ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

УДК 517.9

Редукция задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску

Полунин В.А., Солдатов А.П.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
soldatov@bsu.edu.ru, polunin@bsu.edu.ru

Полунин В.А., Солдатов А.П. «Редукция задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску». *В работе рассматриваются условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области с гладкой границей для трехмерного аналога системы Коши-Римана – эллиптической системы Моисила-Теодореску. Представленная система впервые была предложена и исследована в работах румынских математиков. Она представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для четырехкомпонентной вектор-функции в трехмерном пространстве. Целью данной работы является получение условий разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области трехмерного пространства. При помощи известных условий разрешимости классических задач Дирихле и Неймана доказано необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Римана-Гильберта в классе Гельдера. В качестве примера рассмотрен аналог задачи Шварца теории аналитических функций для рассматриваемой эллиптической системы и исследована ее разрешимость. При помощи интегрального представления общего решения краевая задача Римана-Гильберта сведена к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений по границе области. В силу слабой особенности матричного ядра соответствующее интегральное уравнение является фредгольмовым и единственным образом разрешимым при выполнении условия ортогональности.*

Ключевые слова: система Моисила-Теодореску, задача Шварца, интеграл типа Коши, уравнение Фредгольма.

Введение

Пусть односвязная область $D \subset \mathsf{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и вектор $n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ является единичным вектором внешней нормали к этой поверхности в точке $y \in S$. Для четырехкомпонентной вектор-функции $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ в этой области рассмотрим задачу Римана-Гильберта

$$H(y)u^+(y) = f(y), \qquad (1)$$

для системы Моисила-Теодореску

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u(x) = 0,$$

$$M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В развернутой форме краевое условие (1) имеет вид:

$$u_1^+(y) = f_1(y),$$

$$u_2^+(y)n_1(y) + u_3^+(y)n_2(y) + u_4^+(y)n_3(y) = f_2(y),$$

где $u^+(y)$ – предельные значения функции $u(y)$ на границе S, $f(y) \in C(S)$ – заданная двухкомпонентная вектор-функция.

Эта задача является аналогом известной задачи Шварца для аналитических функций.

Критерий разрешимости

Напомним [1], что фундаментальным решением дифференциального оператора $M(\partial/\partial x)$ в пространстве R^3 является матрица-функция $M^{\mathrm{T}}(x)/|x|^3$, где T – символ матричного транспонирования. Поэтому для непрерывной вектор-функции ψ, заданной на поверхности S, интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{M^{\mathrm{T}}(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)ds_y, \quad x \notin S, \qquad (3)$$

где ds_y – элемент площади на поверхности S и $n(y)$ – единичная внешняя (по отношению к области D) нормаль, определяет вне этой поверхности решение системы (2).

К оператору I в (3) можно применить результаты [2], согласно которым в предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ он ограничен $C^\mu(S) \to C^\mu(\overline{D^\pm})$, где для единообразия введены обозначения $D^+ = D, D^- = \mathsf{R}^3 \setminus \overline{D}$, и для предельных значений

$$u^\pm(y_0) = \lim_{x \to y_0, x \in D^\pm} u(x), \quad y_0 \in S,$$

функции $u = I\psi$ справедлив аналог формулы Сохоцкого-Племеля:

$$u^\pm = \pm\psi + u^*, \qquad (4)$$

где $u^* = I^*\psi$ определяется сингулярным интегралом

$$(I^*\psi)(y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{M^{\mathrm{T}}(y-y_0)}{|y-y_0|^3} M[n(y)]\psi(y)ds_y,$$

который понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $S \cap \{|y-y_0| \geq \varepsilon\}$.

Для любого решения $u \in C(\overline{D})$ системы (2) справедлива формула Коши:

$$2u(x) = (Iu^+)(x), \quad x \in D.$$

В частности, оператор I переводит класс $C^\mu(S)$ на все пространство $C^\mu(\overline{D})$ решений системы (2). Однако в представлении $u = I\psi$ плотность ψ определяется, конечно, неединственным образом. Ситуация здесь вполне аналогична с классическими интегралами типа Коши, определяющих аналитические функции, где согласно теореме Н.И. Мусхелишвили соответствующее представление единственно для вещественных плотностей. Аналогичная проблема для системы (2) тесно связана с задачей (1).

Систему (2) по отношению к вектор-функции $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$ можно переписать в форме

$$\mathrm{div} v = 0, \quad \mathrm{rot} v + \mathrm{grad} u_1 = 0, \tag{5}$$

при этом краевое условие (1) примет вид

$$u_1^+ = f_1, \quad v^+ n = f_2, \tag{6}$$

где f_j означают компоненты вектор-функции f. Из соотношений (5), (6), в силу формулы Гаусса-Остроградского, следует, что условие ортогональности

$$\int_S f_2(y)ds_y = 0 \tag{7}$$

необходимо для разрешимости неоднородной задачи (1).

Задачу (1) ниже будем исследовать в классе $C^\mu(\overline{D})$. Для ее решения рассмотрим интегральный оператор $I_0\varphi = I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$ с 2- вектор-функцией $\varphi(y) = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$. С учетом (4) подстановка $u = I_0\varphi$ в (1) приводит к системе интегральных уравнений

$$\varphi + K\varphi = f, \tag{8}$$

для неизвестной плотности φ, где интегральный оператор

$$(K\varphi)(y_0) = \int_S k(y_0, y)\varphi(y)ds_y, \quad y_0 \in S,$$

определяется матричным ядром

$$k(y_0, y) = \frac{1}{2\pi|y-y_0|^3} \times \begin{pmatrix} n(y)(y-y_0) & 0 \\ n(y)[y-y_0, n(y_0)] & n(y_0)(y-y_0) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где квадратные скобки означают векторное произведение, а произведение без скобок – скалярное.

Можно показать, что в принятом предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ это ядро имеет слабую особенность. Более точно, справедливо следующее утверждение [3].

Лемма 1. Пусть $S \in C^{1,\mu}, 0 < \mu < 1$. Тогда функция

$$k_0(y_0, y) = |y-y_0|^2 k(y_0, y) \in C^\mu(S \times S),$$
$$k_0(y, y) \equiv 0.$$

Теорема 1. Для системы (2) в односвязной области D с границей $S \in C^{2,+0}$ задача (1) однозначно разрешима, причем условие ортогональности (7) необходимо и достаточно для ее разрешимости в классе $C^\mu(\overline{D})$.

Доказательство. Пусть $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$ есть решение однородной задачи (1). В силу (6) это решение удовлетворяет условиям:

$$u_1^+ = 0, \quad v^+ n = 0. \tag{10}$$

Поскольку $M(\xi)M^{\mathrm{T}}(\xi) = |\xi|^2$, компоненты этого решения являются гармоническими функциями. Тогда $u_1 = 0$ в области D и система (5) принимает вид:

$$\mathrm{div} v = 0, \quad \mathrm{rot} v = 0. \tag{11}$$

Поскольку область D односвязна, в соответствии с формулой Стокса из (11) следует, что $v = \mathrm{grad} h$ для некоторой функции h. В силу первого равенства в (11) функция h должна быть гармонической. По отношению к ней второе краевое условие в (10) переходит в условие Неймана, так что функция h должна быть постоянной и, следовательно, $v = 0$. В силу фредгольмовости задачи (1) последнее доказывает ее однозначную разрешимость.

Покажем теперь достаточность условия (7) для разрешимости задачи (1). Убедимся сначала, что пространство решений однородного уравнения (8) одномерно. Пусть $\varphi + K\varphi = 0$, тогда функция $u = I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$, рассматриваемая в D, является решением однородной задачи (1), так что по свойству единственности $u = 0$.

Рассмотрим во внешней области $D_1 = \mathrm{R}^3 \setminus \overline{D}$ функцию $w = I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$, которая, очевидно, имеет поведение

$$w(x) = O(|x|^{-2}) \quad \textit{при} \quad |x| \to \infty. \tag{12}$$

Согласно (4) для нее имеем соотношение

$$-w^- = 2H^{\mathrm{T}}\varphi. \tag{13}$$

Рассмотрим на поверхности S односвязную область Γ с гладким краем $\partial\Gamma$. Так как по предположению $S \in C^{2,+0}$, на Γ можно выбрать пару неколлинеарных касательных векторов $p, q \in C^{1,+0}(\Gamma)$, определяющих 2×4 - матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

умножение которой на матрицу H^{T} из (1) приводит к нулевой матрице. В силу соотношения (18) функция w, заданная в области D_1, удовлетворяет на Γ однородному краевому условию

$$Gw^{-} = 0. \qquad (14)$$

Покажем, что матрица G удовлетворяет условию дополнительности [3]. А именно, пусть g^{kr} означает минор второго порядка, составленной из $k-$го и $r-$го столбцов матрицы G. В силу [3] это условие заключается в том, что вектор $s=(s_1,s_2,s_3)$ с компонентами

$$s_1 = g^{12}+g^{34}, \quad s_2 = g^{13}-g^{24}, \quad s_3 = g^{14}+g^{23}$$

не выходит в касательную плоскость всюду на S. Легко видеть, что в рассматриваемом случае $s=[p,q]$ и поэтому указанное условие выполнено.

Убедимся, что функция w непрерывно дифференцируема вплоть до $\Gamma\setminus\partial\Gamma$. С этой целью рассмотрим подобласть $D_0 \subset D_1$ с гладкой границей $\partial D_0 \in C^{2,+0}$, для которой $S\cap\partial D_0 = \Gamma$. При этом матрица–функция G продолжена с сохранением гладкости на ∂D_0 до матрицы G_0, удовлетворяющей условию дополнительности. Тогда сужение $w_0 = w|_{D_0}$ является решением задачи $G_0\left(w_0|_{\partial D_0}\right) = f_0$ с правой частью $f_0 \in C^{\mu}(\partial D_0)$, обращающейся в нуль на Γ. Функцию w можно рассматривать как слабое решение и на основании теоремы о локальном повышении гладкости [4] отсюда заключаем, что $w \in C^{1,+0}(\overline{D_0'})$, где подобласть $D_0' \subseteq D_0$ такова, что пересечение $\partial D_0' \cap \partial D_0$ лежит строго внутри Γ.

Запишем $w=(u_1,v)$, тогда краевое условие (14) для системы (5) можно записать в форме равенства нулю скалярных произведений

$$v^{-}p = v^{-}q = 0 \qquad (15)$$

на границе S области D_1.

Рассуждения, аналогичные использованым выше показывают, что $u_1 = 0$ в D_1. Действительно, по теореме Стокса

$$\int_{\Gamma}(\mathrm{rot}v)^{-}(x)n(x)ds_x = \int_{\partial\Gamma} v^{-}(y)e(y)dy,$$

где $e(y)$ есть единичный касательный вектор к контуру $\partial\Gamma$, ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n, осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с (15) вектор v^{-} пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства обращается в нуль. С учетом (5) последнее равенство примет вид:

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u_1^{-}}{\partial n}ds_x = 0.$$

Так как оно верно для любой односвязной области Γ поверхности S, отсюда заключаем, что нормальная производная

$$\frac{\partial u_1^{-}}{\partial n} = 0.$$

Поскольку гармоническая функция u_1, представляющая собой первую компоненту вектора $I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$, стремится к нулю на бесконечности, отсюда $u_1 = 0$ в D_1.

Таким образом, система (5) переходит в (11). Хотя область D_1 не является односвязной, однако с учетом (12) можем воспользоваться теми же рассуждениями, которые использовались выше, и функцию v представить в виде $v = \mathrm{grad}h$ с некоторой гармонической функцией, исчезающей на бесконечности. Краевое условие (15) переходит в

$$\frac{\partial h^{-}}{\partial p} = \frac{\partial h^{-}}{\partial q} = 0.$$

Эти соотношения равносильны тому, что h^{-} постоянна на поверхности S. Существует единственная гармоническая функция $h_0 \in C^2(\overline{D_1})$, которая исчезает на бесконечности и граничное значение h_0^{-} которой тождественно равно 1 на S. Поэтому $h = \lambda h_0$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, $w = (0,\lambda\mathrm{grad}h_0)$ и (13) принимает вид

$$-(0,\lambda\mathrm{grad}h_0)^{-} = 2(\varphi_1,\varphi_2 n),$$

откуда $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \lambda\psi$ с функцией

$$\psi = -(\mathrm{grad}h_0)^{-}n = -\frac{\partial h_0^{-}}{\partial n}. \qquad (16)$$

Верно и обратное, функция φ этого типа принадлежит ядру оператора I_0, где $I_0\varphi = I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$ и, значит, является решением однородного уравнения (8).

По теореме Рисса оператор $1+K$ фредгольмов индекса нуль, так что коразмерность его образа равна 1. В частности, условие ортогональности (7) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (8).

Редукция задачи

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 любое решение $u \in C^{\mu}(\overline{D})$ системы (2) единственным образом представимо в виде $u = I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$ с некоторой вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in C^{\mu}(S)$, удовлетворяющей условию*

Полунин В.А., Солдатов А.П.
Донецкий национальный технический университет

$$\int_S \varphi_2 \psi ds_y = 0,$$

где ψ фигурирует в (16).

Доказательство. Пусть теперь решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (2) задано и $\varphi \in C^\mu(S)$ есть решение уравнения (8) с правой частью $f = Hu^+$. Тогда разность $u - I(H^{\mathrm{T}}\varphi)$ является решением однородной задачи (1) и, следовательно, эта разность равна нулю, что завершает доказательство теоремы.

На основании теоремы 2 для заданных 2×4 -матрицы $B(y) \in C^\mu(S)$ и 2-вектор-функции $f(y) \in C^\mu(S)$ рассмотрим вопрос о редукции общей задачи Римана-Гильберта

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0,\; B(y)u^+(y) = f(y),\; y \in S \quad (17)$$

к системе сингулярных интегральных уравнений на границе S области D. Для этого воспользуемся формулой (3), подстановка которой в (17) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений

$$G(y_0)\varphi(y_0) + \int_S Q(y_0, y; y - y_0)\varphi(y) ds_y =$$
$$= f(y_0), \int_S \varphi_2 \psi\, ds_y = 0,$$

где $G(y_0) = (BH^{\mathrm{T}})(y_0)$ и

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi} | y - y_0 |^{-3} \times$$
$$\times B(y_0) M^{\mathrm{T}}(\xi) M(n(y)) H^{\mathrm{T}}(y). \quad (18)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$M^{\mathrm{T}}(\xi)M(n)H^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ [n,\xi]_1 & \xi_1 \\ [n,\xi]_2 & \xi_2 \\ [n,\xi]_3 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

где $[n,\xi]_k$ – компоненты векторного произведения $[n,\xi]$. Для дальнейшего удобно матрицу $B = (B_{ij})$ задачи (17) рассматривать в виде:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 \\ B_{21} & e_2 \end{pmatrix}, \quad e_k = (B_{k2}, B_{k3}, B_{k4}).$$

С учетом этих обозначений имеем

$$G = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 n \\ B_{21} & e_2 n \end{pmatrix},$$

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi + e_1(y_0)[n(y),\xi] & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi + e_2(y_0)[n(y),\xi] & e_2(y)\xi \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi + [e_1(y_0), n(y)]\xi & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi + [e_2(y_0), n(y)]\xi & e_2(y)\xi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача (17) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (18). В частности, для задачи Шварца (17) с матрицей $B = H$ имеем аналогичную (18) систему, в которой

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(y_0, y; \xi) =$$
$$= \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ n(y_0)[n(y),\xi] & n(y_0)\xi \end{pmatrix}.$$

В этом случае ядро $Q(y_0, y; \xi)$ имеет слабую особенность и поэтому матричное уравнение (18) является фредгольмовым и однозначно разрешимым при выполнении условия ортогональности (7).

Выводы

В работе представлены условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта для эллиптической системы Моисила-Теодореску. Получены условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области трехмерного пространства. Приведен пример аналога задачи Шварца теории аналитических функций для рассматриваемой эллиптической системы и исследована ее разрешимость. При помощи интегрального представления общего решения краевая задача Римана-Гильберта сведена к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений по границе области.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
2. Полунин В.А., Солдатов А.П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, №3. – С. 366 – 375.
3. Полунин В.А., Солдатов А.П. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в ограниченной области // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. работ. – Новосибирск: изд-во ин-та математики, 2010. – С. 366 – 375.
4. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. – М.: Наука, 1991. – 336 с.

References (transliteration)

1. Bicadze A.V. Osnovy teorii analiticheskih funkcij kompleksnogo peremennogo [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]. – M.: Nauka, 1972. – 240 p.
2. Polunin V.A., Soldatov A.P. Trehmernyj analog integrala tipa Koshi [The three-dimensional analogue of the Cauchy integral] //

Differencial'nye uravnenija. – 2011. – T. 47, no 3. – pp. 366 – 375.
3. Polunin V.A., Soldatov A.P. Zadacha Rimana-Gil'berta dlja sistemy Moisila-Teodoresku v ogranichennoj oblasti [Riemann-Hilbert problem for Moisil-Teodorescu system in a bounded region] // Neklassicheskie uravnenija matematicheskoj fiziki. Sb. nauch. rabot. – Novosibirsk: izd-vo in-ta matematiki, 2010. – pp. 366 – 375.
4. Nazarov S.A., Plamenevskij B.A. Jellipticheskie zadachi v oblastjah s kusochno gladkoj granicej [Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundary]. – M.: Nauka, 1991. – 336 p

Полунін В.А., Солдатов А.П. «Редукція задачі Рімана-Гільберта для системи Моісіла-Теодореску» *В роботі розглядаються умови можливості розв'язання крайової задачі Рімана-Гільберта в обмеженій однозв'язній області з гладкою межею для тривимірного аналога системи Коши-Рімана – еліптичної системи Моісіла-Теодореску. Представлена система вперше була запропонована та досліджена в роботах румунських математиків. Вона являє собою лінійну систему диференціальних рівнянь з приватними похідними першого порядку для чотирьохкомпонентної вектор-функції в тривимірному просторі. Підвищений інтерес до вивчення даної системи обумовлюється особливою їхньою значимістю як в математиці, так і в фізиці. У сучасній теорії еліптичних крайових задач центральне місце займає вирішення проблеми знаходження еліптичних систем з фредгольмовими задачами. Ця проблема була поставлена в відомої монографії А.В. Біцадзе. Саме в ході робіт А.В. Біцадзе вперше почалося дослідження крайових задач для тривимірних аналогів системи Коши-Рімана. У цих роботах дослідження стосувалися, головним чином, півпростору. Метою даної роботи є отримання умов розв'язання крайової задачі Рімана-Гільберта в обмеженій однозв'язній області тривимірного простору. За допомогою відомих умов розв'язання класичних задач Діріхле та Неймана доведено необхідна та достатня умова розв'язання задачі Рімана-Гільберта в класі Гельдера. Як приклад розглянуто аналог задачі Шварца теорії аналітичних функцій для даної еліптичної системи і досліджена її разрешимість. Доведено критерій можливості розв'язання цієї задачі в даному класі функцій. За допомогою інтегрального уявлення спільного рішення крайова задача Рімана-Гільберта зведена до дослідження системи сингулярних інтегральних рівнянь щодо границі області. В силу слабкої особливості матричного ядра відповідне інтегральне рівняння є фредгольмовим і єдиним чином вирішуваним при виконанні умови ортогональності.*

Ключові слова: система Моісіла-Теодореску, задача Шварца, інтеграл типу Коши, рівняння Фредгольма.

Polunin V.A., Soldatov A.P. "Riemann-Hilbert problem for Moisil- Teodorescu system". *We consider the boundary conditions for the solvability of the Riemann-Hilbert problem in a bounded simply connected domain with smooth boundary for the three-dimensional analogue of the Cauchy-Riemann system - elliptical system Moisil-Teodorescu. Presented for the first time the system was first proposed and investigated by the Romanian mathematicians. It is a linear system of partial differential equations of the first order for the four-vector function in three-dimensional space. The increased interest in the study of the system caused them a special significance both in mathematics and in physics. In the modern theory of elliptic boundary value problems of the central place is occupied by the problem of finding a solution to the Fredholm elliptic systems tasks. This problem was posed in the famous monograph AV Bitsadze. It is in progress A. Bitsadze first began the study of boundary value problems for three-dimensional analogues of the Cauchy-Riemann system. In these studies, the study focused mainly half. The aim of this work is to provide conditions for the solvability of the Riemann-Hilbert boundary value problem in a bounded simply connected domain of three-dimensional space. With the known conditions of solvability of classical Dirichlet and Neumann proved a necessary and sufficient condition for the solvability of the Riemann-Hilbert problem in the class of Holder. As an example, consider the analogue of the problem Schwartz theory of analytic functions for elliptic system under consideration and investigated its solvability. A criterion for the solvability of this problem in the class of functions. Using the integral representation of the general solution of the boundary value problem of Riemann-Hilbert problem is reduced to the study of a system of singular integral equations on the boundary. Because of the weak features of the kernel matrix corresponding Fredholm integral equation is uniquely soluble and when the orthogonality conditions.*

Keywords: Moisil-Teodorescu system, task Schwartz, Cauchy-type integral, Fredholm equation.

Статья поступила в редакцию 28.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук А.В. Глушаком