ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

УДК 511.35

О числе простых чисел в арифметической прогрессии с разностью специального вида

Шевцова М.В.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
shevtsova@bsu.edu.ru

Шевцова М.В. «О числе простых чисел в арифметической прогрессии с разностью специального вида». *Изучены особенности распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени фиксированного простого числа, на основе оценок сумм значений характера по модулю* $D = p_0^m$ *. Получено уточнение границы изменения разности арифметической прогрессии в многомерной проблеме делителей Дирихле в арифметических прогрессиях для случаев k=2 и k=3 с использованием элементарных методов, то есть не прибегая к средствам математического анализа. Также рассмотрена задача о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы для суммы значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью указанного вида. Определена граница изменения основного растущего параметра k, при которой данная формула нетривиальна. Эта проблема решена на основе оценки «коротких» сумм значений характера по модулю* $D = p_0^m$ *. В результате выведена асимптотическая формула для числа простых чисел, лежащих в арифметической прогрессии с разностью, равной степени фиксированного простого числа. Получено незначительное уточнение остаточного члена этой формулы и границы изменения разности прогрессии. Задача решена элементарными методами; средства математического анализа, а именно контурное интегрирование, применяются только для оценки сумм по простым числам.*

Ключевые слова: разность арифметической прогрессии, проблема делителей Дирихле, асимптотическая формула для числа простых чисел.

Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при $(l,D)=1$ $\pi(X,D,l)$ означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с l по модулю D. Из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(X,D,l)=\frac{LiX}{\varphi(D)}\left(1+O\left(e^{-\ln^{0,1}X}\right)\right),$$

где $D \le X^{1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ – произвольно мало.

Но безусловная граница изменения D гораздо меньше: при $D \le (\ln X^A)$, $A>0$ – константа, c=c(A)>0, справедлива формула:

$$\pi(X,D,l)=\frac{LiX}{\varphi(D)}+O\left(Xe^{-c\sqrt{\ln X}}\right), \qquad (1)$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфиша [1].

Специальный вид разности $D=p_0^m$, $p_0 \ge 3$ – фиксированное простое число, позволяет получить асимптотическую формулу для $\pi(X,D,l)$ при гораздо больших D.

История исследования простых чисел в арифметических прогрессиях

В 1955 г. А.Г. Постников обнаружил [2], что существует многочлен с целыми коэффициентами

$$f(u)=u+a_2u^2+\ldots+a_{m-1}u^{m-1}$$

степени $m-1$ такой, что для любого первообразного корня g по модулю p_0^m при любом целом u справедливо сравнение

$$\frac{ind_g(1+p_0)}{p_0-1} \equiv \Lambda f(u) (\bmod p_0^{m-1}),$$

где $(\Lambda, p_0)=1$ и Λ – корень сравнения

$$\frac{ind_g(1+p_0)}{p_0-1} \equiv \Lambda f(1) (\bmod p_0^{m-1}).$$

Данное наблюдение позволило представить сумму значений неглавного характера по модулю D, равному степени нечетного простого числа, как сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А.Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

К таким задачам относится получение асимптотической формулы для $\pi(X,D,l)$ при возможно большем значении D.

В 1964 г. Ю.В. Линник, М.Б. Барбан и Н.Г. Чудаков [3] доказали следующий асимптотический закон, справедливый при $D=p_0^m\le X^{3/8-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ – произвольно малое число, $M>0$ – произвольно большое число):

$$\pi(X,D,l)=\frac{LiX}{\varphi(D)}\left(1+O\left(\ln^{-M}X\right)\right). \qquad (2)$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике и поэтому требует информации о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе.

Используя идею А.Г. Постникова, авторы получили оценку для суммы значений неглавного характера по модулю $D=p_0^m$:

$$\sum_{\nu\le a}\chi(\nu)<<a^{1/2}D^{1/6}\ln D. \qquad (3)$$

Эта оценка дала возможность Ю.В. Линнику, М.Б. Барбану и Н.Г. Чудакову вывести новую плотностную теорему:

$$N(\sigma,T,\chi)<<T^3D^{(8/3)(1-\sigma)}\ln^{13}D, \qquad (4)$$

где $N(\sigma,T,\chi)$ – число нулей $L(s,\chi)$ в прямоугольнике $\sigma\le\beta<1$, $|\gamma|\le T$, $\rho=\beta+it$ – нуль $L(s,\chi)$ в полосе $0<\beta<1$.

Используя оценку (4), авторы получили формулу (2) для больших D по сравнению с (1).

В монографии А.А. Карацубы [1] приводится следующая формула, справедливая при $D=p_0^m\le X^{1/9}$:

$$\psi(X,D,l)=\frac{X}{\varphi(D)}\left(1+O\left(e^{-c(\ln\ln X)^2}\right)\right), \qquad (5)$$

где $c>0$ – константа.

Доказательство (5) осуществляется на основе плотностной техники. Отметим, что, хотя оценка остаточного члена точнее, чем в (2), граница изменения D гораздо меньше.

Другая задача, в которой исследования А.Г. Постникова нашли свое применение, – это проблема делителей Дирихле в арифметических прогрессиях.

Пусть $\tau_k(n)$ – число решений в целых положительных числах $n_1,\dots,n_k$ уравнения $n_1\cdot\ldots\cdot n_k=n$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}\tau_k(n). \qquad (6)$$

В работе А.Ф. Лаврика [4] получена асимптотическая формула для суммы (6) при $k\ge4$ с произвольной разностью D:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}\tau_k(n)=\frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)}+R,$$

где $R<<\frac{1}{\varphi(D)}X^{1-1/c_1}D^{k/c_2}$, c_1, c_2 – константы, $P_{k-1}(z)$ – многочлен степени $k-1$ от переменной z. Эта формула нетривиальна при $D\le X^{c_3/k}$.

Если $k<4$, то последний результат существенно усилен.

Г. Иванец [5] на основе модулярной техники получил асимптотическую формулу в случае $k=2$, справедливую при $D\le X^{2/3-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ – произвольно мало), и совместно с Дж. Фридлендером [6] – для $k=3$, справедливую при $D\le X^{1/2+1/230}$.

В 1979 г. М.М. Петечук [7] усилил результат А.Ф. Лаврика и получил асимптотическую формулу для суммы (6) при фиксированном $k\ge2$ и $D=p_0^m\le X^{3/8-\varepsilon}$:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}\tau_k(n)=\frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)}+O\left(\frac{X^{1-\phi}}{\varphi(D)}\right), \qquad (7)$$

где $(l,D)=1$, $P_{k-1}(\ln X)$ – многочлен степени k-1 с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\phi=\min\left\{\frac{\varepsilon}{16},\frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta>0$ – константа, зависящая от p_0.

Формула остаточного члена (7) получена с применением оценки «короткой» суммы значений характера по модулю $D=p_0^m$, основанной на работе А.Г. Постникова. Доказательство (7) проводится без применения средств комплексного анализа. Оно опирается на метод работы А.А. Карацубы [8], позволяющий оценивать остаточный член асимптотической формулы по схеме решения тернарной аддитивной задачи.

Многомерная проблема делителей Дирихле в арифметических прогрессиях

Рассмотрим проблему делителей Дирихле в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа.

Элементарными методами нами была доказана следующая теорема.

Теорема 1. При $(l,D)=1$ имеет место формула:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}\tau_k(n)=\frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)}+R. \qquad (8)$$

При $k=2$ (8) справедлива для $D \le X^{1/2-\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 0$ – сколь угодно малое число).

При $k=3$ (8) справедлива для $D \le X^{4/9-\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2 > 0$ – сколь угодно малое число).

Таким образом, получено уточнение границы изменения разности арифметической прогрессии в многомерной проблеме делителей Дирихле в арифметических прогрессиях для случаев $k=2$ и $k=3$.

Рассмотрим также задачу о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы для суммы (6) при $D = p_0^m \le X^{3/8-\varepsilon}$. В этой задаче нами определена граница изменения основного растущего параметра k, при которой данная формула нетривиальна.

Теорема 2. При $(l,D)=1$, $D = p_0^m \le X^{3/8-\varepsilon}$ справедлива формула:

$$\sum_{\substack{n\le X \\ n\equiv l(\bmod D)}} \tau_k(n) = \frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + R\,, \qquad (9)$$

где $R \le \frac{X^{1-\phi}}{\varphi(D)}(k-1)^{7(k-2)}e^{c(k-2)}(\ln X)^{2k-2}$,

$P_{k-1}(\ln X)$ – многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\phi = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{5k^3}\right\}$, $\gamma > 0$, $c > 0$ – константы.

Заметим, что, поскольку главный член является величиной порядка $\frac{X}{\varphi(D)}(\ln X)^{k-1}$, то формула (9) нетривиальна при $k \le \left(\frac{\ln X}{\ln\ln X}\right)^{1/4}$.

Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях

Рассмотрим проблему распределения простых чисел в арифметической прогрессии с разностью, равной степени фиксированного простого числа. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. При $(l,D)=1$, $D = p_0^m \le X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$ справедлива формула:

$$\pi(X,D,l) = \frac{LiX}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X}{\varphi(D)}e^{-\phi(\ln\ln X)^2}\right),$$

где $0 < \phi < 1$ – константа.

По сравнению с теоремой Ю.В. Линника, М.Б. Барбана и Н.Г. Чудакова получено незначительное уточнение остаточного члена и верхней границы изменения D. Наше доказательство существенно отличается тем, что не использует информации о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе, а использует лишь теорему о границе нулей, принадлежащую В.Н. Чубарикову [11], доказательство которой элементарно.

Вывод асимптотической формулы осуществляется, в основном, по схеме работ М.М. Петечука [7] и А.А. Карацубы [8]. Однако в эту схему пришлось внести изменения, поскольку нам необходимо оценивать не только суммы значений характера, но и суммы значений характера по простым числам.

При доказательстве теоремы возникают короткие по сравнению с модулем характера суммы двух видов:

1) $\sum_{N<n\le 2N}\chi(n)$; 2) $\sum_{N<n\le 2N}\mu(n)\chi(n)$.

Первые – это суммы значений характера по сплошному промежутку. Их мы оцениваем как суммы Вейля, согласно технике Постникова: $\sum_{N<n\le 2N}\chi(n) << N^{1-\gamma/r^2}$, $r = \frac{\ln D}{\ln N}$, где $0<\gamma<1$ – константа.

Оценка сумм второго вида представляет отдельную задачу, когда параметр N «очень маленький», то есть самая длинная сумма оказывается короткой.

Пользуясь определением функции Мебиуса, мы представляем эту сумму в виде:

$$\sum_{N<n\le 2N}\mu(n)\chi(n) = 1 + \sum_{l=1}^{L_0}(-1)^l S_l\,,$$

где $S_l = \sum_{N\delta_l\le 2N}\chi(\delta_l)$, δ_l – бесквадратное число, имеющее ровно l простых делителей, $L_0 = [\log_2 N]$.

Применяя решето Виноградова, мы сводим сумму S_1 к сумме значений характера по простым числам: $\sum_{N'<p\le 2N'}\chi(p)$.

Эту сумму не удается нетривиально оценить, используя метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова, в силу мультипликативности функции характера. Поэтому здесь мы применяем теорему В.Н. Чубарикова [11] о границе нулей L-функции Дирихле: для произвольного неглавного характера χ по модулю $D = p_0^m$ $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,, \quad |t| < e^{b_2(\ln\ln D)^2}\,,$$

где b_1, b_2 – положительные константы.

На основе этой теоремы мы получаем оценку логарифмической производной L – функции в области

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2},$$

$$|t| < e^{c_2(\ln\ln D)^2},$$

$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| << (\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2.$$

Далее, применяя формулу Перрона и метод контурного интегрирования, приходим к следующему неравенству:

$$\sum_{N'<p\le 2N'} \chi(p) << N' e^{-c(\ln\ln D)^2},$$

где $0 < c < 1$ – константа.

Последний результат и определяет в конечном счете оценку остаточного члена асимптотической формулы для $\pi(X, D, l)$.

Выводы

Подведем итоги данной работы. Нами было рассмотрено три задачи, относящиеся к проблематике распределения значений арифметических функций в арифметической прогрессии с разностью D, равной степени простого числа.

Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ в многомерной проблеме делителей Дирихле была уточнена граница изменения D.

Также получена равномерная оценка остаточного члена в асимптотической формуле для числа значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью указанного вида.

Основной итог работы заключается в получении формулы для $\pi(X, D, l)$. В этой формуле по сравнению с предшествующими результатами достигнуто незначительное улучшение остаточного члена и границы изменения разности арифметической прогрессии. Но основное отличие заключается в методике доказательства этой теоремы. Доказательство проводится элементарно, за исключением оценки сумм по простым числам, где были использованы аналитические методы.

Список литературы

1. Карацуба А.А. Распределение произведений простых сдвинутых чисел в арифметических прогрессиях // Доклад АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 4. – С. 724 – 727.
2. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. Матем. – 1955. – Т. 19, № 1. – С. 11 – 16.
3. Линник Ю.В., Барбан М.Б., Чудаков Н.Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. J. – 1964. – vol. 9, no 4. – pp. 375 – 390.
4. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР, сер. Матем. – 1966. – Т. 30. – С. 433 – 448.
5. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. – American Mathematical Society, Colloquium Publications. – V. 53, 2004. – 615 p.
6. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Klosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – pp. 319 – 350.
7. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Известия АН СССР, сер. Матем. – 1979. – Т. 43, № 4. – С. 892 – 908.
8. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 239 с.
9. Виноградов А.И., Линник Ю.В. Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии // Успехи матем. наук. – 1957. – Т. 12, вып. 4(76). – С. 277 – 280.
10. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // Доклад АН СССР. – 1939. – Т. 22, № 7. – С. 391 – 393.
11. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. – 1973. – № 2. – С. 46 – 52.

References (transliteration)

1. Karacuba A.A. Raspredelenie proizvedenij prostyh sdvinutyh chisel v arifmeticheskih progressijah [The distribution of products of prime numbers shifted in arithmetic progressions] // Doklad AN SSSR. – 1970. – T. 192, no 4. – pp. 724 – 727.
2. Postnikov A.G. O summe harakterov po modulju, ravnomu stepeni prostogo chisla [On the sum of characters modulo a power of a prime number] // Izv. AN SSSR, ser. Matem. - 1955. – T. 19, no 1. – pp. 11 – 16.
3. Linnik J.V., Barban M.B., Chudakov N.G. O prostyh chislah v arifmeticheskoj progressii s raznost'ju, ravnoj stepeni prostogo chisla [On prime numbers in arithmetic progressions whose difference is a power of a prime number] // Acta arithm. J. – 1964. – vol. 9, no 4. – pp. 375 – 390.
4. Lavrik A.F. Funkcional'noe uravnenie dlja L-funkcij Dirihle i zadacha delitelej v arifmeticheskih progressijah [Functional equation for Dirichlet L-functions and the problem of divisors in arithmetic progressions] // Izvestija AN SSSR, ser. Matem. – 1966. – T. 30. – pp. 433 – 448.
5. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. – American Mathematical Society,

Colloquium Publications. – V. 53, 2004. – 615 p.

6. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Klosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – pp. 319 – 350.
7. Petechuk M.M. Summa znachenij funkcii delitelej v arifmeticheskih progressijah s raznost'ju, ravnoj stepeni prostogo nechetnogo chisla [The sum of values of divisor function in arithmetic progressions whose difference is a power of a prime odd number] // Izvestija AN SSSR, ser. Matem. – 1979. – T. 43, no 4. – pp. 892 – 908.
8. Karacuba A.A. Osnovy analiticheskoj teorii chisel [Fundamentals of analytic number theory]. – M.: Nauka, 1983. – 239 p.
9. Vinogradov A.I., Linnik J.V. Ocenka summy chisla delitelej v korotkom otrezke arifmeticheskoj progressii [Estimate of the sum of divisors in a short segment of an arithmetic progression] // Uspehi matem. nauk. – 1957. – T. 12, Issue. 4(76). – pp. 277 – 280.
10. Mardzhanishvili K.K. Ocenka odnoj arifmeticheskoj summy [Evaluation of one of the arithmetic sum] // Doklad AN SSSR. – 1939. – T. 22, no 7. – pp. 391 – 393.
11. Chubarikov V.N. Utochnenie granicy nulej L-rjadov Dirihle po modulju, ravnomu stepeni prostogo chisla [Clarification of the boundaries of zero Dirichlet L-series modulo a power of a prime number] // Vestnik Moskovskogo universiteta. – 1973. – no 2. – pp. 46 – 52.

Шевцова М.В. «Про число простих чисел в арифметичній прогресії з різницею спеціального вигляду». *Вивчено особливості розподілу простих чисел в арифметичних прогресіях з різницею, яка дорівнює мірі фіксованого простого числа, на основі оцінок сум значень характеру по модулю* $D = p_0^m$. *Отримано уточнення границі зміни різниці арифметичної прогресії в багатовимірній проблемі дільників Дирихле в арифметичних прогресіях для випадків k=2 і k=3 з використанням елементарних методів, тобто не удаючись до засобів математичного аналізу. Також розглянута задача про рівномірну оцінку залишкового члена асимптотичної формули для суми значень функції дільників в арифметичній прогресії з різницею вказаного вигляду. Визначена границя зміни основного зростаючого параметра k, при якій дана формула нетривіальна. Ця проблема вирішена на основі оцінки «коротких» сум значень характеру за модулем* $D = p_0^m$. *В результаті виведена асимптотична формула для числа простих чисел, які є в арифметичній прогресії з різницею, що дорівнює міри фіксованого простого числа. Отримано незначне уточнення залишкового члена цієї формули і границі зміни різниці прогресії. Задача вирішена елементарними методами; засоби математичного аналізу, а саме контурна інтеграція, застосовуються лише для оцінки сум за простими числами.*

Ключові слова: різниця арифметичної прогресії, проблема дільників Дирихле, асимптотична формула для числа простих чисел.

Shevtsova M. "On the number of primes in arithmetic progression with difference of a special type". *The peculiarities of distribution of primes in arithmetic progressions whose difference is a power of a fixed prime number are researched on the basis of estimates of the sums of values of character on the module* $D = p_0^m$. *A clarification of the boundary of the difference of arithmetic progression in the multidimensional Dirichlet divisor problem in arithmetic progressions for the cases k = 2 and k = 3 is received with use of elementary methods, without resorting to means of the mathematical analysis. The problem of the uniform evaluation of the remainder of the asymptotic formula is also considered for the sum of values of divisor function in arithmetic progression with difference of this kind. Boundary changes main growing parameter k, at which this formula is non-trivial, are defined. This problem is solved on the basis of the estimate of the "short" sums of values of character on the module* $D = p_0^m$. *An asymptotic formula for the number of primes lying in arithmetic progression with the difference equal to the degree of a fixed prime number is derived. Insignificant clarification of the remainder term of this formula and the boundary of change of a difference of a progression is received. The problem is solved by elementary methods, means of the mathematical analysis, namely planimetric integration, are applied only to an estimate of the sums on primes. It is not possible to estimate this sum nontrivially because of multiplication of function of character. So we receive an estimate of a logarithmic derivative of Dirichlet L-function in a special area using the theorem of boundary of zero Dirichlet L-function by V. N. Chubarikov. Applying planimetric integration the formula of the remainder term is received.*

Keywords: the difference of the arithmetic progression, the problem of Dirichlet divisors, asymptotic formula for the number of prime numbers.

Статья поступила в редакцию 05.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериным