

УДК 004.2:004.3:531.38

## Компьютерные эксперименты с задачей взаимодействия двух жидких гравитирующих тел

Андрюхин А.И.<sup>1</sup>, Судаков С.Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донецкий национальный технический университет,

<sup>2</sup>Институт прикладной математики и механики  
alexandruckin@ramber.ru, sudakov@iamm.su

*Андрюхин А.И., Судаков С.Н. «Компьютерные эксперименты с задачей взаимодействия двух жидких гравитирующих тел». Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – сферически симметричное твердое тело. Для решения уравнений использован численный метод Рунге-Кутты. В качестве примеров приведены расчеты движения системы с массово-геометрическими параметрами системы Земля-Луна, системы Юпитер-Солнце и Земля-Солнце. Эксперименты продолжаются в направлениях, связанных с увеличением длины рассматриваемого временного интервала, использованием иных взаимодействующих пар, увеличением числа тел и т.д.*

**Ключевые слова:** жидкий эллипсоид, задача двух тел, Земля, Солнце, Юпитер

### Введение

Динамике эллипсоидальных масс идеальной несжимаемой жидкости посвящена обширная литература [1 – 10]. В работе рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – сферически симметричное твердое тело (ССТТ). Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к ССТТ по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [6, 7].

### Системы координат

Обозначим через  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  обозначим подвижные прямоугольные оси, начало которых  $O_1$  совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Через  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида. Соответствующие системы координат представлены на рисунке 1.

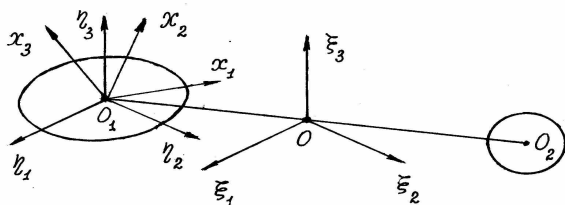


Рисунок 1. – Используемые системы координат

### Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости

Положение точки  $O_1$  определим сферическими координатами  $r_1, \varphi_1, \theta_1$ , где  $\theta_1$  – угол между плоскостью  $O\xi_1\xi_2$  и радиусом-вектором  $OO_1$ ;  $\varphi_1$  – угол между  $O\xi_1$  и проекцией вектора  $OO_1$  на плоскость  $O\xi_1\xi_2$ .

Тогда координаты точки  $O_1$  в осях  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_2 &= r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_3 &= r_1 \sin \theta_1.\end{aligned}\quad (1)$$

Дифференцируя формулы (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки  $O_1$ ) на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ :

$$\begin{aligned}u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1.\end{aligned}\quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по  $t$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ :

$$\begin{aligned}w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & r_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + \\ & + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1,\end{aligned}$$

$$w_3 = \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1. \quad (3)$$

Положение осей  $O_1x_1x_2x_3$  относительно  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  определим углами Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ . Матрица перехода  $A = (a_{ij})$  от осей  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  к осям  $O_1x_1x_2x_3$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta \\ a_{31} &= \sin \theta \sin \varphi \\ a_{32} &= \sin \theta \cos \varphi \\ a_{33} &= \cos \theta \end{aligned}$$

Используя матрицу перехода  $A$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O_1x_1x_2x_3$ :

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 \dot{a}_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

### Координаты центра масс сферически симметричного твердого тела

Центр масс ССТТ обозначим  $O_2$ . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (5)$$

где  $m_1$  – масса жидкого эллипсоида,  $m_2$  – масса ССТТ,  $r_i = |\overline{OO_i}|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При движении точки  $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  будут лежать на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки  $O_2$  в осях  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ :

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1} r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1} r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1} r_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ . Тогда в осях  $O_1x_1x_2x_3$  точка  $O_2$  будет иметь координаты:

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

### Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны сферически симметричного твердого тела

Проекции на оси  $O_1x_1x_2x_3$  силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны ССТТ, определяются формулами:

$$f_i = G \rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2 [S]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $S = (\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2$ ,  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho$  – плотность жидкости,  $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$ ,  $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$ ,  $\tilde{x}_i = x_i/r$ ,  $x_1, x_2, x_3$  – координаты в осях  $O_1x_1x_2x_3$  рассматриваемой частицы жидкости.

### Линеаризация

В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние  $r$  между точками  $O_1$  и  $O_2$  настолько велико, что можно провести линеаризацию величин  $f_i$  по  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь:

$$f_1 = \frac{G \rho m_2}{r^2} \left( \frac{x_{21}}{r} + \left( \frac{3x_{21}^2}{r^2} - 1 \right) \frac{x_1}{r} + \frac{3x_{21}x_{22}x_2}{r^3} + \frac{3x_{21}x_{23}x_3}{r^3} \right) \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине  $m_2$  и к первому индексу величин  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ .

### Уравнения гидродинамики

Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} - \mathbf{w} - \dot{\omega} \times \mathbf{x} - \\ &- \omega \times (\omega \times \mathbf{x}) - 2\omega \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – скорость движения жидкости относительно осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – координатный вектор,  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\omega$  – угловая скорость осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  – полудлины главных осей жидкого эллипсоида,  $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$  – абсолютное ускорение точки  $O_1$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ .

Кинематическая вязкость  $\nu(x, c)$  определяется выражением:

$$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где  $\nu_0 = \text{const}$ .

Граница жидкости в осях  $O_1x_1x_2x_3$  задается уравнением:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости  $\nu = 0$ .

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости  $\sigma$  имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал  $\Phi$  гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]:

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

$$\text{где } \alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \quad D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

### Уравнения движения

В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости  $v_1, v_2, v_3$  и давление  $p$  ищем в виде:

$$v_i = \frac{\dot{c}_i}{c_i} x_i - \frac{c_1}{c_2} \omega_3^* x_2 + \frac{c_1}{c_3} \omega_2^* x_3 \quad (123),$$

$$p = -p_0(t) \left( \frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  и  $p_0(t)$  – неизвестные функции времени  $t$ .

Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем:

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$\text{где } k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4v_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 -$$

$$- 2 \frac{c_3}{c_1} \omega_2^* \omega_2 - 2 \frac{c_2}{c_1} \omega_3^* \omega_3 + + 2\pi \rho G \alpha_1 -$$

$$- \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{c_1}{c_2} \dot{\omega}_3^* - \frac{2\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* + \frac{c_1}{c_2} \omega_1^* \omega_2^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 + 2 \frac{c_3}{c_2} \omega_1^* \omega_2 -$$

$$(11)$$

$$- 2 \frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{13} = \frac{c_1}{c_3} \dot{\omega}_2^* + \frac{2\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \omega_1^* \omega_3^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3} \omega_2 +$$

$$+ \frac{2c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123).$$

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях координат  $x_1, x_2, x_3$  из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения:

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $k_{ij}$  определены выражениями (11). Из

условия несжимаемости следует, что

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = const. \quad (13)$$

Движение осей  $O_1 x_1 x_2 x_3$  относительно  $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3$  описывается кинематическими уравнениями Эйлера, которые запишем в виде:

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\dot{\psi} = (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi, \quad (14)$$

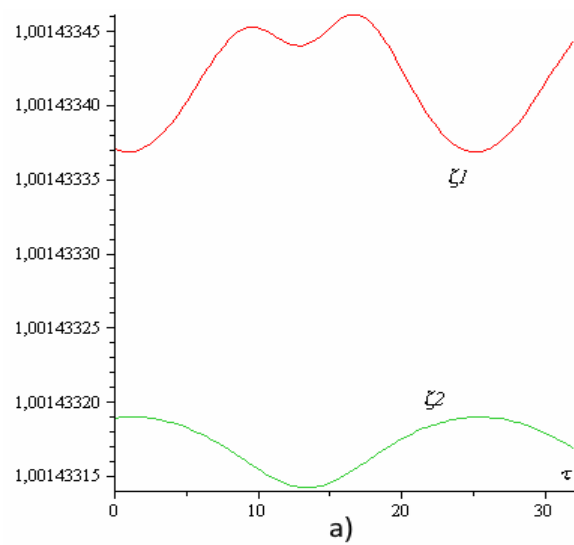
где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – проекции угловой скорости осей  $O_1 x_1 x_2 x_3$  на себя.

Соотношения (12) – (14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных  $\omega_i^*, \omega_i, c_i, i = 1, 2, 3, p_0, \varphi, \psi, \theta, r_1, \varphi_1, \theta_1$  и после задания начальных условий, полностью описывают движение системы.

Для решения уравнений был использован численный метод Рунге-Кутты 4-5. Единицей времени являются земные сутки.

На рисунке 2а представлен один из результатов расчетов для системы Земля-Луна (в земных радиусах). На рисунке 2б представлен один из результатов расчетов для системы Юпитер-Солнце.

Более детально выполнялись расчеты для системы Земля-Солнце. Они представлены на рисунках 3 – 15 в различных временных шкалах.



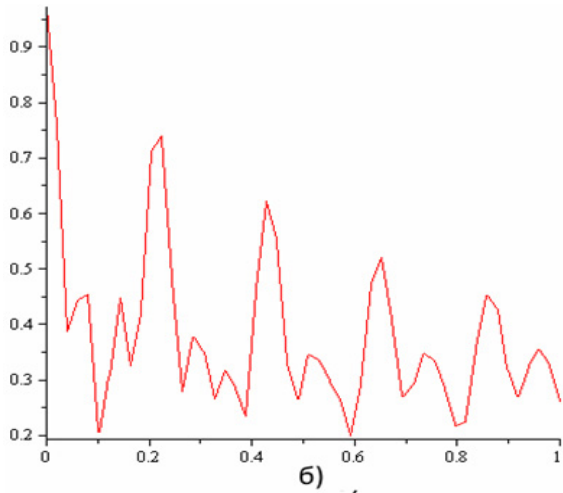


Рисунок 2. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели (в м): а) для системы Земля-Луна; б) для системы Юпитер-Солнце

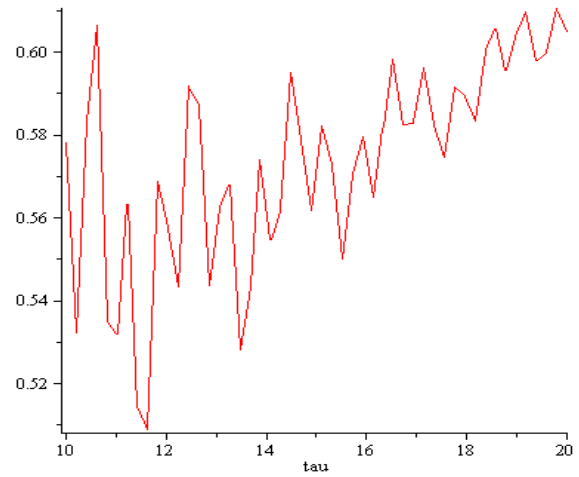


Рисунок 5. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за вторые 10 суток (в м)

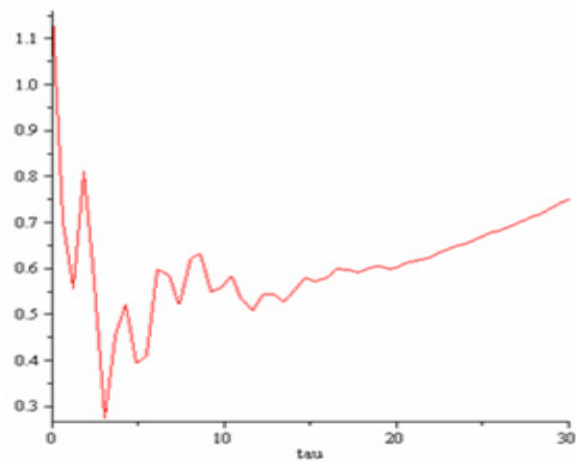


Рисунок 3. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за первые 30 суток (в м)

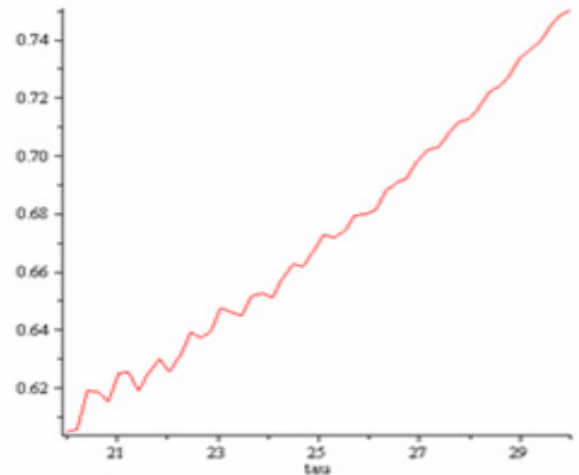


Рисунок 6. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за третьи 10 суток (в м)

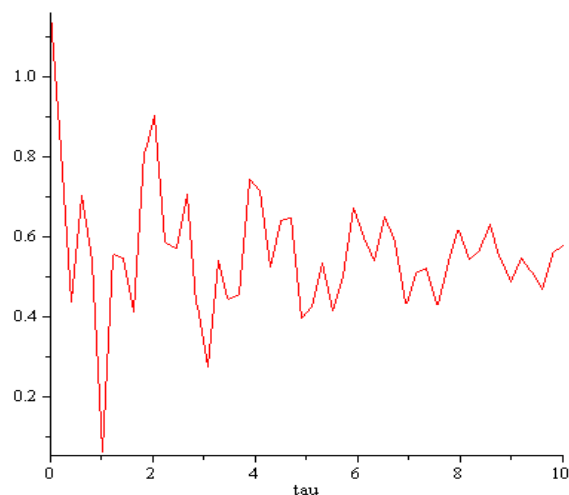


Рисунок 4. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за первые 10 суток (в м)

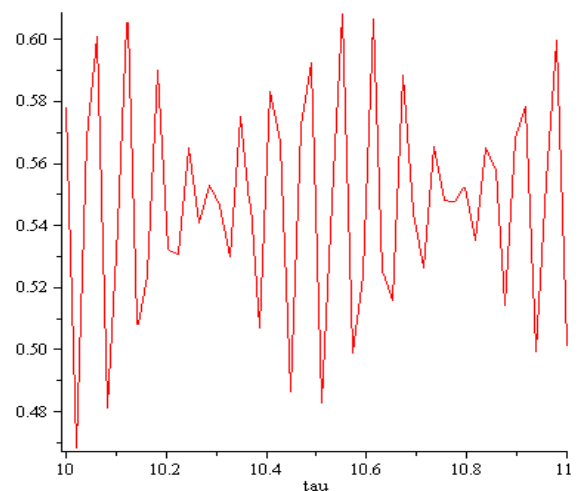


Рисунок 7. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за 11 сутки (в м)

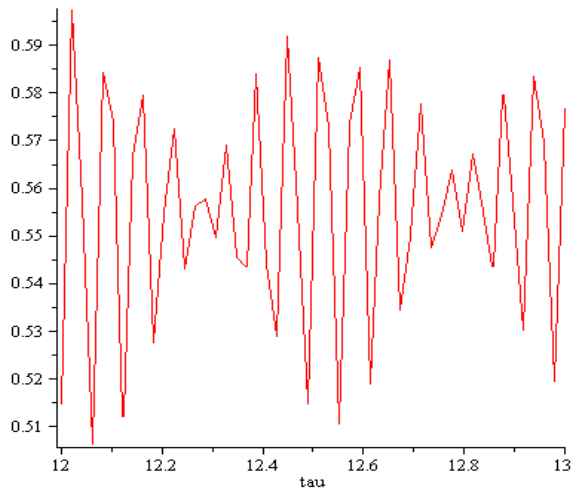


Рисунок 8. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за 13 сутки (в м)

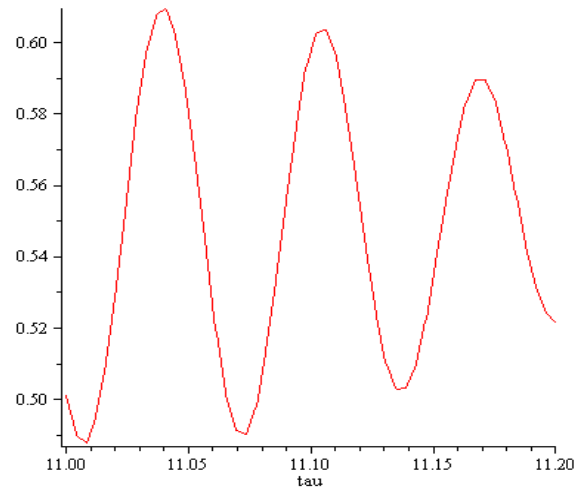


Рисунок 11. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля в начале 11 суток (в м)

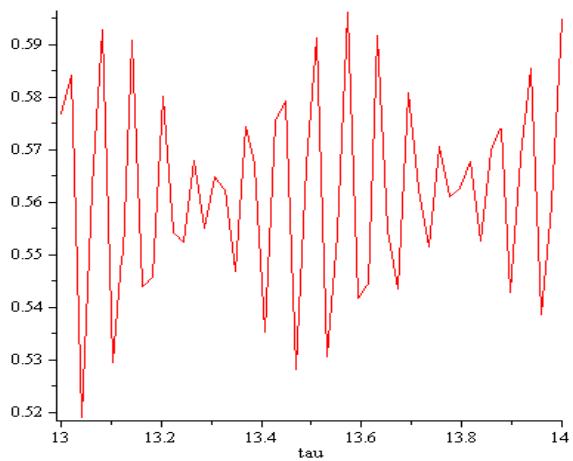


Рисунок 9. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за 14 сутки (в м)

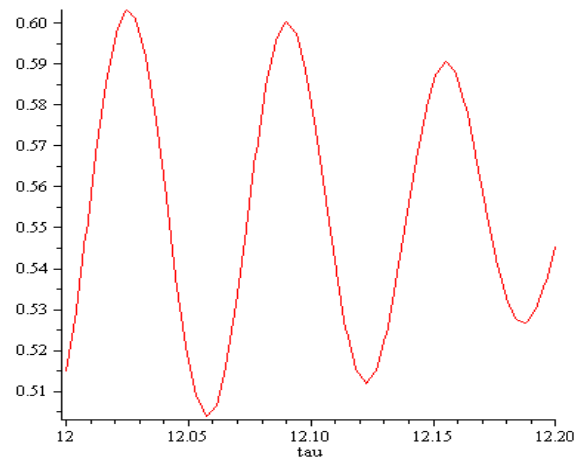


Рисунок 12. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля в начале 12 суток (в м)

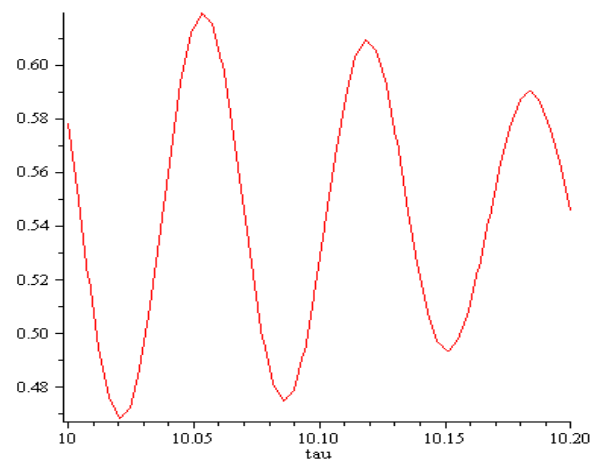


Рисунок 10. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля в начале 11 суток (в м)

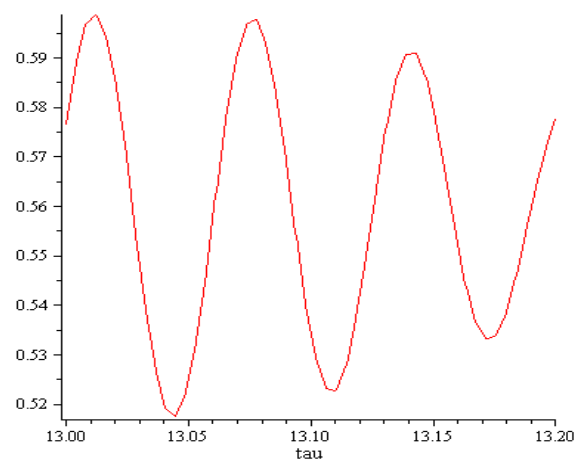


Рисунок 13. – Изменение полюсов  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля в начале 13 суток (в м)

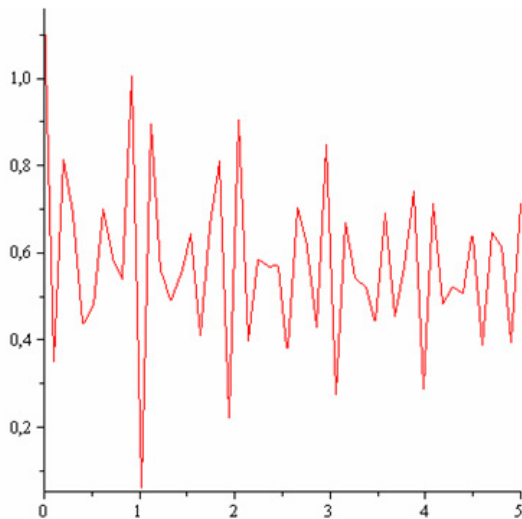


Рисунок 14. – Изменение полуосей  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за первые 5 суток (в м)

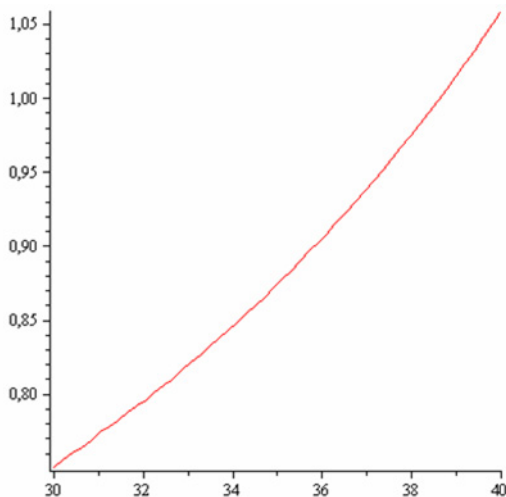


Рисунок 15. – Изменение полуосей  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  в модели Солнце-Земля за 4 десятка суток (в м)

### Выводы

Расчет моделей достаточно трудоемкий процесс. Построение графика отклонений полуосей за временной промежуток 10 суток занимает примерно 1,5 часа работы процессора I3 модели 4170 с частотой 3,7 ГГц. Время расчета за более длинный временной период в лучшем случае прямо пропорционально его длине.

Эксперименты продолжают в следующих направлениях:

а) увеличение длины рассматриваемого временного интервала;

б) использование иных взаимодействующих пар, как Юпитер и его основные спутники, такие как Ио, Ганимед, Каллисто, Европа, система Земля-Луна и т.п.;

в) увеличение числа тел, т.е. выполнение компьютерных экспериментов с задачей трех и более тел.

Расчеты производились в пакетах Maple и Mathematica и сравнивались.

### Список литературы

1. Динамика жидких и газовых эллипсоидов / Сборник статей // Ред. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 9. – С. 424 – 428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 11. – С. 522 – 525.
5. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 492 с.
6. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
7. Судаков С.Н. Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 141 – 144.
8. Судаков С.Н. О колебаниях вращающихся жидких гравитирующих эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217 – 226.
9. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. – New Haven and London: Yale university press, 1969. – 98 p.
10. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 300 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

### References (transliteration)

1. Dinamika zhidkih i gazovyh jellipsoidov [Dynamics of liquid and gas ellipsoids]. / Sbornik statej // Red. A.V. Borisov, I.S. Mamaev. – Moskva-Izhevsk: NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, 2010. – 364 p.
2. Lamb G. Gidrodinamika [Lamb G. The hydrodynamics]. – M.-L.: Gostehizdat, 1947. – 928 p.
3. Petkevich E.V. Zadacha dvuh zhidkih tel // Pis'ma v Astronomicheskij zhurnal. 1977. 3. – no. 9. – pp. 424 – 428.
4. Petkevich E.V. Uravnenija vneshnej zadachi dvuh tel [The equations of the external problem of two bodies] // Pis'ma v Astronomicheskij zhurnal. – 1977. – 3. – no.11. – pp. 522 – 525.
5. Steklov V.A. Raboty po mehanike [The works on mechanics]. – M.-Izhevsk: IKI, 2011. – 492 p.
6. Subbotin M.F. Kurs nebesnoj mehaniki [The course of celestial mechanics]. – Т. 3. – М.: Gostehizdat, 1949. – 280 p.

7. Sudakov S.N. Ob uravnenijah dvizhenija tverdogo tela s jellipsoidal'noj polost'ju, celikom zapolnennoj zhidkost'ju peremЕННОj vjazkosti [The equations of motion of a rigid body with an ellipsoidal cavity is entirely filled with a liquid of variable viscosity] // Trudy IPMM NAN Ukrainy. – 2000. – 5. – pp. 141 – 144.
8. Sudakov S.N. O kolebanijah vrashhajushhihsja zhidkih gravitirujushhih jellipsoidov peremЕННОj vjazkosti [Oscillations of rotating liquid gravitating ellipsoids with variable viscosity] // Mehanika tverdogo tela. – 2002. – Issue 32. – pp. 217 – 226.
9. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. – New Haven and London: Yale university press, 1969. – 98 p.
10. Jadrckij V.S. Teorija figur nebesnyh tel [The theory of figures of celestial bodies]. – M.-Izhevsk: IKI, 2011. – 300 p.
11. Lojcjanskij L.G. Mehanika zhidkosti i gaza [Fluid Mechanics]. – M.: Nauka, 1973. – 848 p.

*Андрюхін О.І., Судаков С.Н. «Комп'ютерні експерименти з задачею взаємодії двох гравітуючих рідких тіл». Отримано рівняння руху для задачі двох тіл, одне з яких рідкий еліпсоїд змінної в'язкості, що здійснює однорідний вихровий рух, а інше – сферично симетричне тверде тіло. Для вирішення рівнянь використано чисельний метод Рунге-Кутта. Для прикладу наведено розрахунки руху системи з масово-геометричними параметрами системи Земля-Сонце та системи Юпітер-Сонце. Експерименти продовжуються в таких напрямках, як збільшення довжини розглянутого часового інтервалу, використання інших взаємодіючих пар, збільшення числа тіл. Розрахунки проводилися в пакетах Maple і Mathematica та порівнювалися.*

**Ключові слова:** рідкий еліпсоїд, проблема двох тіл, Земля, Сонце, Юпітер

*Andruckin A.I., Sudakov C.N. "Computer experiments with the problem of interaction of two gravitating liquid bodies". The equations of motion for the two-body problem, one of which is a liquid ellipsoid of variable viscosity, a homogeneous rotational motion, and the other is spherically symmetrical solid. To solve the equations used numerical method of Runge-Kutta. As an example we calculate the motion of the system with mass-geometric parameters of the Earth-Sun and Sun-Jupiter system. Experiments are continuing in these areas as increasing the length of the time interval under consideration, the use of other interacting pairs, like Jupiter and its major moons, such as Io, Ganymede, Callisto, Europa, the Earth-Moon system and the like, increase in the number of bodies, that is, the implementation of computer experiments with the task of three or more bodies.*

*The calculations were made in Maple and Mathematica packages and compared.*

**Keywords:** liquid ellipsoid, the problem of two bodies, the Earth, the Sun, Jupiter

Статья поступила в редакцию 29.06.2015

Рекомендована к публикации д-ром техн. наук С.Г. Ехилевским