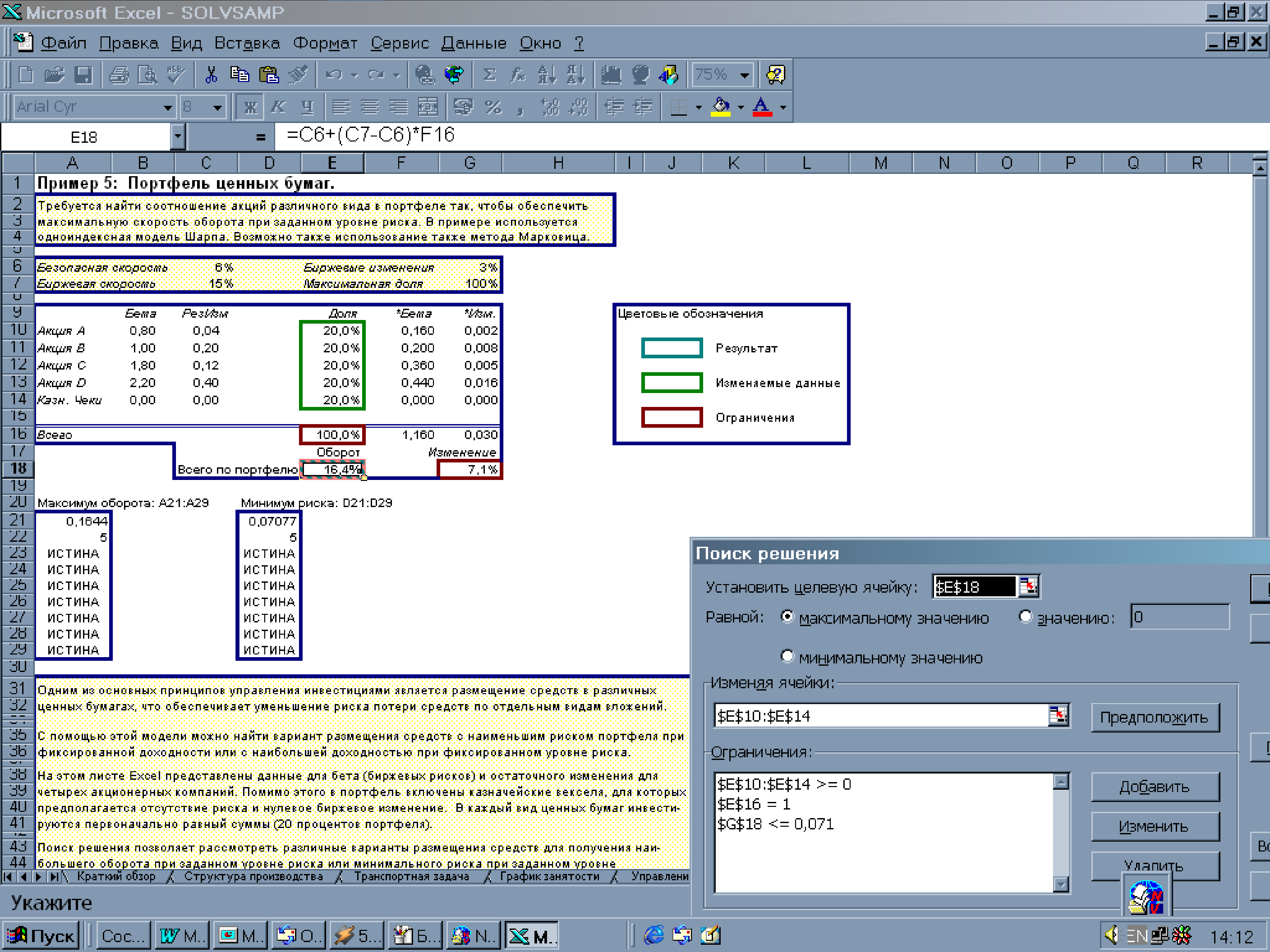
Предприятие, состоящее из n подразделений, использует m видов оборудования. Известна себестоимость j–го подразделения при использовании i–го вида оборудования. Необходимо распределить имеющееся оборудование между производственными подразделениями с таким расчетом, чтобы суммарные издержки по предприятию были минимальными. Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

где c_{ij} — себестоимость j–го подразделения при использовании i–го вида оборудования; x_{ij} — производительность i–го оборудования, используемого в j–м подразделении; a_i — суммарная производительность оборудования i–го вида; b_j — суммарная производительность j–го участка.


Microsoft Excel - SOLVSAMP
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?
Arial Cyr
E18
=C6+(C7-C6)*F16
Пример 5: Портфель ценных бумаг.
Требуется найти соотношение акций различного вида в портфеле так, чтобы обеспечить максимальную скорость оборота при заданном уровне риска. В примере используется одноиндексная модель Шарпа. Возможно также использование также метода Марковица.
Безопасная скорость 6%
Биржевая скорость 15%
Биржевые изменения 3%
Максимальная доля 100%
Бета
РезИзм
Доля
*Бета
*Изм.
Акция A 0,80 0,04 20,0% 0,160 0,002
Акция B 1,00 0,20 20,0% 0,200 0,008
Акция C 1,80 0,12 20,0% 0,360 0,005
Акция D 2,20 0,40 20,0% 0,440 0,016
Казн. Чеки 0,00 0,00 20,0% 0,000 0,000
Всего 100,0% 1,160 0,030
Оборот
Изменение
Всего по портфелю 16,4% 7,1%
Цветовые обозначения
Результат
Изменяемые данные
Ограничения
Максимум оборота: A21:A29
0,1644
5
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
Минимум риска: D21:D29
0,07077
5
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
ИСТИНА
Одним из основных принципов управления инвестициями является размещение средств в различных ценных бумагах, что обеспечивает уменьшение риска потери средств по отдельным видам вложений.
С помощью этой модели можно найти вариант размещения средств с наименьшим риском портфеля при фиксированной доходности или с наибольшей доходностью при фиксированном уровне риска.
На этом листе Excel представлены данные для бета (биржевых рисков) и остаточного изменения для четырех акционерных компаний. Помимо этого в портфель включены казначейские векселя, для которых предполагается отсутствие риска и нулевое биржевое изменение. В каждый вид ценных бумаг инвестируются первоначально равный суммы (20 процентов портфеля).
Поиск решения позволяет рассмотреть различные варианты размещения средств для получения наибольшего оборота при заданном уровне риска или минимального риска при заданном уровне
Краткий обзор
Структура производства
Транспортная задача
График занятости
Управлени
Поиск решения
Установить целевую ячейку: $E$18
Равной: максимальному значению
значению: 0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$E$10:$E$14
Предположить
Ограничения:
$E$10:$E$14 >= 0
$E$16 = 1
$G$18 <= 0,071
Добавить
Изменить
Удалить
Укажите
Пуск
14:12