ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

УДК 517.977

О численном решении линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

Флоринский В.В.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
flor@bsu.edu.ru

Флоринский В.В. «О численном решении линейной задачи быстродействия с двумерным управлением». *В работе рассматривается линейная задача быстродействия с двумерным управлением. Для этой задачи формулируются и доказываются условия оптимальности. Показано, что решение такой задачи сводится к решению двух линейных задач быстродействия с одномерным управлением и общим временем быстродействия. При этом множества достижимости этих задач должны касаться, т.е. иметь одну общую граничную точку, в этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Приведен метод преобразования линейной задачи быстродействия к каноническому виду. Предлагается численный метод решения исходной задачи, построенный на аналитическом решении двух линейных задач быстродействия с канонической системой, основанный на применении min-проблемы моментов. Описан алгоритм решения задачи быстродействия с двумерным управлением, а также приведены результаты компьютерной реализации предложенного метода.*

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, область управляемости, каноническая система, опорный вектор.

Введение

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия. Поскольку время быстродействия является наиболее естественным критерием оптимальности, задачи на быстродействие стали одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. В последнее время существенное развитие теории линейного быстродействия было достигнуто на основе её связи с классической проблемой моментов. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, & i = \overline{2,n}, \\ x(0) = x, & x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min. \end{cases} \tag{1}$$

В.И. Коробовым и Г.М Скляром в [1] показано, что решение данной задачи эквивалентно степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке (min-проблеме моментов), что позволило впервые получить аналитическое решение задачи (1) для системы произвольного порядка n. В [1, 2] даны методы нахождения времени быстродействия Θ, моментов переключения $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ управления $u(t)$ (точки разрыва функции $u(t)$) и рода управления $\tilde{u} = \pm 1$ – управления на конечном промежутке $[T_{n-1}, \Theta]$.

В данной работе для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \\ |u_1| \le 1, \quad |u_2| \le 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min \end{gathered} \tag{2}$$

доказываются условия оптимальности по быстродействию и предложен численный метод, основанный на использовании аналитического решения задачи (1) и являющийся разновидностью численного метода решения задачи (2), предложенного в работе [3].

Условия оптимальности для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

Рассмотрим задачу быстродействия (2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, переводящие точку $x(0)$ в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau ,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau .$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ выпуклые и содержат 0 в качестве внутренней точки.

Нетрудно видеть, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \quad |u_1| \le 1, \tag{3}$$

а множество $M_2(\Theta)$ – областью управляемости в ноль для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2u_2, \quad |u_2| \le 1. \qquad (4)$$

Пусть $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Тогда $M_3(\Theta)$ – выпуклое множество, содержащее точку x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям $M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Теорема. Пусть для системы (2) выполнены следующие условия:

$$rank(b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1) = n,$$

$$rank(b_2, Ab_2, \dots, A^{n-1}b_2) = n,$$

множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ выпуклые.

Тогда, для того, чтобы время быстродействия Θ для задачи (2) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное. Пусть пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ содержит внутреннюю точку. Тогда время Θ не является оптимальным. Действительно, пусть $\tilde{x}_0$ – общая внутренняя точка этих множеств. Тогда из этой точки можно попасть в 0 за строго меньшее, чем Θ время Θ_1 и, аналогично, из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0 – за строго меньшее время Θ_2, чем Θ. Это значит, что существуют управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие, что $|u_1| \le 1$ и $|u_2| \le 1$ и такие, что выполняются равенства

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_1} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \qquad (5)$$

для $\Theta_1 < \Theta$ и

$$\tilde{x}_0 - x_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau \qquad (6)$$

для $\Theta_2 < \Theta$. Пусть для определенности $\Theta_1 \ge \Theta_2$. Тогда можно положить управление $u_1(\tau) = 0$ на отрезке $[\Theta_2, \Theta_1]$. В этом случае будут справедливы равенство (6) и равенство

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

т.е. равенство

$$x_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau$$

будет справедливым при $\Theta = \Theta_2$, а это значит, что из точки x_0 можно попасть в 0 в силу системы (2) за меньшее время, чем Θ. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что, если $M_1(\Theta) \cap M_3(\Theta) \ne \varnothing$ и не содержит внутреннюю точку, то время быстродействия Θ оптимально.

Действительно, пусть время Θ не является временем быстродействия и пусть Θ_0 – время быстродействия. В этом случае $M_1(\Theta_0) \subset M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta_0) \subset M_3(\Theta)$ при $\Theta_0 < \Theta$, но тогда $M_1(\Theta_0) \cap M_3(\Theta_0) = \varnothing$, а это означает, что за меньшее, чем Θ время попасть из точки x_0 в 0 невозможно. Следовательно, Θ – оптимальное по быстродействию время. Теорема доказана.

Таким образом, время быстродействия Θ должно быть таково, что множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ должны иметь общую граничную точку, которую обозначим также через $\tilde{x}_0$. В этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Метод нахождения опорного вектора к области управляемости канонической задачи быстродействия описан в работах [4, 5]. Таким образом, решение задачи быстродействия (2) сводится к решению следующих задач быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_1u_1, & |u_1| \le 1, \\ x(0) = \tilde{x}_0, & x(\Theta) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_2u_2, & |u_2| \le 1, \\ x(0) = x_0 - \tilde{x}_0, & x(\Theta) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время быстродействия Θ будет являться общим как для задачи (7), так и для задачи (8), и оно же будет являться временем быстродействия для задачи (2).

Преобразование линейной задачи быстродействия к каноническому виду

Приведем метод преобразования линейной задачи быстродействия к каноническому виду.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad (9)$$

где A – вещественная матрица $n \times n$,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

Рассмотрим приведение произвольной матрицы A к форме Фробениуса. Предположим, что для системы (9) выполнено условие

$$rank(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n. \qquad (10)$$

Определим вектор $\vec{c}$ из следующих равенств:

$$\begin{aligned} &\vec{c} * b = 0, \\ &\vec{c} * Ab = 0, \\ &\ldots \\ &\vec{c} * A^{n-2}b = 0, \\ &\vec{c} * A^{n-1}b = 1. \end{aligned}$$

В силу предположения (10) эта система имеет единственное решение.

Сделаем замену

$$y = Qx,$$

где матрица Q составлена из векторов $\vec{c} * A^{n-1}, \vec{c} * A^{n-2}, \ldots, \vec{c} *$, как из строк:

$$Q = \begin{pmatrix} \vec{c} * A^{n-1} \\ \vec{c} * A^{n-2} \\ \vdots \\ \vec{c} * \end{pmatrix},$$

т.е. $y_i = \vec{c} * A^{n-i} x_i$, $i = \overline{1,n}$. Умножая систему (9) на матрицу Q, получим систему:

$$Q\dot{x} = QAx + Qbu,$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \vec{c} * A^n x + \vec{c} * A^{n-1} bu, \\ \dot{y}_2 = \vec{c} * A^{n-1} x + \vec{c} * A^{n-2} bu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = \vec{c} * Ax + \vec{c} * bu. \end{cases} \qquad (11)$$

По теореме Гамильтона-Кэлли,

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i,$$

где a_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы A

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i,$$

и учитывая, что

$$\vec{c} * A^i b = \begin{cases} 1, & если \quad i = n-1, \\ 0 & если \ 0 \le i < n-1, \end{cases}$$

систему (11) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \vec{c} * \left(a_{n-1} A^{n-1} x + \ldots + a_0 x \right) + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{cases} \qquad (12)$$

В случае, если матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

то, учитывая, что $\lambda^n = 0$, система (12) принимает канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \ldots\ldots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{cases} \qquad (14)$$

Матрица Q^{-1}, обратная матрице Q, имеет вид:

$$Q^{-1} = \left(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b \right),$$

откуда из критерия управляемости (10) следует, что если система (9) с матрицей A вида (13) управляемая, то она может быть приведена к каноническому виду (14).

Таким образом, при решении задачи быстродействия (2) системы (7) и (8) приводятся к каноническому виду при помощи матриц Q_1 и Q_2 соответственно и решение задачи (2) сводится к решению двух канонических систем с общим временем быстродействия Θ:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = u_1, && |u_1| \le 1, \\ &\dot{y}_i = y_{i-1}, && i = \overline{2,n}, \\ &y(0) = y_0 = Q_1 \tilde{x}_0, \quad y(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min, \end{aligned} \qquad (15)$$

где $y = Q_1 x$ и

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = u_2, && |u_2| \le 1, \\ &\dot{z}_i = z_{i-1}, && i = \overline{2,n}, \\ &z(0) = z_0 = Q_2(x - \tilde{x}_0), \quad z(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min, \end{aligned} \qquad (16)$$

где $z = Q_2 x$.

Численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением

Опишем теперь численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением. Для этого рассмотрим задачу быстродействия (2) с матрицей A вида (13). Как было показано, решение этой задачи сводится к решению задач (7) и (8) и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время Θ является временем быстродействия как для задачи (7) из точки $\tilde{x}_0$ в 0, так и для задачи (8) из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0, и оно же будет временем быстродействия для задачи (2) из точки x_0 в 0.

В работе [3] предложен численный метод решения данной задачи, основанный на поиске точки $\tilde{x}_0$ на биссектрисе угла между опорными векторами к областям управляемости задач (15)

Флоринский В.В.
Донецкий национальный технический университет

и (16). В данной работе предлагается метод, основанный на поиске точки $\tilde{x}_0$ на опорном векторе к одной из областей управляемости задач (15) и (16).

При помощи невырожденных матриц Q_1 и Q_2 приведем задачи (7) и (8) к каноническому виду (15) и (16) соответственно. Обозначим через N_y опорный вектор к области управляемости системы (15) за время Θ_y, а через N_z – опорный вектор к области управляемости системы (16) за время Θ_z.

На отрезке прямой, соединяющей точки x_0 и 0, методом половинного деления находим точку $\tilde{x}$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$. В этой точке находим опорный вектор [3, 4] $N_y = N_y\left(Q_1\tilde{x}, \Theta_y\right)$ к области управляемости системы (15) за время Θ_y и опорный вектор $N_z = N_z\left(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z\right)$ к области управляемости системы (16) за время Θ_z. Следует отметить, что векторы $Q_1^{-1}N_y$ и $Q_2^{-1}N_z$ являются опорными векторами в точке $\tilde{x}$ исходного пространства к областям управляемости систем (7) за время Θ_y и (8) за время Θ_z. Если угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ (обозначим его $\delta = \delta(\tilde{x})$) равен π (вычислять следует $\cos\delta$), то время быстродействия задачи (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. Для каждой из систем (15) и (16) находим моменты переключения [1, 2], что и будет являться решением исходной задачи. В противном случае находим биссектрису угла δ. На этой биссектрисе находим точку $\tilde{x}_b$, ближайшую к точке $\tilde{x}$, в которой $\cos\delta$ принимает минимальное значение (здесь можно применить метод золотого сечения поиска минимума функции).

Если в точке $\tilde{x}_b$ выполняется неравенство $\Theta_y > \Theta_z$, то в направлении вектора $Q_1^{-1}N_y\left(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y\right)$ находим точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если же в точке $\tilde{x}_b$ $\Theta_y < \Theta_z$, то точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$, находим в направлении вектора $-Q_2^{-1}N_z\left(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z\right)$.

Если в найденной точке $\tilde{x}'$ угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то время быстродействия задачи (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$. В противном случае находим биссектрису угла $\delta = \delta(\tilde{x}')$, и процесс повторяется до тех пор, пока на очередном шаге угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ не станет равным π с заданной точностью ε, то есть не будет выполняться неравенство $\left|\cos\delta + 1\right| < \varepsilon$.

Приведем описание алгоритма рассмотренного метода.

Шаг 1. Задаем размерность n, начальную точку x_0, векторы b_1 и b_2, точность вычислений ε.

Шаг 2. Находим матрицы Q_1, Q_2, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}.

Шаг 3. Между точками x_0 и 0 методом половинного деления находим точку $\tilde{x}$, в которой $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$.

Шаг 4. В точке $\tilde{x}$ находим опорные векторы $N_y = N_y\left(Q_1\tilde{x}, \Theta_y\right)$ и $N_z = N_z\left(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z\right)$.

Шаг 5. Находим $\cos\delta$, где $\delta = \delta(\tilde{x})$ – угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$.

Шаг 6. Если $\left|\cos\delta + 1\right| < \varepsilon$, то переходим к шагу 11, иначе переходим к шагу 7.

Шаг 7. Находим биссектрису угла δ и на этой биссектрисе методом золотого сечения находим точки $\tilde{x}_b$, ближайшую к точке $\tilde{x}$, в которой $\cos\delta$ принимает минимальное значение.

Шаг 8. Находим в точке $\tilde{x}_b$ время быстродействия $\Theta_y = \Theta_y(Q_1\tilde{x}_b)$ и $\Theta_z = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b))$.

Шаг 9. Если $\Theta_y > \Theta_z$, то в направлении вектора $Q_1^{-1}N_y\left(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y\right)$ находим точку $\tilde{x}$, в которой выполняется равенство $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$, если $\Theta_y < \Theta_z$, то в направлении вектора $-Q_2^{-1}N_z\left(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z\right)$ находим точку $\tilde{x}$, в которой выполняется равенство $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$.

Шаг 10. Переходим к шагу 4.

Шаг 11. Точка $\tilde{x}$ является искомой точкой $\tilde{x}_0$. Для каждой из задач (15) и (16) находим род управления $\tilde{u}_y$ и $\tilde{u}_z$ и для каждого из управлений u_y и u_z находим моменты переключений.

Рассмотрим результат применения описанного численного метода к решению задач быстродействия.

ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

Для задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \\ |u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1, \\ x(0) = (1;1), \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min \end{cases}$$

при применении описанного метода после 11 итераций было получено:

точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,153346;\, 0,507258)$;

время быстродействия $\Theta \approx 1,2875073$;

момент переключения для управления u_1: $T_1 \approx 0,5670808$;

момент переключения для управления u_2: $T_1 \approx 1,2204268$;

род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1$, $\tilde{u}_2 = +1$.

Изменения поведения областей управляемости для каждой из задач (7) и (8) представлены на следующих рисунках.

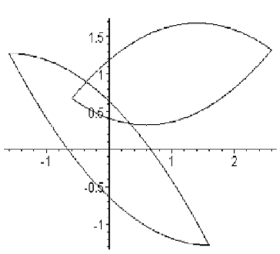

Рис. 1.

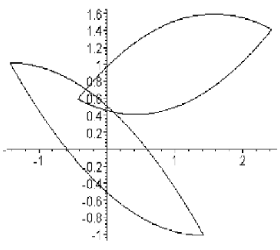

Рис. 2

На рисунке 1 показано начальное положение областей управляемости после выполнения шага 3 алгоритма при $\Theta \approx 1,597$. На рисунке 2 – положение областей после первой итерации при $\Theta \approx 1,425$.

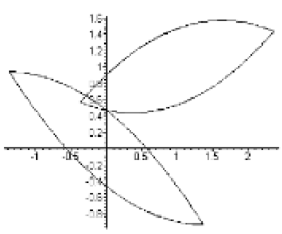

Рис. 3

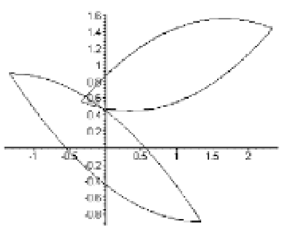

Рис. 4

На рис 3 и 4 – положение областей управляемости соответственно после двух итерация (при $\Theta \approx 1,366$) и трех итераций (при $\Theta \approx 1,338$).

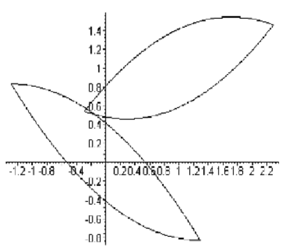

Рис. 5

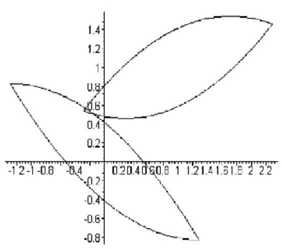

Рис. 6

На рисунках 5 и 6 показано положение областей управляемости после десяти итераций (при $\Theta \approx 1,289$) и после последней, одиннадцатой, итерации (при $\Theta \approx 1,2875$).

Приведем результаты численного решения описанным методом для задачи быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_3, \\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1, \\ x(0) = x_0,\ x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min. \end{cases}$$

Так для начальной точки $x_0 = (0;1;1;1)$ точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,230497; -0,229331;\, 0,461084;\, 1,174799)$; время быстродействия $\Theta \approx 4,965695$;

моменты переключения для управления u_1: $T_1 \approx 0,611052, T_2 \approx 2,524571, T_3 \approx 4,281118$,

моменты переключения для управления u_2: $T_1 \approx 1,455239, T_2 \approx 3,459045, T_3 \approx 4,965696$,

род управления (управление на конечном промежутке):

$\tilde{u}_1 = +1$, $\tilde{u}_2 = +1$.

Список литературы

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), № 2(10). – С. 186 – 206.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, № 3/4. – С. 264 – 287.
3. Флоринский В.В. Решение линейной задачи быстродействия с двумерным управлением // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2015. – №5 (202). Вып. 38. – С. 89 – 95.
4. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстродействия // Математическая физика, анализ, геометрия. –2000. – Т.7, № 3. – С. 308 – 320.
5. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Минимальный полином для нахождения моментов переключения и опорного вектора к области управляемости // Дифференциальные уравнения. 2002. – Т. 38, – С. 16 – 19.

Флоринский В.В.
Донецкий национальный технический университет

References (transliteration)

1. Korobov V.I., Skljar G.M. Optimal'noe bystrodejstvie i stepennaja problema momentov [Time optimality and the power moment problem] // Mat. sbornik. – 1987. – 134(176), no. 2(10). – pp. 186 – 206.
2. Korobov V.I., Skljar G.M., Florinskij V.V. Metody postroenija optimal'nyh po bystrodejstviju upravlenij dlja kanonicheskih upravljaemyh sistem [Methods of construction of time-optimal controls for canonical control systems] // Matematicheskaja fizika, analiz, geometrija. – 1999. – T. 6, no. 3/4. – pp. 264 – 287.
3. Florinskij V.V. Reshenie linejnoj zadachi bystrodejstvija s dvumernym upravleniem [The solution of the linear time-optimal problem with the two-dimensional control] // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. – 2015. – no. 5(202). Issue 38. – pp. 89 – 95.
4. Korobov V.I., Skljar G.M., Florinskij V.V. Mnogochlen minimal'noj stepeni dlja opredelenija vseh momentov perekljuchenija v zadache bystrodejstvija [The minimal polynomial for determining of all points of switching in the time optimal control problem] // Matematicheskaja fizika, analiz, geometrija. –2000. – T. 7, no. 3. – pp. 308 – 320.
5. Korobov V.I., Skljar G.M., Florinskij V.V. Minimal'nyj polinom dlja nahozhdenija momentov perekljuchenija i opornogo vektora k oblasti upravljaemosti [The minimal polynomial for determining the switching times and the support vector to the controllability domain] // Differencial'nye uravnenija. 2002. – T. 38, – pp. 16 – 19.

Флоринський В.В. «Про чисельне рішення лінійної задачі швидкодії з двовимірним управлінням». *В роботі розглядається лінійна задача швидкодії з двовимірним управлінням. Для цієї задачі формулюються та доводяться умови оптимальності. Показано, що вирішення такої задачі зводиться до вирішення двох лінійних задач швидкодії з одновимірним управлінням і загальним часом швидкодії. При цьому множини досяжності цих задач повинні торкатися, тобто мати одну загальну граничну точку, в цій точці існує (можливо не єдина) гіперповерхня, яка розділяє ці дві множини. Наведено метод перетворення лінійної задачі швидкодії до канонічного виду. Запропоновано чисельний метод розв'язання вихідної задачі, який побудовано на аналітичному рішенні двох лінійних задач швидкодії з канонічною системою та засновано на застосуванні min-проблеми моментів. Описано алгоритм рішення задачі швидкодії з двовимірним управлінням, а також наведено результати комп'ютерної реалізації запропонованого методу.*

Ключові слова: оптимальне управління, задача швидкодії, область керованості, канонічна система, опорний вектор.

Florinsky V.V. "On the numerical solution of linear time-optimal problem with two-dimensional control". *This the paper considers the problem of linear performance with two-dimensional control. For this problem are formulated and proved optimality conditions. It is shown that the solution of this problem reduces to solving two linear problems of performance with one-dimensional control, and overall time performance. The attainability of these objectives should relate to, i.e. have one common boundary point, at this point there is a (possibly not unique) hyperplane separating these two sets. Given the method of converting the linear time-optimal control problem to the canonical form. A numerical method for solving the original problem, built on analytical solution of two linear problems of performance with the canonical system based on the application of the min-problem. The described algorithm for solving the time-optimal problem with two-dimensional control, as well as the results of the computer implementation of the proposed method.*

Keywords: optimal control, time-optimal problem, set of controllability, canonical system, support vector.

Статья поступила в редакцию 23.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериным