

# ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*Сухоруков М.Ю., Беловодский В.Н.  
Донецкий национальный технический университет, Донецк,  
e-mail: max.sukhorukov@gmail.com*

## 1. Введение

При исследовании нелинейных динамических систем нередко возникает необходимость в определении числа стационарных состояний, а также отслеживании того, как изменяется это число при варьировании параметров системы. Эту динамику отражают, обычно, с помощью бифуркационных диаграмм, нахождение которых, в практически значимых случаях, проводится численно, путем многократного решения соответствующих систем дифференциальных уравнений и традиционного построения отображения Пуанкаре [1]. Ради справедливости, следует отметить, что этим объемом информации, а именно, числом возможных режимов и его зависимостью от варьируемого параметра, и исчерпываются, пожалуй, возможности данного подхода. А выяснение дополнительных особенностей вскрываемых режимов, что немаловажно с точки зрения их практической оценки, требует приложения и дополнительных усилий. Эти соображения, на наш взгляд, могут быть учтены в случае систем с гладкой, а именно, — полиномиальной нелинейностью. Описанию предлагаемого подхода и его экспериментальной апробации и посвящена данная статья.

## 2. Предлагаемый подход, его описание

Базируется на реализации метода гармонического баланса к решению системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ , — полиномиальная по переменной  $x$   $T$ -периодическая функция времени и состоит в следующем.

$T$ -периодическое решение системы (1) ищется в комплексной форме конечного разложения ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}, \quad (2)$$

где  $N$  — число учитываемых гармоник,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $c_n$ ,  $c_{-n}$  — комплексно-сопряженные коэффициенты разложения. Они связаны с коэффициентами тригонометрического представления ряда Фурье  $a_n$ ,  $b_n$  соотношениями

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}, \quad b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i},$$

откуда амплитуда  $k$ -ой гармоники  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2\sqrt{c_k c_{-k}}$ .

После подстановки (2) в (1), выполнения операций дифференцирования, возведения в степень и последующего сравнения коэффициентов при равных степенях  $e^{in\omega t}$ , для определения коэффициентов  $c_n, c_{-n}$  получаем систему нелинейных алгебраических уравнений. Количество уравнений и неизвестных  $c_n, c_{-n}$  в системе равно  $(2N + 1)$ . Дальнейшее численное решение полученной системы при последовательном изменении частоты возбуждения  $\omega$  или любого другого параметра системы, далее, — бифуркационного параметра, и позволяет получить бифуркационную диаграмму. Решение системы уравнений в среде MATLAB, в частности, можно проводить при помощи функции `fsolve`, которая позволяет определять не только действительные, но и комплексные решения, что важно для реализации рассматриваемого алгоритма.

Для того, чтобы обеспечить, по возможности, нахождение всех решений системы уравнений, в области поиска генерируется множество равномерно расположенных пробных точек  $ЛПТ$ -последовательности [2] для первого значения бифуркационного параметра, которые принимаются в качестве начальных при решении системы. Далее, полученные решения принимаются в качестве начальных для следующего значения бифуркационного параметра и т.д. Идентификация режимов производится в соответствии с их исходящими начальными точками начального значения бифуркационного параметра. Момент бифуркации решений устанавливается путем контроля смены знака якобиана решаемой системы уравнений. Чтобы определить возникающие в момент бифуркации новые режимы, для значения параметра, после которого происходит бифуркация, производится повторное решение системы уравнений с генерацией пробных точек в области поиска решений. Для новых режимов производится повторение процесса построения бифуркационных кривых в направлении увеличения и уменьшения параметра. После сканирования всего заданного диапазона производится вывод зависимостей амплитуд гармонических составляющих от бифуркационного параметра на общий график.

Изложенный алгоритм сохраняется и в том случае, когда система (1) автономна или при исследовании субгармонических режимов движений, с тем единственным отличием, что в разложении (2), в этом случае, необходимо положить  $\omega := \omega/n$ , где  $1:n$  — порядок резонанса. В программе такая возможность обеспечивается с помощью специального управляющего параметра.

### **3. Особенности программы**

К настоящему времени в среде MATLAB нами разработана программа, реализующая описанную процедуру. Алгоритм предполагает предварительное преобразование исходного дифференциального уравнения к системе нелинейных алгебраических уравнений с комплексными неизвестными. Такое преобразование представляет комплекс аналитических операций, которые не просто осуществить программно. Поэтому, в текущей реализации алгоритма предполагается выполнять ввод предварительно подготовленной системы конечных уравнений и такой ввод удастся проводить в сжатом виде. Это обеспечивает возможность с помощью специальных операций ограничиться описанием минимального числа уравнений. В программе используются три такие операции.

1. Копирование уравнений. Перед уравнением, которое необходимо копировать в системе, необходимо указать символ «#» и сразу после, — диапазон изменения переменной-счетчика в форме записи интервала цикла в MATLAB. Счетчик изменяет свое значение в заданном диапазоне, и для каждого его значения будет сгенерировано одно уравнение. Количество всех сгенерированных уравнений равно количеству

элементов в заданном диапазоне. Переменную-счетчик можно использовать как параметр при описании уравнения. Число учитываемых гармоник  $N$  необходимо указывать при помощи аргумента « $\$n$ », значение которого можно изменять в настройках программы. После заданного диапазона должен следовать символ «|» и само уравнение.

2. Суммирование. Обозначается ключевым словом « $\$sum\{\dots\}$ ». В фигурных скобках указывается диапазон суммирования, далее, следует разделитель «|» и выражение, соответствующее выражению под знаком суммы.

3. Условие. Обозначается ключевым словом « $\$cond\{\dots\}$ ». В фигурных скобках указывается, непосредственно, само условие в форме записи условий в MATLAB (например так, как это делается для оператора if), далее символ « $\Rightarrow$ » и выражение, которое выполняется, если указанное условие истинно. Далее, можно указать второе условие, отделив его от предыдущего символом «\» и т.д. Если в конце последовательности таких условий с их выражениями не указано само условие, а только выражение, то оно выполняется в случае невыполнения предыдущих условий, что является аналогом оператора иначе (else).

Операция « $\$sum$ » поддерживает любую вложенность, в том числе, можно вложить и условие. Однако, операция « $\$cond$ » не поддерживает вложенные условия, но поддерживает вложенное суммирование без операций « $\$cond$ ».

В качестве примера формирования системы алгебраических уравнений, рассмотрим уравнение с характеристикой Дуффинга

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 + \delta x^3 = P \sin \omega t \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), выполняя необходимые преобразования и приравнивая коэффициенты при равных степенях  $e^{i\omega t}$ , получаем следующую систему уравнений

$$(\omega_0^2 + i b n \omega - n^2 \omega^2) c_n + \gamma \left( \sum_{k=-N}^N c_k c_{n-k} \right) + \delta \left( \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} i n P, & n = -1, 1 \\ 0, & n \neq -1, 1 \end{cases} \quad (4)$$

где  $n$  — переменная-счетчик,  $n, n-k, n-k-m \in [-N, N]$ .

Система (4) не зависит от конкретного количества гармоник, что позволяет, задав значение  $N$ , учитывать любое число гармоник в разложении (2). Используя операции, описанные выше, можно один раз ввести систему (4) и изменяя в настройках значение  $N$ , проводить построение бифуркационных диаграмм, учитывающих различное количество гармоник. Подготовленная для ввода сжатая, таким образом, система уравнений (4) будет иметь следующий вид

```
# n = -$n : $n |
(omega0^2 + i * b * n * w - n^2 * w^2) * $c(n) + gamma *
$sum{k = -$n : $n |
  $cond{((n - k) >= -$n) && ((n - k) <= $n) => $c(k) * $c(n - k) \ 0}
} + delta *
$sum{k = -$n : $n |
  $sum{m = -$n : $n |
    $cond{((n - k - m) >= -$n) && ((n - k - m) <= $n) =>
      $c(k) * $c(m) * $c(n - k - m) \ 0
    }
  }
} - $cond{(n == -1) || (n == 1) => -0.5 * i * n * p \ 0}
```

В настройках программы, кроме количества учитываемых гармоник, указывается диапазон изменения бифуркационной переменной, предусмотрена также возможность выбора метода генерации начальных точек (случайно-распределенная или

ПП<sub>τ</sub>-последовательность), их количество и область поиска решений в виде  $n$ -мерного параллелепипеда. Дополнительно программа предусматривает возможность начинать построение с некоторого заданного значения бифуркационного параметра, что позволяет определять режимы, соответствующие изолированным участкам [3], которые, по тем или иным причинам, не были получены при непрерывном построении бифуркационных кривых.

На рис. 1 представлены диалоговое окно программы и пример построения амплитудно-частотной характеристики, включающей пять гармоник, путем решения системы уравнений (4), соответствующей настройке параметров системы и опций работы приложения.

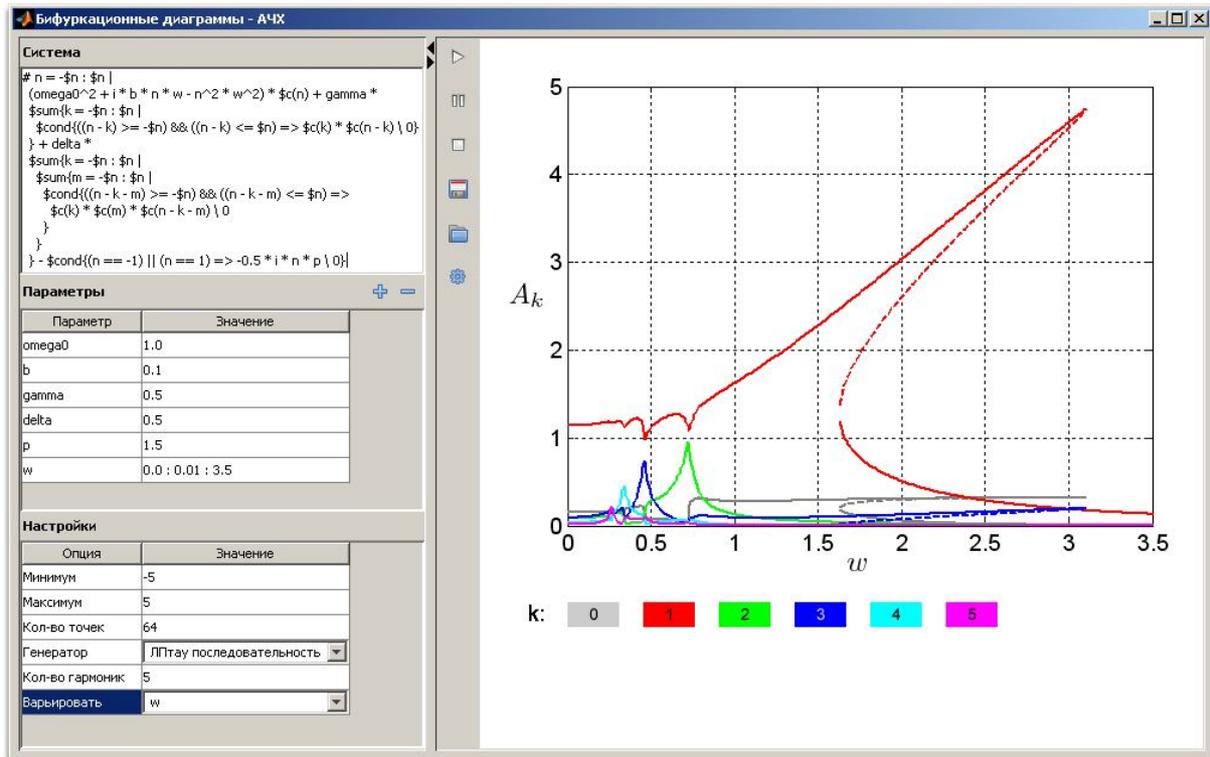


Рис. 1. Построение амплитудно-частотных характеристик для уравнения (3)

#### 4. Вычислительные эксперименты

Для демонстрации предложенного подхода и его реализации в среде MATLAB, рассмотрим принципиальные схемы вибромашин одномассной схемы с кинематическим или дебалансным возбудителем и ограничимся построением бифуркационных диаграмм при изменении частоты возбуждения или, другими словами, амплитудно- и фазочастотных характеристик. Динамика таких вибромашин, с достаточной для практики точностью, описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка [4, 5]. Предполагая кубический характер восстанавливающей силы и ограничиваясь учетом лишь сил сопротивления в упругих связях [5, 6] представим его в безразмерной форме в следующем виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \mu \omega_0 (1 + \beta \xi + \gamma \xi^2) \frac{d\xi}{d\tau} + (1 + \beta \xi + \gamma \xi^2) \xi = P \cos \eta \tau, \quad (5)$$

где  $\xi = x/\Delta$ ,  $x$  — перемещение рабочего органа,  $\Delta = 10^{-3}$  м,  $\mu$  — коэффициент неупругих сопротивлений,  $\omega_0$  — собственная частота,  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры упругой

характеристики,  $P$  — безразмерная амплитуда внешней силы,  $\eta = \omega/\omega_0$ ,  $\omega$  — частота возбуждения,  $\tau = \omega_0 t$ .

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$\xi(\tau) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\eta\tau}, \quad (6)$$

где  $N$  — число учитываемых гармоник разложения решения в ряд Фурье. После подстановки (6) в (5) и сравнения коэффициентов при равных степенях  $e^{in\eta\tau}$ , для определения коэффициентов  $c_n$ ,  $c_{-n}$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (1 + i\mu\omega_0 n \frac{1}{q} \eta - n^2 \frac{1}{q^2} \eta^2) c_n + \beta \sum_{k=-N}^N c_k c_{n-k} (1 + i\mu\omega_0 (n-k) \frac{1}{q} \eta) + \\ + \gamma \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m} (1 + i\mu\omega_0 (n-k-m) \frac{1}{q} \eta) = \begin{cases} P/2, & n = \pm q \\ 0, & n \neq \pm q \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

где  $n, n-k, n-k-m \in [-N, N]$ . Если управляющий параметр  $q=1$ , то программа производит анализ режимов периода  $T$ , т.е. основного и супергармонических ( $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ ), если же  $q=2, 3, \dots$  — то субгармонических режимов ( $A_0, A_{1/q}, A_{2/q}, A_{3/q}, \dots$ ) порядка  $1:q$ .

Расчеты были проведены для значений параметров  $\mu\omega_0 = 0.1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $P = 10$  и варьировании безразмерной частоты возбуждения  $\eta$ .

На рис. 2 показаны амплитудно- и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) периодических движений в зонах возбуждения супергармонических резонансов порядков 5:1, 3:1 и 2:1, а также, субгармонического порядка 1:3. Предполагалось, что тригонометрический вид ряда Фурье следующий

$$\sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t - \varphi_k),$$

где  $\varphi_k \in [-\pi, \pi)$ . При выполнении расчетов учитывались лишь пять гармонических составляющих в разложениях (6), что повлекло необходимость решать систему (7), содержащую одиннадцать уравнений. Это потребовало существенных затрат машинного времени и при изменении частоты возбуждения  $\eta$  с шагом равным 0.001 в диапазоне  $\eta \in [0, 6]$ , общее время на построение диаграмм, на компьютере с процессором Intel Pentium 4 3.2 ГГц и оперативной памятью объёмом 3 Гб, составило 13120 сек. Отметим, что изолированные участки на диаграммах, соответствующие субрезонансам порядка 1:3, пропущенные при сканировании всего частотного диапазона, были получены при повторном построении, начав с частоты  $\eta = 4$ , что предусмотрено возможностями программы.

Анализируя полученные результаты можно отметить некоторые особенности возбуждения комбинационных резонансов не описанные в известной авторам литературе. Так, например, для субрезонансов порядка 1:3 характерно наличие трех пар субгармонических режимов. Режимы каждой группы (устойчивые, — сплошная линия, неустойчивые, — пунктирная) отличаются лишь сдвигом фаз составляющих гармоник и совпадают при параллельном переносе, т.е.  $\xi(\tau) = \xi(\tau - s)$ . Дополнительные аналитические соображения позволяют эти особенности обобщить. Сравнивая спектральный состав колебаний в различных частотных диапазонах можно отметить более широкую полигармоничность супергармонических режимов и «естественное» их возбуждение путем изменения частоты возмущения.

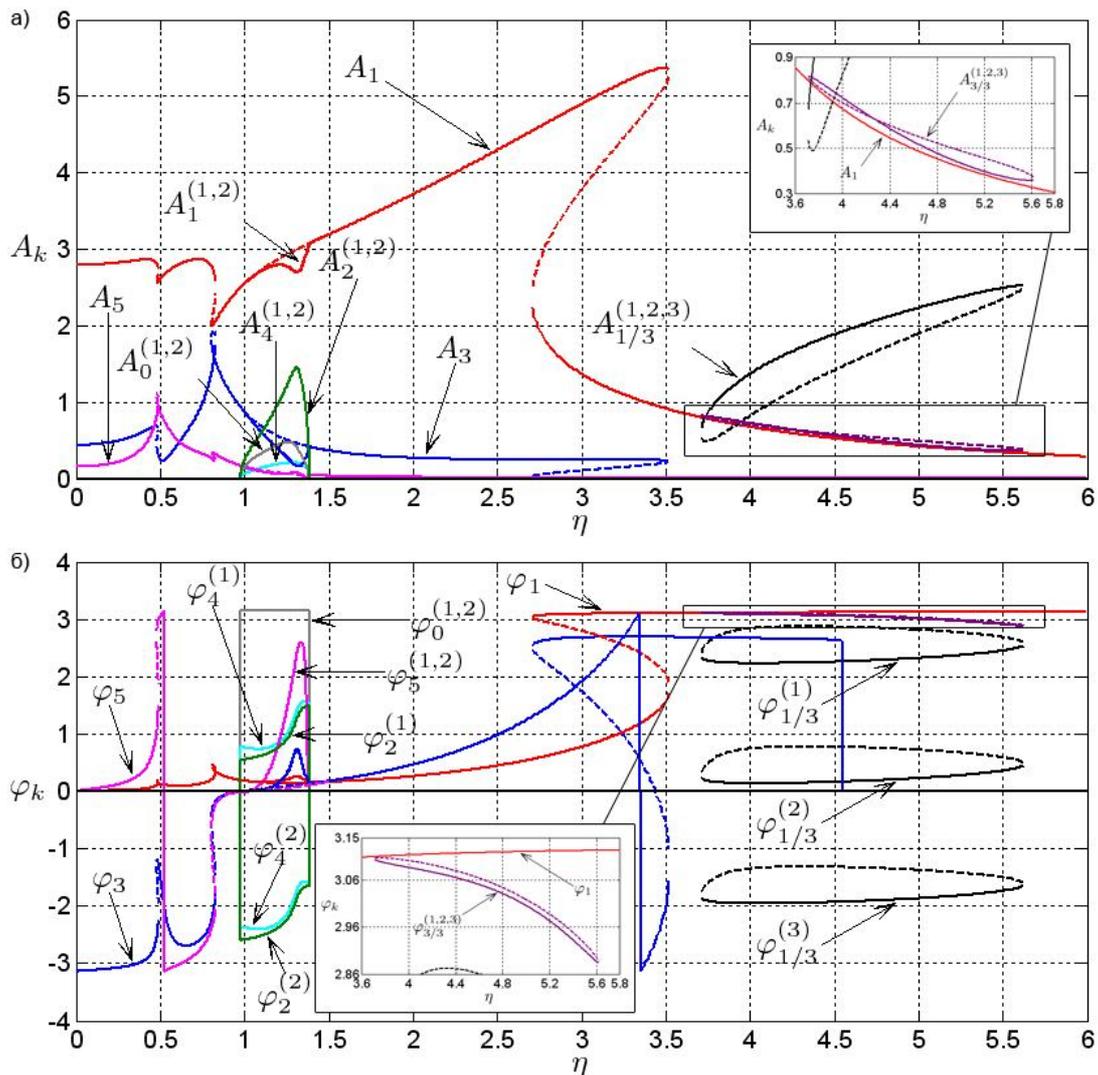


Рис. 2. АЧХ (а) и ФЧХ (б) для (5), где  $A_k^{(r)}$ ,  $\varphi_k^{(r)}$  — амплитуда и начальная фаза  $k$ -ой гармоники  $r$ -ого режима

В заключение отметим, что аналогичные диаграммы могут быть получены и при изменении любого другого параметра системы.

## 5. Заключение

Представленные результаты, на наш взгляд, демонстрируют работоспособность описанного подхода, заметную ресурсоемкость расчетов и высокую детализацию диаграмм, что дает возможность получения полезных заключений, как с теоретической, так и с практической точек зрения. К числу достоинств, также, можно отнести широкую информативность, которая выражается в одновременном контроле поведения практически значимого числа гармонических составляющих, к числу недостатков, — некоторые пропуски, которые были отмечены при построении. Несмотря на эти недоразумения, следует отметить, что резервы в совершенствовании, оптимизации и повышении уровня автоматизации алгоритма, реализующего данный подход, пока не исчерпаны.

## *Литература*

1. Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos // John Wiley & Sons England. 2002. 458 p.
2. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями // М.: Наука. 1981. 110 с.
3. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана // М.: Машиностроение. 1979. С. 28–30.
4. *Крюков Б.И.* Динамика вибрационных машин резонансного типа // К: Наукова думка. 1967. 212 с.
5. *Аснер В.И., Каминский В.С., Клочко Г.П. и др.* Конструкции и расчеты фильтрующих центрифуг. М.: Недра. 1976. 216 с.
6. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. // М.: Машиностроение. 1981. 509 с.