

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ-ДУФФИНГА В ЗОНЕ ГЛАВНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

*Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.
Донецкий национальный технический университет, Донецк,
e-mail: belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua*

1. Введение

Пожалуй, с работ В.В.Болотина [1], при анализе стационарных колебаний нелинейных систем с параметрическим возбуждением внутри зон неустойчивости исходившего из характера колебаний на их границах, принято считать, что в зоне главного параметрического резонанса происходит деление частоты возбуждения в два раза. Не изменили этих представлений, по крайней мере, для малых значений параметров системы и более позднее открытие в таких системах хаотических движений. Однако исследования, выполненные первоначально на аналоговых вычислительных машинах, для систем с кусочно-линейными упругими характеристиками [2] и, позднее, — полиномиальными [3], показали возможность существования в этих зонах колебаний с частотой равной частоте параметрического возбуждения. Ниже излагаются отдельные результаты этих исследований, вскрывается механизм возбуждения таких колебаний, далее, условно называемых «нетрадиционными».

2. Изучаемое уравнение, метод его решения

Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + b \dot{x} + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos \omega t)x + \delta x^3 = 0. \quad (1)$$

Его решение проводится методом гармонического баланса и ищется в виде

$$x_{an} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_1 t}, \quad (2)$$

где связь коэффициентов c_n с коэффициентами a_n , b_n тригонометрического разложения решения в ряд Фурье описывается соотношениями

$$c_n = \frac{a_n + i b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n - i b_n}{2i}.$$

Подставив (2) в (1) получим

$$\sum_{p=-N}^N (\omega_0^2 + i b p \omega_1 - p^2 \omega_1^2) c_p e^{ip\omega_1 t} - \mu \omega_0^2 \sum_{p=-N}^N c_p e^{i(p\omega_1 + \omega)t} - \mu \omega_0^2 \sum_{p=-N}^N c_p e^{i(p\omega_1 - \omega)t} + \delta \sum_{p=-3N}^{3N} \left(\sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k c_{p-n-k} \right) e^{ip\omega_1 t} = 0, \quad (3)$$

где $-N \leq p - n - k \leq N$.

Значение частоты ω_1 основной гармоники назначается исходя из предполагаемого

характера исследуемого режима, после чего, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\omega_1 t}$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов разложения c_n .

3. Основной резонанс, «нетрадиционные» решения

Ориентируясь на середину главной зоны неустойчивости, положим в соотношении (3) $\omega = 2\omega_0$, а основную частоту ω_1 изучаемых движений будем считать равной частоте параметрического возбуждения, т.е. $\omega_1 = \omega$. Тогда, приравнявая коэффициенты для определения c_n , получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{4} - i b N \omega - N^2 \omega \right) c_N - \frac{\mu \omega^2}{4} c_{N-1} + \delta \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k c_{N-n-k} = 0, \\ \left(\frac{\omega^2}{4} - i b p \omega - p^2 \omega \right) c_p - \frac{\mu \omega^2}{4} c_{p-1} - \frac{\mu \omega^2}{4} c_{p+1} + \delta \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k c_{p-n-k} = 0, \\ p = -N+1, \quad N-1, \\ \left(\frac{\omega^2}{4} + i b N \omega - N^2 \omega \right) c_{-N} - \frac{\mu \omega^2}{4} c_{-N+1} + \delta \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k c_{-N-n-k} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

суммирование здесь проводится по индексам

$$-N \leq N-n-k, \quad p-n-k, \quad -N-n-k \leq N.$$

Её решение при значениях параметров $b = 0,001$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 2$, $\delta = 1/3$ и числе первоначально учитываемых гармоник в искомом решении $N = 1$ дало две пары противоположных решений. В обычной тригонометрической форме они имеют вид

$$\begin{aligned} x_{an.1,2} &= \pm(0,1478 + 3,4662 \cos(2t - 0,0783)), \\ x_{an.3,4} &= \pm(0,0116 + 3,4641 \cos(2t - 1,4927)). \end{aligned}$$

Существование первой пары режимов подтвердилось и при контрольном численном интегрировании непосредственно уравнения (1), существование второй пары численного подтверждения не получило. Последующий расчет мультипликаторов $\rho_{1,2}$ системы в вариациях, соответствующей второй паре решений показал, что $\rho_{1,2} = 0,8167 \pm 0,5759i$, т.е. $|\rho_{1,2}| = 0,9987 < 1$ и являются устойчивыми.

Для преодоления возникшего противоречия и повышения точности нахождения второй пары приближенных решений были проведены повторные расчеты с увеличенным числом учитываемых гармоник N в разложениях (2). Так, при $N = 10$ было получено, что

$$\begin{aligned} x_{an.3,4} &= \pm(0,00884 + 0,19389 \cos 2t + 3,39108 \sin 2t - 0,01156 \cos 4t - 0,10594 \sin 4t - \\ &\quad - 0,01887 \cos 6t - 0,10917 \sin 6t + 0,00142 \cos 8t + 0,00612 \sin 8t + \\ &\quad + 0,00096 \cos 10t + 0,00327 \sin 10t - 0,00010 \cos 12t - 0,00028 \sin 12t - \\ &\quad - 0,00004 \cos 14t - 0,00009 \sin 14t + 0,00001 \cos 16t + 0,00001 \sin 16t), \end{aligned}$$

и свидетельствует о существенном уточнении отдельных гармонических составляющих. Расчет мультипликаторов для уточнённых решений показал, что уже при $N = 3$, например, значения $\rho_{1,2} = 1,3250; 0,7538$, а при $N = 10$, — $\rho_{1,2} = 1,3510; 0,7394$, т.е. решения являются неустойчивыми. На рис. 1 показано расположение мультипликаторов относительно единичной окружности, сравнительный

анализ аналитических и численных результатов проиллюстрирован на рис. 2. Это позволяет сформулировать следующий, уже согласованный с контрольными расчетами, результат: при отдельных параметрах системы в зоне главного параметрического резонанса возможно существование стационарных колебаний с периодом равным периоду возбуждения, в данном случае, — двух устойчивых и двух неустойчивых.

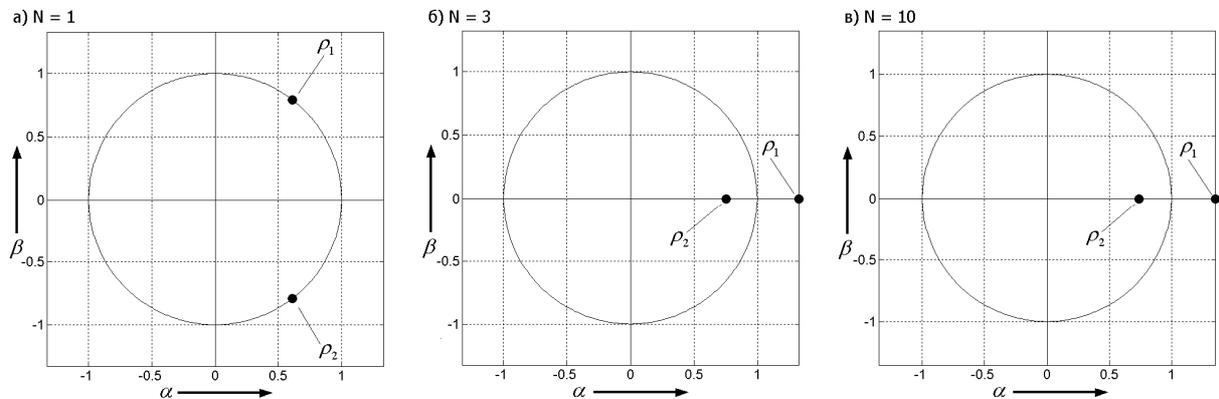


Рис. 1. Мультипликаторы $\rho = \alpha \pm i\beta$, соответствующие второй паре режимов

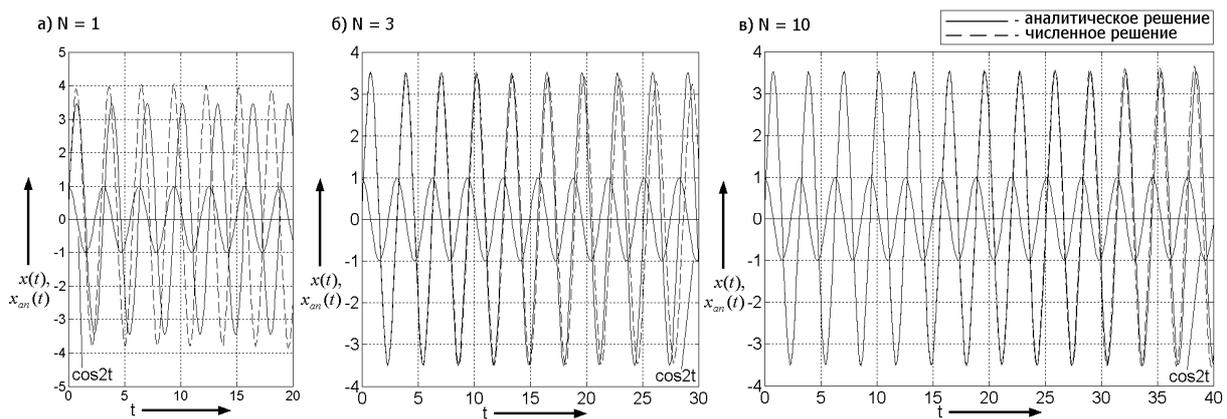


Рис. 2. К анализу соответствия численного $x(t)$ и аналитического $x_{an}(t)$ решений

4. Особенности возбуждения «нетрадиционных» колебаний

Известно [4], что для уравнения Матье области неустойчивости тривиального решения на плоскости (μ, ω) представляют собой клиновидные зоны и, при отсутствии сопротивления, примыкают к частотам $\omega = 2\omega_0/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, а на границах чётных областей период колебаний совпадает с периодом возбуждения. Известно также, что в нелинейных, в частности, жестких системах, амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) наклонены в сторону больших частот. Поэтому, с целью выяснения механизма возбуждения обнаруженных решений для первых двух параметрических резонансов было проведено построение АЧХ, соответствующих этим зонам, основных режимов.

Системы уравнений для определения c_n формируются на основании (3), при этом для главного параметрического резонанса полагается $\omega_1 = \omega/2$, для побочного, — $\omega_1 = \omega$. АЧХ первых гармоник, т.е. зависимости $A_1 = A_1(\omega)$, где $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 2\sqrt{c_1 c_{-1}}$, приводятся на рис. 3. Они ясно свидетельствуют, что наличие

«нетрадиционных» колебаний в главной зоне неустойчивости можно рассматривать, как результат затягивания стационарных колебаний, самовозбуждающихся в побочной зоне, т.е. обусловлены, другими словами, наложением зоны затягивания на зону главного параметрического резонанса.

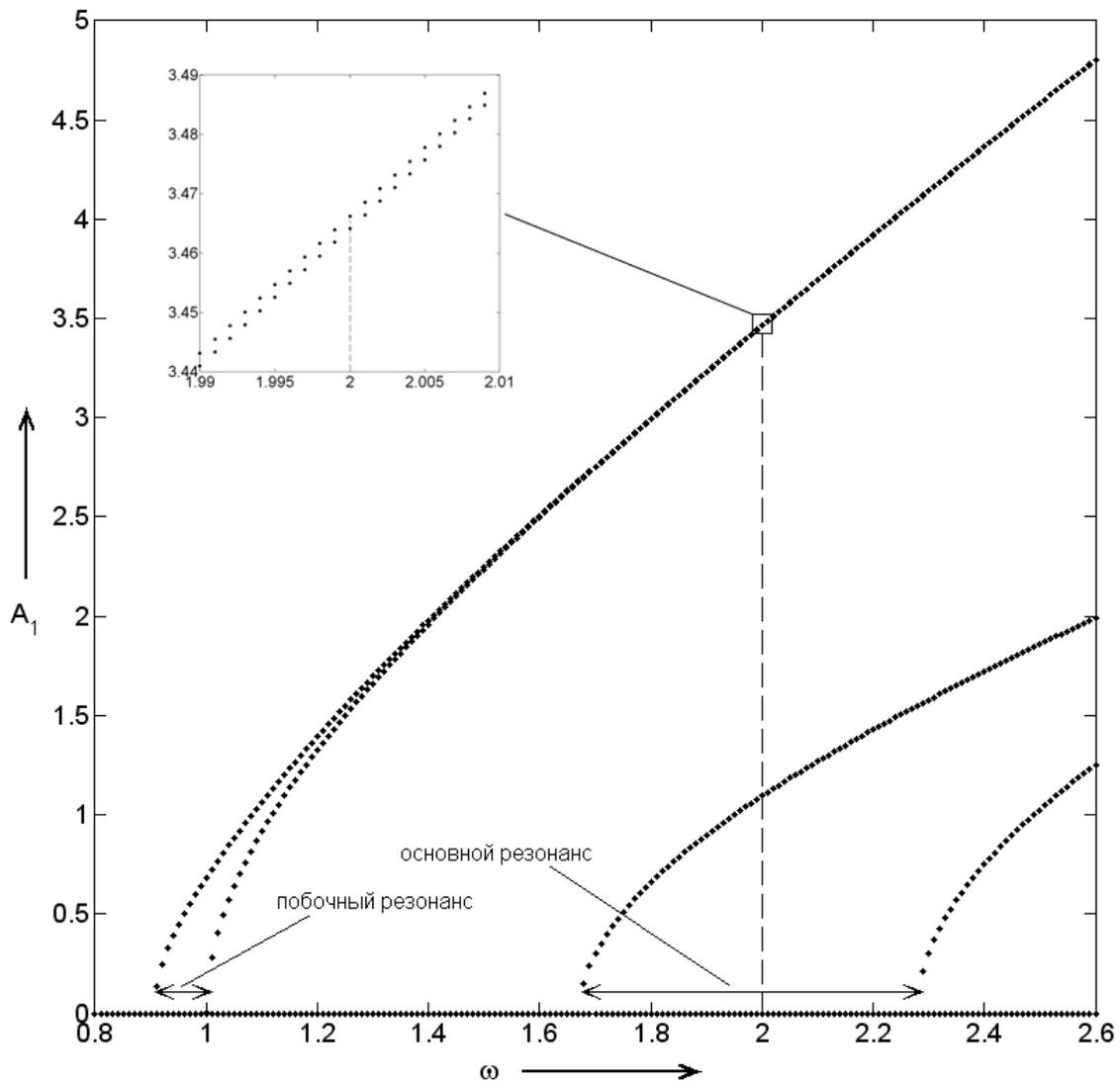


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики стационарных колебаний, соответствующих двум первым резонансам

5. Заключение

Изложенные результаты расширяют, в целом, наши представления о поведении систем с параметрическим возбуждением. Однако, вскрытый механизм возбуждения, основанный на явлении затягивания, свойственного нелинейным системам, делают такого рода колебания естественными и при малом уровне сопротивления, — вполне предсказуемыми.

Исследование выполнено с использованием программы AnalySys [5], создаваемой как приложение MATLAB для анализа нелинейных динамических систем.

Литература

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
2. V.N. Belovodsky, S.L. Tsyfansky, V.I. Beresnevich *The Dynamics of a Vibromachine with Parametric Excitation.* — *Journal of Sound and Vibration* (2002), 254(5), 897–910.
3. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. «Нетрадиционные» решения уравнения Матье-Дуффинга: существование и устойчивость. — Труды ИПММ НАН Украины, т. 14, Донецк, 2007. — с. 8–13
4. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Т. 1. Колебания линейных систем. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.
5. Беловодский В. Н., Сухоруков М.Ю. "AnalySys" — пакет численного анализа динамических систем. — Труды Всероссийской научной конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». — СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2007. — с. 626–634.