Вывод УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Строгое решение многих задач математической физики, связанных с течением жидкостей, распределением напряжений в массиве, переносом тепла, массы или импульса невыполнимо.

В связи с этим перед исследователем неизбежно возникает вопрос (проблема) упрощения, сокращения уравнений, чревато грубыми ошибками, если не знать истоков (основ) получения описания.

Ведь каждый член уравнения — это вполне определенный процесс или свойство объекта исследования. Поэтому целесообразно каждый раз при использовании дифференциального уравнения проанализировать прежде всего как оно было получено, и на основании этого можно правильно подойти к упрощению и пренебрежению какими-то факторами, несущественными в данной постановке задачи.

Основным принципом составления балансовых уравнений в частных производных служит соотношение:

скорость изменения = прибыль - убыль в единицу времени.

Уравнение неразрывности (сплошности)

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz. Вследствие неразрывности потока весь объем выделенного параллелепипеда постоянно заполнен движущейся жидкостью. При этом масса поступающей и выходящей жидкости в общем случае различна, что обусловлено непостоянством величин скорости v и плотности ρ.

Через площадку dydz левой грани за единицу времени втекает количество жидкости равное $\rho v_x dydz$, а через противоположную грань вытекает

$$[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx]dy$$

Таким образом, приращение массы жидкости в объеме dV, вызванная различием ρ и v_x на левой и правой гранях параллелепипеда, равно:

$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydz.$$

Точно так же устанавливаем для направлений, перпендикулярных OY, OZ:

$$\Delta M_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho \upsilon_y)dxdydz;$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho \upsilon_z)dxdydz.$$

Полное приращение массы жидкости в параллелепипеде dV за единицу времени равно

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \upsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \upsilon_z)\right]dxdydz.$$

При неразрывности потока изменение массы в объеме dV вызвано изменением плотности жидкости. Следовательно,

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz.$$

Приравнивая друг другу два полученных выражения для ΔM

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \upsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \upsilon_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \upsilon_z)\right] dxdydz = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz.$$

оттуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \upsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \upsilon_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \upsilon_z) = 0.$$

Полученное уравнение носит название общего уравнения неразрывности сплошности

В частных случаях уравнение неразрывности принимает следующий вид

Для капельной (несжимаемой) жидкости (ρ = const)

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0 \text{ или } div\ \vec{\upsilon}=0;$$

Для однородного газа ($\rho = \rho(t)$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)=0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\, div\,\vec{\upsilon}=0;$$

Для установившегося движения $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}=0\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\upsilon_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\upsilon_z)=0.$$

Уравнение движения

Вывод уравнения движения основан на известном законе механики:

сила равна массе, умноженной на ускорение.

В любой точке движущегося потока должно иметь место равенство сил обусловливающих движение.

Такими силами являются сила тяжести сила давления (перепад давления) и сила трения.

Выделим в жидкости, находящейся в движении, элементарный параллелепипед с объемом dV и ребрами dx dy dz. Найдем проекции на ось OX силы тяжести действующих на этот элементарный объем.
Сила тяжести, пр ыражением

$$q_x \rho\, dV = q_x \rho\, dxdydz,$$

где qx — проекция ускорения силы тяжести (м^2/с) на OX по длине ребра dx.

Эта сила действует против действующей силы давления.

Проекция действующей силы давления

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz.$$

Действие силы трения рассматривают вначале на примере движения плоского ламинарного потока, в котором проекция скорости v_x зависит только от y. В этом случае сила трения возникает лишь на боковых гранях элемента.

На расстоянии y от поверхности грани сила трения равна -Sdxdz и направлена против движения, так как скорость движения здесь меньше, чем в самом элементе. В сечении y + dy сила трения равна

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y}dy\right)dxdz$$

и направлена в сторону движения, поскольку в том случае скорость движения жидкости больше, чем в самом элементе.

Проекция равнодействующих сил равна

$$\left(S+\frac{\partial S}{\partial y}dy\right)dxdz-Sdxdz=\frac{\partial S}{\partial y}dxdydz,$$

где S — сила трения на единицу поверхности

По закону Ньютона

$$S=\mu\frac{d\upsilon_x}{dy},$$

где μ — вязкость среды

Подставив значение S в выражение для проекции, получим

$$\frac{\partial S}{\partial y}dV=\mu\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}dV.$$

В общем случае, когда скорость υ_x по всем трем направлениям

проекция силы трения на OX будет равна

$$\mu\left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right)dV=\mu\nabla^2\upsilon_x dV,$$

$\nabla^2\upsilon_x$ - символ, называемый оператором Лапласа.

Складывая проекции всех сил на OX, приложенных к dV, получим

$$\left[\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right)\right]=0.$$

Эта равнодействующая всех сил равна произведению массы элемента ΔV

на его ускорение $\frac{d\upsilon_x}{dt}$:

$$\rho \frac{d\upsilon_x}{dt} dV = \rho \left[\frac{\partial \upsilon_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \right] dV,$$

$\frac{d\upsilon_x}{dt}$ полная производная скорости по времени, равная

$$\frac{\partial \upsilon_x}{dt} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, уравнение движения жидкости в проекции на ось OX имеет вид:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t}+\rho\left(\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right)=\rho q_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}\right).$$

Аналогично получаются уравнения в проекциях на OY и OZ

$$\rho\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t}+\rho\left(\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right)=\rho q_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}+\rho\left(\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)=\rho q_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right).$$

Все три уравнения образуют систему дифференциальных уравнения Навье-Стокса. справедливых как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Если μ постоянно, то систему уравнений в проекциях на OX, OY, OZ можно заменить одним векторным:

$$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\rho(\vec{\upsilon}, grad\,\vec{\upsilon})=\vec{q}\,\rho-gradP+\mu\nabla^2\vec{\upsilon}$$

или

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+(\vec{\upsilon}, grad\,\vec{\upsilon})=\vec{q}-\frac{1}{\rho}gradP+\nu\nabla^2\vec{\upsilon},$$

$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ — коэффициент кинематической вязкости ($м^2/с$).

Уравнения Навье-Стокса могут быть выведены для сжимаемой жидкостей.

Первое из уравнений, относящееся к OX, имеет вид

$$\rho\left(\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\right)=\rho q_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right].$$

Подобные же уравнения имеют место для OY и OZ.

Уравнение движения для несжимаемой жидкости получается из последнего уравнения, если положить

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0,$$

т.е. допустить справедливой гипотезу неразрывности потока.

Уравнение теплового баланса

Поступающее в рассматриваемый единичный объем dV тепло при установившемся состоянии равно такому же количеству отходящего тепла. К данному, так же как и при выводе в предыдущем случае, тепло подводится за счет теплопроводности и с помощью материальных частиц, протекающих через единичный объем при одновременном его охлаждении. Если температура этого объема не изменяется во времени, то общее количество подведенного тепла должно равняться нулю, и если учесть наличие источников тепла q_i то будем иметь уравнение

$$c\gamma\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+q_i,$$

где с —теплоемкость среды; γ — удельный вес; λ — теплопроводность.

В левой части уравнения представлено тепло в единичном объеме dV которое используется для нагревания на dT частиц, протекающих через параллелепипед со сторонами dx, dy. dz. Это тепло покрывается за счет подвода из окружающей среды (первый член правой части уравнения) и за счет источника тепла q_i.
Разделив обе части уравнения на $c\gamma$ получим

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_i}{c\gamma},$$

или, в векторной форме:

$$(\vec{v}, gradT) = a\nabla^2 T + \frac{q_i}{c\gamma},$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$

коэффициент температуропроводности среды.

Подобное уравнение используется при анализе распределения тепла влаги и других субстанций в массиве.

Обычно система состоит из уравнений неразрывности, движения, теплопроводности (диффузии) и начальных и граничных условий.

С помощью этих уравнений могут быть решены многие задачи обогащения и обезвоживания и т.д. и т.п.