ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГОРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Математические модели и численные методы

Математические модели содержат соотношения, составленные на основе теоретического анализа изучаемых процессов или полученные в результате ; обработки экспериментов (таблиц данных, графиков).

В любом случае математическая модель лишь приближенно описывает реальный процесс. Поэтому вопрос точности, адекватности модели является важнейшим. Необходимость приближений возникает и при самом решении уравнений.

До недавних пор модели, содержащие нелинейные дифференциальные уравнения или дифференциальные уравнения в частных производных, не могли быть решены аналитическими методами. Это же относится к многочисленным классам неберущихся интегралов.

Однако разработка методов численного анализа позволила необозримо раздвинуть границы возможностей анализа математических моделей, особенно это стало реальным с применением ЭВМ.

Численные методы используются для приближения функций, для решения дифференциальных уравнений и их систем, для интегрирования и дифференцирования, для вычисления числовых выражений.

Функция может быть задана аналитически, таблицей, графиком.

При выполнении исследований распространенной задачей является приближение функции аналитическими выражениями.

При этом решаются четыре задачи:

- выбор узловых точек, проведение экспериментов при определенных значениях (уровнях) независимых переменных (при неправильном выборе шага изменения фактора либо «пропустим» характерную особенность изучаемого процесса, либо удлиним процедуру и повысим трудоемкость поиска закономерности);

- выбор приближающих функций в виде многочленов, эмпирических формул в зависимости от содержания конкретной задачи (следует стремиться к максимальному упрощению приближающих функций);

- выбор и использование критериев согласия, на основе которых находятся параметры приближающих функций;

- выполнение требований заданной точности к выбору приближающей функции.

В задачах приближения функций многочленами используются три класса функций:

- линейная комбинация степенных функций (ряд Тейлора, многочлены Лагранжа, Ньютона и др.);

- комбинация функций cos nx, sin nx (ряды Фурье);

- многочлен образуемый функциями exp (-a, z).

При нахождении приближающей функции используют различные критерии согласования с экспериментальными данными:

точное совпадение значений функций с экспериментом в узловых точках (параболическое приближение);

минимум квадратов отклонений значений приближающей функции от эксперимента в узловых точках (метод наименьших квадратов)

минимум максимального отклонения (равномерное, чебышевское приближение).

Типичные примеры уравнений, описывающих дискретные системы:

а) уравнения в конечных разностях

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} + y = 0,\ \Delta y + \Delta T = 0\ ;$$

б) уравнения в приращениях

$$y(n+1) + (\Delta T - 1)\, y(n) = 0, \qquad y_{n+1} + (\Delta T - 1)\, y_n = 0;$$

в) рекуррентные формулы

$$y_n = (1 - \Delta T)\, y_{n-1} + f_n,\ y_n = A\, y_{n-1} + f_n;$$

г) нелинейные разностные уравнения

$$y_n = A\, (y_{n-1})^2 + f_n.$$

Разностные уравнения получаются преобразованием дифференциальных уравнений с помощью формул численного дифференцирования.

Таким образом, в задачах моделирования процессов горного производства численные методы могут встретиться при приближении функций, представлении моделей в конечно-разностном виде, при приближенном дифференцировании и интегрировании, решении уравнений и их систем.

Отдельные приложения численных методов при изучении методов оптимизации (линейное и динамическое программирование, градиентные методы оптимизации, факторное планирование) выше рассматривались.

Аппроксимация функций

Аппроксимация — приближенное выражение математических величии (чисел, функций и др.) через другие, более простые. Известно, что аппроксимация непрерывной на отрезке $x \in [a,b]$ функции алгебраическими или тригонометрическими многочленами $P(x)$ возможна с любой степенью точности (теорема Вейерштрасса). Мерой точности служит максимум разности между $f(x)$ и $P(x)$:

$$\delta = \max_{x} \left| f(x) - P(x) \right|.$$

В приближенных вычислениях и при оценке погрешностей используется понятие дифференциала. Применяются формулы

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,$$

В формулах дифференциал функции приближенно заменяется приращение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$

Приращения аргументов всегда равны их дифференциалам ($\Delta x=dx$. $\Delta y=dy$), а погрешность приравнивания $\Delta z=dz$ тем меньше, чем меньше Δz .

При оценке абсолютной и относительной погрешности применяются соответственно формулы

$$|\Delta z| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| .$$

Для решения уравнений применяют метод итераций или метод последовательных приближений.

Сущность метода в том. что заданное уравнение f(x)=0 переписывают в следующем виде:

$$x = \varphi(x).$$

После этого выбирают начальное приближение x_o и, подставив в правую часть уравнения находят x_1 которое затем дает значение $x_2 = \varphi(x_1)$

и так далее:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Если после нескольких приближений выполняется с заданной точностью равенство

$$x_n \approx \varphi(x_n),$$

то x„— приближенное значение корня уравнения $x = \varphi(x).$

Процесс итераций сходится, если в интервале, содержащем корень .X уравнения а также его последовательные приближения

$$x_0, x_1, \ldots, x_n,$$

выполнены условия

$$|\varphi'(x)| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = X$$

Метод итераций является одним из самых общих методов приближенного решений уравнений.

Многие другие способы — частные случаи метода итераций.

Задача решения уравнения $f(x) = 0$ равносильна отысканию точек, в которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс.

Метод хорд состоит в последовательном приближении к значению Х, являющемуся точным решением f(x) = О путем расчетом по формулам

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)}.$$

Все величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$

лежат внутри интервала $x \in [a,b]$.

Справедливо утверждение: пусть на отрезке [а, Ь] функция f(x) непрерывна, монотонна, имеет постоянное направление вогнутости и принимает на концах отрезка значения различных знаков.
Тогда при правильном выборе одной из формул при условии, что все приближения $x_n \in [a,b]$

метод хорд дает последовательность точек, сходящихся к корню уравнения f(x)= 0.

Другим частным случаем метода итераций является метод Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений вида

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0.$$

Приближения ведутся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k}{k a_0 x^{k-1} + (k-1) a_1 x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}}.$$

Если в пределах заданной точности приближенные значения x_n и x_{n+1} сов-
падут, то процесс итераций закончен и искомое значение корня найдено.

Пример

Решить по методу Ньютона уравнение x3 - 3x - 5 = 0 с точностью до 0,001, приняв за первое приближение $x_0 = 3.$

Решение.
Производной x3 - 3x - 5 =f(x) является f '(x) = 3x^2 - 3.

По формуле $x_{n+1} = x_n - (x_n^3 - 3x_n - 5) / (3x_n^2 - 3)$

рассчитываем

$$x_1 = 3 - (27 - 9 - 5) / (27 - 3) = 2{,}46;$$

$$x_2 = 2{,}46 - (14{,}89 - 7{,}38 - 5) / (18{,}16 - 3) = 2{,}295;$$

Таким образом, с точностью до 0,001 выполняется равенство x4 = x3 и поэтому корень уравнения x3 - 3x - 5 = 0 равен 2,279 (с указанной точностью).

Значительное место в разделе аппроксимации функций занимает прибли-

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Любая функция f(x) может быть аппроксимирована рядом Тейлора, если она непрерывна при $|x| < |a|$

и дифференцируема бесконечное число раз в указанном интервале.

При представлении f(x) в ряд по степеням (x-a) нужно искать

$$f'(a), f''(a), \ldots, f^n(a)$$

и если они существуют, то получаем ряд Тейлора.
При аппроксимации функций рядом Тейлора важной задачей является оценка остаточного члена ряда и связанной с ним ошибки/ Остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

при $\xi \in [a, x]$.

В случае знакочередующегося ряда для R_{n+1}

применяется правило Лейбница.

Для функций функций нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
ряд Тейлора

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_i - a_i) +$$

$$+\frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \ldots,$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D.$$

Ряд сходится при всех x меньших по абсолютному значению радиуса сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|a_n \,/\, a_{n+1}\right| \qquad R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

При $x = \pm R$

сходимость числового ряда $\sum_{i=1}^{n} u_n$

определяется необходимым $\left(\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \right)$

и достаточным (Даламбера $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{u_n} < 1$,

Коши $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

и др.) условиями.

Степенные ряды имеют следующие свойства:

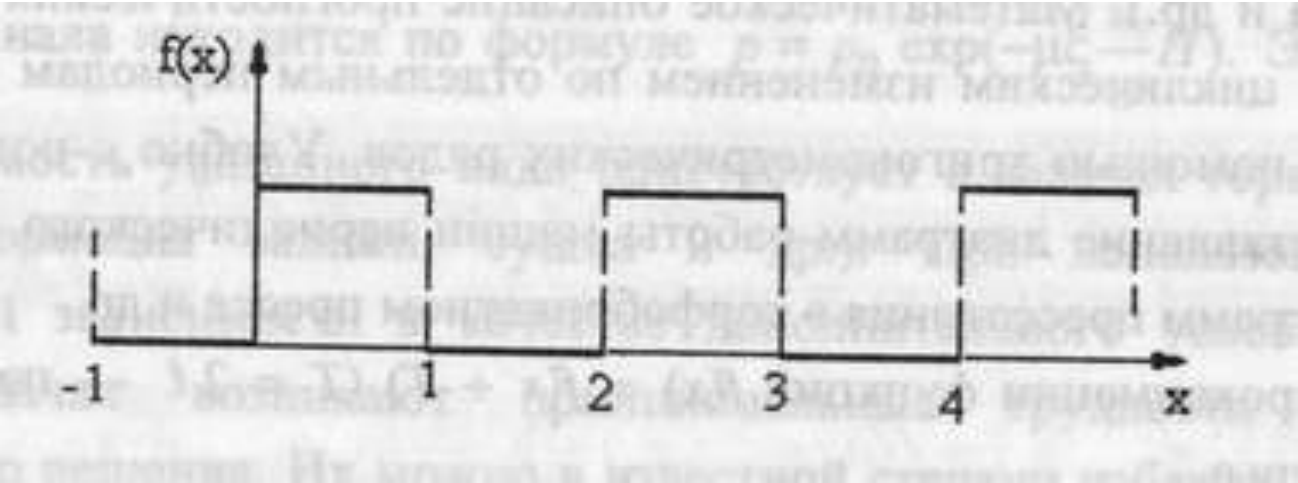
- сходящийся степенной ряд при $x = a > 0$

  сходятся при всех $x \in [-a, a]$;

- если каждый из членов ряда является непрерывной функцией и при этом ряд равномерно сходится, то его сумма также непрерывна в области сходимости;

- равномерно сходящийся степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Полученный ряд сходится в той же области.

Пример Представить рядом Фурье диаграмму работы машины



Решение.
Аналитическое представление неэлементарной функции в имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 0, & x \in [1;2] \end{cases}$$

Аппроксимирование периодической неэлементарной функции f(x) рядом Фурье удобно для совершения последующих математических операций с f(x), связанных с расчетом и исследованием работы машины.

Ряд в рассматриваемом случае может содержать $a_0, \ a_n, \ b_n.$

Находим коэффициенты ряда

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_0^1 dx + \int_0^2 0dx = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx = \int_0^1 \cos\pi nxdx = \frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1 = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx = \int_0^1 \sin\pi nxdx = -\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n).$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, диаграмма работы машины в неограниченном интервале изменения аргумента определяется непрерывной функцией

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;\ 1]\\ 0, & x\in[1,\ 2]\end{cases}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi\ x+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi\ x+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x+\ldots+$$

$$+\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\pi x,\quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty).$$

Указанная аппроксимация рядом Фурье необходима, решении задач контроля и автоматизации управления машин

Интегполирование функций при обработке экспериментальных данных

Интерполяция — построение приближенного или точного аналитического выражения функциональной зависимости, если о ней известны только соотношения между значениями независимой переменной и соответствующими значениями функции в дискретном ряде точек.

Основной задачей интерполяции является нахождение значений функции f(x) во всех точках заданного интервала числовой оси.

Наиболее прост метод линейной интерполяции.

При определении коэффициентов эмпирической линейной формулы наиболее часто в качестве критериев оптимизации используют
минимум алгебраической суммы отклонений точек от аппроксимирующей кривой (метод средних) и
минимум суммы квадратов отклонений опытных точек от кривой (метод наименьших квадратов).

Во многих случаях нелинейные зависимости могут быть приведены к линейному виду введением новых координат.

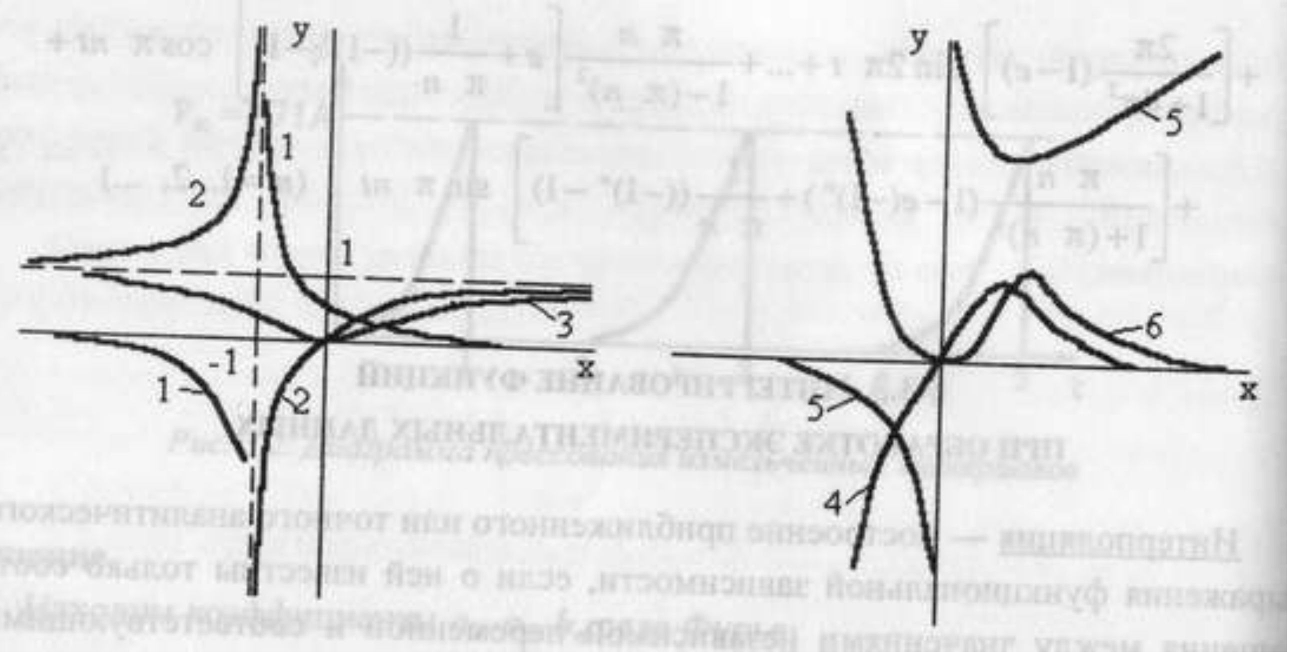
Например, зависимость $y = a\,x^b$
после логарифмирования приводится к виду $Y = \lg a + b\,X,$

где . $Y = \lg y;\ X = \lg x.$

Выравнивание зависимостей можно осуществить логарифмированием, алгебраическими преобразованиями, заменой переменной.

Если зависимость y(x) построить в новых координатах Y(X), то она примет линейный вид и в этом случае степень связи Y(X) можно оценить коэффициентом корреляции.

В табл. и на рис. представлены примеры нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду введением новых переменных.



1) $y=1/(1+x)$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $X=x$; 2) $y=\dfrac{x}{1+x}$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $X=\dfrac{1}{x}$;

3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $X=\dfrac{1}{x^2}$; 4) $y=xe^{-x}$, $Y=\ln\dfrac{y}{x}$, $X=x$;

5) $y=x^2e^{-x}$, $Y=\ln\dfrac{y}{x^2}$, $X=x$; 6) $y=x^{-1}e^{-x}$, $Y=\ln|yx|$, $X=x$.

Примеры выравнивания функций

Формула	Выравнивающие переменные	Выравненная зависимость
$y=ax^b$	$Y=\ln y$, $X=\ln x$, $A=\ln a$	$Y=A+bx$
$y=ae^{bx}$	$Y=\ln y$, $X=x$, $A=\ln a$	$Y=A+bX$

В линейности выровненной зависимости легко убедиться визуально.

Формула	Выравнивающие переменные	Выравненная зависимость
$y=ax^n e^{bx}$	$Y=\ln y/x^n$, $X=x$, $A=\ln a$ при известном n	$Y=A+bX$
$y=a/(b+cx)$	$Y=1/y$, $X=x$, $A=b/a$, $B=c/a$	$Y=A+BX$
$y=x/(b+cx)$	$Y=1/y$, $X=1/x$	$Y=c+bX$
$y=k+ae^{bx}$	$Y=\ln\lvert y-k\rvert$, $X=x$, $A=\ln a$ при известной асимптоте $y=k$	$Y=A+bX$
Логистическая (S-образная) кривая $y=k/(1+ae^{-bx})$	$Y=\ln\lvert k/y-1\rvert$, $X=x$ при известной асимптоте $y=k$	$Y=A-bX$
$y=a+bx+cx^2$	$Y=(y-y_1)/(x-x_1)$, $X=x-x_1$ при известных координатах точки $M(x_1,y_1)$	$Y=b+cX$

Преимуществом простейших эмпирических формул (линейных или приводящихся к ним) является малое число эмпирических коэффициентов и возможность физической трактовки полученных формул и констант.

При линейной интерполяции не исчерпываются задачи обработки опытных данных.

Задачи оптимизации требуют применения для интерполяции многочленов высокого порядка.

Итак, приближенное вычисление функции f(x) по нескольким данным значениям

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

внутри интервалов называется интерполяцией.

Интерполирование функции y =f(x) на отрезке [a, b] состоит в приближенной замене функции f(x) заданной формулой, -таблицей или графиком, одной из функций P(x).

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$

называются узлами интерполяции.

В тех случаях, когда за класс {P(x)} берется множество многочленов, интерполяция называется параболической.

Эти многочлены просты по форме, легко вычисляются, интегрируются и дифференцируются.

Недостаток тот, что несмотря на совпадение значений P(x) в узлах интерполяции

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

в интервалах между ними расхождения могут быть как угодно большими.

В связи с этим приобретает важное значение выбор шага между узлами интерполяции, так как его увеличение может привести к большим погрешностям внутри интервалов, а слишком малый шаг связан со значительным увеличением вычислительной работы.

Интерполяционная формула Лагранжа используется, когда нужно построить многочлен Pn(x) степени n, который в (n+ 1) данных точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

принимает заданные значения $y_0, y_1, y_2 \dots, y_n$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

В остальных точках разность R(x)=f(x) - Pn(x) в общем случае отлична от нуля и составляет погрешность метода.
Если функция f(x) в промежутке [a, b] имеет непрерывные производные до (n+1) порядка, то остаточный член интерполяции R(x) можно представить в виде

$$P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)\,!}, \quad \xi \in [a, b].$$

С помощью интерполяционного полинома Лагранжа может решаться также и экстраполяционная задача, но в этом случае удовлетворительные результаты получаются лишь для точек, близких к узлам.

Недостаток метода — зависимость приближающей функции от расположения узлов. Вычисления полинома Лагранжа трудоемки.

Если многочлен недостаточно хорошо аппроксимирует функцию, то следует повысить степень полинома. При этом все вычисления проводятся заново.

Пример
Требуется аппроксимировать многочленом Лагранжа изменение температуры стенок по длине канала пресса. По результатам экспериментов для условий прессования получим следующие экспериментальные данные.

l, см	0	13	28	43
T, ^{0}C	70	102	123	108

Опытные данные исследования температуры Т стенок канала пресса в характерных точках

Решение.

Зависимость T(1) аппроксимируем многочленом Лагранжа:

$$T(l)=\frac{(l-l_1)(l-l_2)(l-l_3)}{(l_0-l_1)(l_0-l_2)(l_0-l_3)}T_0+\frac{(l-l_0)(l-l_2)(l-l_3)}{(l_1-l_0)(l_1-l_2)(l_1-l_3)}T_1+$$

$$+\frac{(l-l_0)(l-l_1)(l-l_3)}{(l_2-l_0)(l_2-l_1)(l_2-l_3)}T_2+\frac{(l-l_0)(l-l_1)(l-l_2)}{(l_3-l_0)(l_3-l_1)(l_3-l_2)}T_3.$$

Подставим значения l_i, T_i
в формулу

$$T(l)=\frac{(l-13)(l-28)(l-43)}{(-13)(-28)(-43)}70+\frac{l(l-28)(l-43)}{13(-15)(-30)}102+\frac{l(l-13)(l-43)}{28\cdot 15(-15)}123+$$
$$+\frac{l(l-13)(l-28)}{43\cdot 30\cdot 15}108=-1{,}04\cdot 10^{-3}l^3-0{,}007l^2+2{,}5l+70{,}434.$$

В отличие от многочлена Лагранжа приближение по метолу Чебышева позволяет упростить этот процесс.

Приближающий многочлен ищется здесь в виде суммы многочленов повышающихся степеней, причем добавление новых слагаемых не изменяет коэффициентов при предыдущих членах. Таким образом, прибавляя новый член к многочлену Чебышева, уменьшают среднее квадратическое отклонение. Тем самым упрощается также выбор степени приближающего многочлена Способ Чебышева состоит в том, что приближающая функция ищется не в виде суммы x^n в виде комбинации многочленов.

Численное дифференцирование и интегрирование.
Решение дифференциальных уравнений и систем

К численному дифференцированию чаще всего обращаются, когда значения функции известны в отдельных точках (например, результаты экспериментов в виде таблиц).
Приближенное значение производной функции f(x) в точке x_o при выбранном шаге h > 0 находится по одной из формул:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}; \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h};$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Общие вопросы численного дифференцирования можно рассмотреть на примере заданной на отрезке [a, b] функции f(x), имеющей непрерывные производные до (n+1) порядка, представленной в виде суммы

$$f(x) = P_n(x) + R(x),$$

где $P_n(x)$ — интерполяционный полином степени строенный по узлам интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$

R(x) — остаточный член

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dP_n(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \approx \frac{d^n P_n(x)}{dx^n}.$$

Погрешность численного дифференцирования определяется абсолютным значением выражения

$$\left.\frac{dR(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_i - x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot x(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)$$

Интерполируя многочленом Ньютона и сравнивая его с разложением функции в ряд Тейлора, находят так называемые разностные формулы ленного дифференцирования

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \ldots\right),$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots\right),$$

$$\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \ldots\right).$$

Пример

Вычислить первую производную функции $y=f(x)=x^4$

в точке $x_0 = 0.$

Решение.

Выберем шаг интерполяции h=1 и составим матрицу разностей

Матрица разностей функции

x_i	$y_i=x_i^4$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0	1			
1	1	15	14	36	
2	16	60	50	60	24
3	81	175	110		
4	256				

Учитывая, что $\Delta y_0 = 1,\ \Delta^2 y_0 = 14,\ \Delta^3 y_0 = 36,\ \Delta^4 y_0 = 24,$

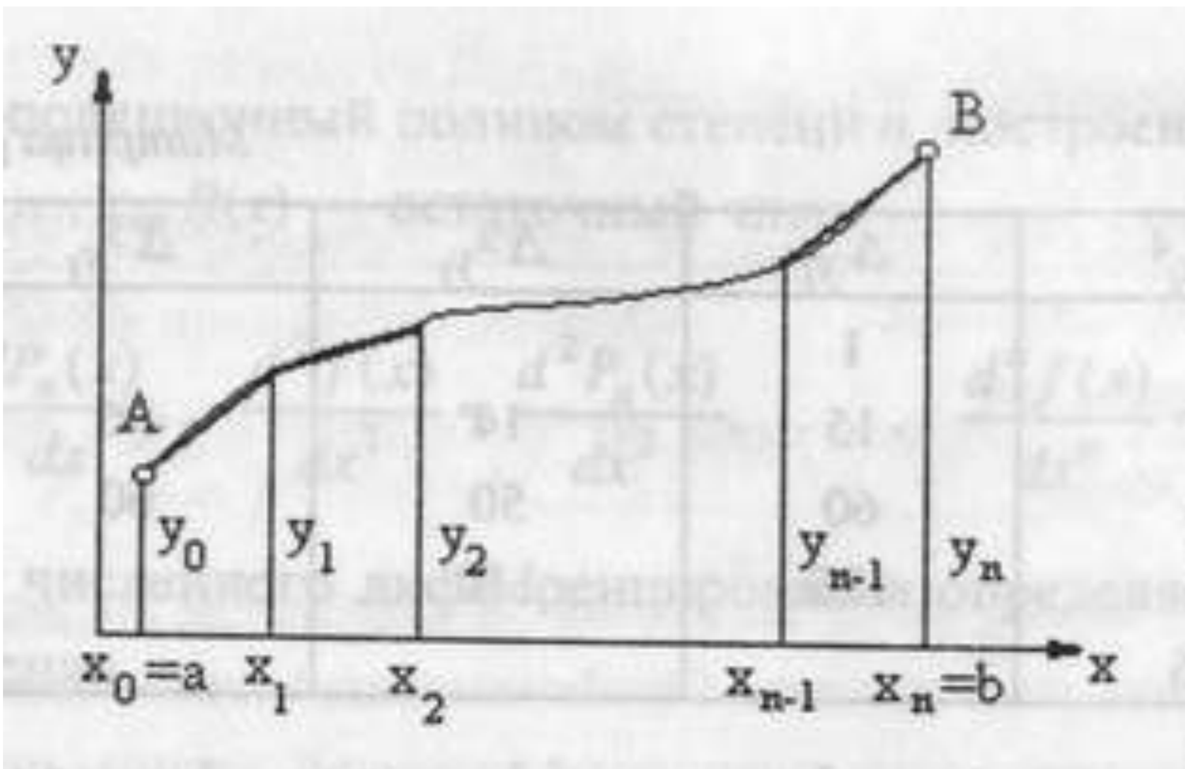
применяем формулу

$$\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = 1 - \frac{1}{2}14 + \frac{1}{3}36 - \frac{1}{4}24 = 0.$$

К численному интегрированию обращаются в тех случаях, когда функция определена на всем промежутке интегрирования, но интеграл от нее не выражается в элементарных функциях.

Определенный интеграл $$\int_a^b f(x)dx$$

выражает площадь криволинейной трапеции aABЬ



Эту площадь можно вычислить приближенно, если заменим кривую y = f(x) некоторой ломаной линией.

Разбив интеграл [a, b] на n равных частей h = (Ь-a)/n и определив в точках деления $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$,

площадь интеграла приближенно можно определить по формуле трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Другой простейшей формулой численного интегрирования является формула парабол (или формула Симпсона), основанная на замене подынтегральной кривой суммой дуг парабол второго порядка.

Разобьем интервал интегрирования [а, ь] на 2n = m равных интервалов

$$h = (b-a) / 2n.$$

Формула Симпсона имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Разработаны и другие способы приближенного вычисления интегралов.

Выше, при рассмотрении метода имитационного моделирования, отмечалось, что эффективным способом решения интегралов может служить метод Монте-Карло.

Применяются также графические методы дифференцирования и интегрирования. отличающиеся самой невысокой точностью, но обладающие простотой и наглядностью.

Аналитические методы решения дифференциальных уравнений, являющихся многих неотъемлемой частью многих математических моделей, получили широкое развитие.

Аналитические методы решения дифференциальных уравнений, являющихся неотъемлемой частью многих математических моделей, получили широкое развитие.

Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения, решить которые в замкнутой форме не удается. В этом случае приходится применять приближенные методы решения уравнений. Во многих случаях может оказаться полезным представление решения виде ряда Тейлора.

Проиллюстрируем метод на примере уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$.

Решение заданного уравнения ищем в виде ряда Тейлора

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots\ .$$

Здесь уо и уо' берутся из начальных условий, $y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n)}$

последовательным дифференцированием уравнения

$$y'' = f(x, y, y')$$

и подстановкой в результат начальных условий:

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0'),$$

$$y''' = f_x'(x, y, y') + f_y'(x, y, y')y' + f_{y'}'(x, y, y')\, y'' \Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ y' = y_0' \\ y'' = y_0''}} = y_0'''$$

и так далее $y^{(IV)}, y^{(V)}, \ldots, y^{(n)}$.

Определив коэффициенты ряда $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n)},$

остается исследовать ряд на сходимость решения.

Практическое значение имеют лишь сходящиеся ряды, причем быстро сходящиеся.

Ведь в этом случае в решении удается ограничиться небольшим числом членов при обеспечении достаточной точности расчетов.

Этот метод может применяться при решении самых различных линейных и нелинейных уравнений.

Другим методом приближенного решения дифференциальных уравнений является метод Пикара.

Решение y(x) уравнения y' = f(x, y) при начальном условии $y(x_0) = y_0$

может быть представлено в следующем виде: $y = \lim_{i \to \infty} y_i(x)$,

где последовательные приближения $y_i(x)$ определяются по формулам

$$y(x_0)=y_0,$$

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{i-1}(x)dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Метод Пикара применим к решению нормальных систем дифференциальных уравнений и следовательно, дифференциальных уравнений высшего порядка.

Достаточно часто при решении уравнений вида y' = f(x, y) применяете, метод Рунге-Кутта.

Пусть, например, на отрезке x $\in$[a,Ь] необходимо найти решение y(x) с заданной степенью точности ε.

Для этого выбираем шаг $h = \frac{b-a}{n}$,

но так, чтобы $h^4 < \varepsilon$.

Точки деления x, определяются по формуле

$$x_i = x_0 + ih \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Соответствующие значения $y_i = y(x_i)$

искомой функции по методу Рунге-Кутта последовательно вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = (\lambda_1^{(i)} + 2\lambda_2^{(i)} + 2\lambda_3^{(i)} + \lambda_4^{(i)} / 6,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\lambda_1^{(i)} = f(x_i, y_i)h$; $\lambda_2^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\lambda_1^{(i)}}{2})h$;

$$\lambda_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\lambda_2^{(i)}}{2})h; \quad \lambda_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + \lambda_3^{(i)})h.$$

Метод Рунге-Кутта имеет порядок точности h^4

и применим также для решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \varphi(x, y, x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } z(x_0) = z_0.$$