

Особенности численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Наводятся результаты численного анализа нелинейной динамической системы с параметрическим возбуждением методами Рунге-Кутты и Адамса. Вивчаються особливості чисельних рішень за різних початкових умов. Аналізуються відмінності чисельних рішень, формулюються рекомендації.

Изучая методы приближенных вычислений, мы привыкаем к мысли о том, что результаты численного анализа, например, дифференциального уравнения, по разным причинам (неустойчивость исследуемого решения, расходимость поля фазовых траекторий, накопление ошибок и т.д.) могут сколь угодно отличаться от точного решения. Тем не менее, факты существенных количественных и качественных различий результатов анализа сравнительно простых динамических систем различными методами вызывают особое внимание. Они подрывают подсознательную уверенность в окончательности результатов, получаемых с использованием известных пакетов прикладных программ, и поднимают проблемы адекватности получаемых решений.

Ниже на примере дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x = -F(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где

$$F = f(x) + \beta \dot{x} + \mu \cos t \cdot x + \zeta x,$$

$$f(x) = \frac{1}{2} k \{ (x - \Delta) + |x - \Delta| + (x + 1) - |x + 1| \},$$

обсуждаются вопросы, возникающие при численном моделировании, и на основе специальных вычислительных экспериментов предпринимается попытка ответить на некоторые из них.

Рассматриваемое уравнение относится к классу кусочно-линейных систем с периодическими коэффициентами и в первом приближении описывает динамику вибрационного механизма с параметрическим возбуждением колебаний [1]. Затронутая проблема состоит в следующем. При анализе периодических режимов данного уравнения с использованием пакета Matlab для значений параметров $\beta = 0.02$, $\mu = 0.12$, $\zeta = -0.75$, $k = 1.553$, $\Delta = 4$ при отдельных наборах начальных условий различные решатели пакета давали взаимно исключающие результаты. Так, например, для начальных условий $x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = 1.75$ согласно решателя ode45, реализующего методы Рунге-Кутты 4-5-го порядков точности, период стационарных колебаний системы равен $2T$, где $T = 2\pi$, – период параметрического возбуждения, а полуразмах, – 6.25, то согласно решателя ode113, реализующего экстраполяционный метод Адамса-Башворта-Мултона [2], период стационарных колебаний равен T , а полуразмах, – 1.25 (Рисунок 1). Разделились “точки зрения” и двух других решателей, – ode23t и ode15s, реализующих метод трапеций и многошаговый метод переменного порядка, соответственно. Число расчетных точек на промежутке величиной T задавалось равным 60, что, как показывает накопленный опыт, обычно, вполне достаточно для получения качественно верных результатов при анализе таких систем.

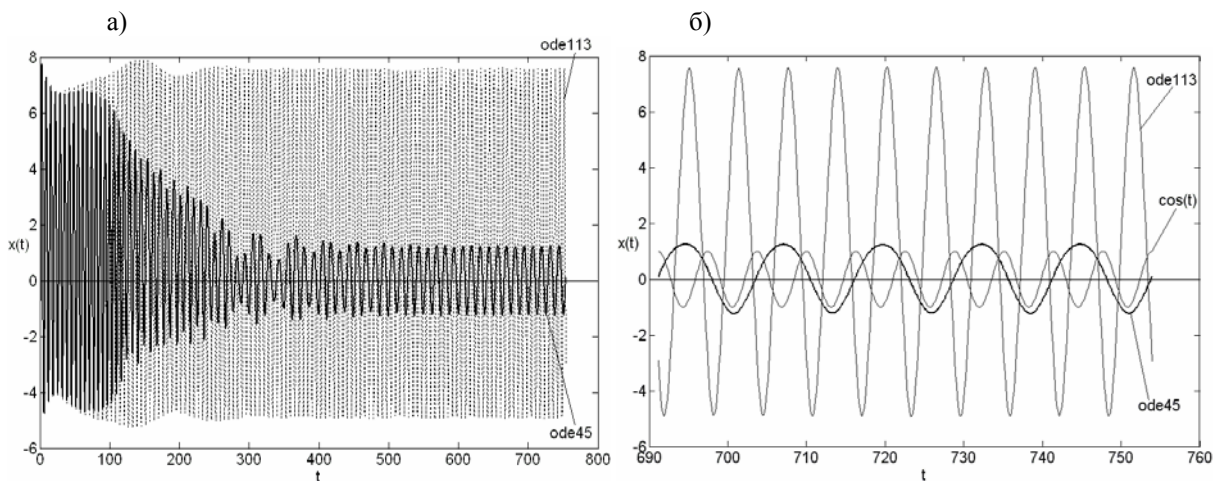


Рисунок 1 – Решения уравнения (1), даваемые решателями ode45, ode113 при $x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = 1.75$: а) на промежутке $t \in [0, 120T]$; б) на стационарном промежутке $t \in [90T, 120T]$

В этой связи возникают естественные вопросы о причинах таких различий и адекватности получаемых решений поведению системы.

На первый взгляд представляется очевидным, что метод Рунге-Кутты должен давать более достоверные результаты. Действительно, по сравнению с многошаговыми методами, при прочих равных условиях, он использует информацию, сосредоточенную на одном шаге и поэтому у него больше возможностей адекватно отслеживать поведение системы. Однако необходимо учесть, что при малых шагах интегрирования в суммарной погрешности одношаговых методов [3], как впрочем и многошаговых, доминирующей становится вычислительная погрешность, которая вносит свои коррективы в априорные представления. Поэтому, обычно, рекомендуется “нащупать” баланс путем изменения шага интегрирования и выбрать его оптимальное значение. Однако в пакете Matlab шаг интегрирования удается варьировать лишь косвенным образом, а именно, – путем изменения числа расчетных точек или погрешности численного решения. Обе эти возможности были апробированы, результаты соответствующих численных экспериментов приведены в Таблицах 1,2.

В Таблице 1 при фиксированных, и задаваемых по умолчанию, значениях относительной δ и абсолютной ε погрешностей интегрирования (в пакете Matlab они обозначены через RelTol и AbsTol, соответственно) изменялось число расчетных точек NP на промежутке величиной T . Варьирование NP проводилось в промежутке $[10, 300]$ с шагом 10. Отрезок интегрирования уравнения (1) с вышеуказанными начальными условиями в каждом случае составлял $120T$, классификация режимов проводилась относительно периода T возбуждения системы.

Таблица 1 – Результаты варьирования числа расчетных точек

Метод	Подпрограмма пакета Matlab	Количество расчетных точек										
		10-140	150-160	170	180-200	210	220-230	240	250-260	270	280-290	300
Рунге-Кутта	ode45	2T	T	2T	T	2T	T	2T	T	2T	T	2T
Адамса	ode113	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Результаты Таблицы 2 получены при неизменном числе расчетных точек ($NP = 60$), но изменялась относительная погрешность δ , при задаваемой по умолчанию абсолютной $\varepsilon = 10^{-6}$ или, наоборот, – абсолютная ε , при задаваемой по умолчанию относительной $\delta = 10^{-3}$. Изменение значений δ и ε проводилось с использованием оператора options. Выделенные строки в Таблице 2 соответствуют значениям δ и ε , задаваемым по умолчанию. Величины A^+ и A^- представляют собой наибольшие и наименьшие отклонения системы на стационарном участке, т.е. $A^+ = \max_{[90T, 120T]} x(t)$, $A^- = \min_{[90T, 120T]} x(t)$. При классификации режимов различия экстремальных значений $x(t)$ не превышающие 10% не учитывались. Если период таких “стационарных” колебаний превышал $8T$, то этот факт в Таблице 2 условно обозначен символом ∞ .

Таблица 2 – Результаты варьирования абсолютной и относительной погрешностей

Метод	δ	ε	Режим	A^+	A^-
Рунге-Кутта (ode45)	0.1	1e-006	8T	1.7407	-1.6001
	0.01		2T	1.2412	-1.2416
	0.001		2T	1.2621	-1.2539
	0.0001		6T	1.4335	-1.3201
	1e-005		2T	1.3012	-1.2859
	1e-006		2T	1.2661	-1.2507
	1e-007		6T	1.2962	-1.2608
	0.001		0.1	∞	2.4002
		0.01	∞	1.4336	-1.4252
		0.001	2T	1.2704	-1.2474
		0.0001	2T	1.2621	-1.2539

		1e-005	2T	1.2621	-1.2539
		1e-006	2T	1.2621	-1.2539
		1e-007	2T	1.2621	-1.2539
Адамса (ode113)	0.1	1e-006	∞	1.6190	-1.4608
	0.01		2T	1.2772	-1.2734
	0.001		T	7.6167	-4.9273
	0.0001		6T	1.3176	-1.2893
	1e-005		2T	1.2629	-1.2634
	1e-006		2T	1.2930	-1.2783
	1e-007		6T	1.3217	-1.3228
	0.001	0.1	∞	3.1013	-2.0439
		0.01	6T	1.4188	-1.3603
		0.001	T	7.6879	-5.0045
		0.0001	2T	1.2568	-1.2504
		1e-005	T	7.6289	-4.9554
		1e-006	T	7.6167	-4.9273
		1e-007	T	7.6167	-4.9273

Представленная информация иллюстрирует стабильность результатов решателя ode113 при изменении NP (Таблица 1). В то же время при изменении погрешностей интегрирования более устойчиво ведет себя решатель ode45, который в достаточно широком диапазоне изменения $\delta \in [0.01, 0.001]$ и $\varepsilon \in [10^{-5}, 10^{-7}]$ демонстрирует одинаковый результат. Решатель ode113 наличия таких участков стабильности не имеет. В целом, отсутствие одинаковых тенденций при изменении варьируемых параметров не дает оснований для вынесения определенных суждений о достоверности полученных численных решений. По-видимому, заключение об истинном движении системы исключительно средствами численного анализа сделано быть не может и для этих целей необходимо привлечение методик, основанных не на разностных, а на иных, возможно аналитических, соображениях. Одна из них, успешно зарекомендовавшая себя при анализе кусочно-линейных систем с силовым возбуждением, состоит в припасовывании решений [4]. Она заключается в построении решений на линейных участках упругой характеристики, в данном случае соответствующий математический аппарат дается теорией Флоке-Ляпунова [5], и сведения задачи интегрирования дифференциального уравнения к нахождению точек переключения решений. Однако это уже тема для отдельного разговора.

С целью поиска возможных причин описанных различий численных решений решателей ode45 и ode113 было проведено построение сечения ($t = 0$) областей притяжения T - и $2T$ -периодических режимов уравнения (1). На Рисунке 2 точками отмечены наборы начальных условий, соответствующие T -периодическому режиму. Построение проводилось путем сканирования начальных условий $x(0)$, $\dot{x}(0)$ с шагом 0.25 по каждой из фазовых координат и последующего интегрирования уравнения (1) решателем ode45. Оказалось, что исследуемая точка $x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = 1.75$ расположена вблизи границы области притяжения, что наталкивает на следующую мысль. В какой-то момент времени структура сечения областей притяжения становится достаточно тонкой и при малых, но разных по знаку погрешностей численных решений решателей ode45 и ode113 соответствующие фазовые точки оказываются в зонах притяжения различных периодических режимов. После чего, через соответствующий переходной процесс фазовые траектории численных решений ode45, ode113 притягиваются к различным периодическим аттракторам. Если эта гипотеза имеет под собой какие-либо основания, то различные результаты решателей ode45 и ode113 следует ожидать и в других приграничных точках, и наоборот, во внутренних, – следует ожидать согласующихся результатов.

Для проверки высказанного предположения в окрестности исследуемой точки $(-5.0, 1.75)$ и выбранных произвольным образом двух других $(7.5, -5.25)$, $(-2.0, -6.0)$, последняя из которых является внутренней, с шагом 0.03125 было осуществлено сканирование начальных условий и решение уравнения (1) обоими решателями последовательно. Полученные результаты представлены на Рисунке 2 и вынесены из его центральной части. Символом “точка” указан набор начальных точек, входящих в область T -периодичности согласно ode45, символом “круг” – согласно решателя ode113. Показательно, что результаты обоих решателей совпадают для внутренней точки $(-2.0, -6.0)$ и существенно различаются для обоих приграничных. Это дает

основание рассматривать последние, как рискованные, с точки зрения принятия решений, формирующие зону неопределенности системы.

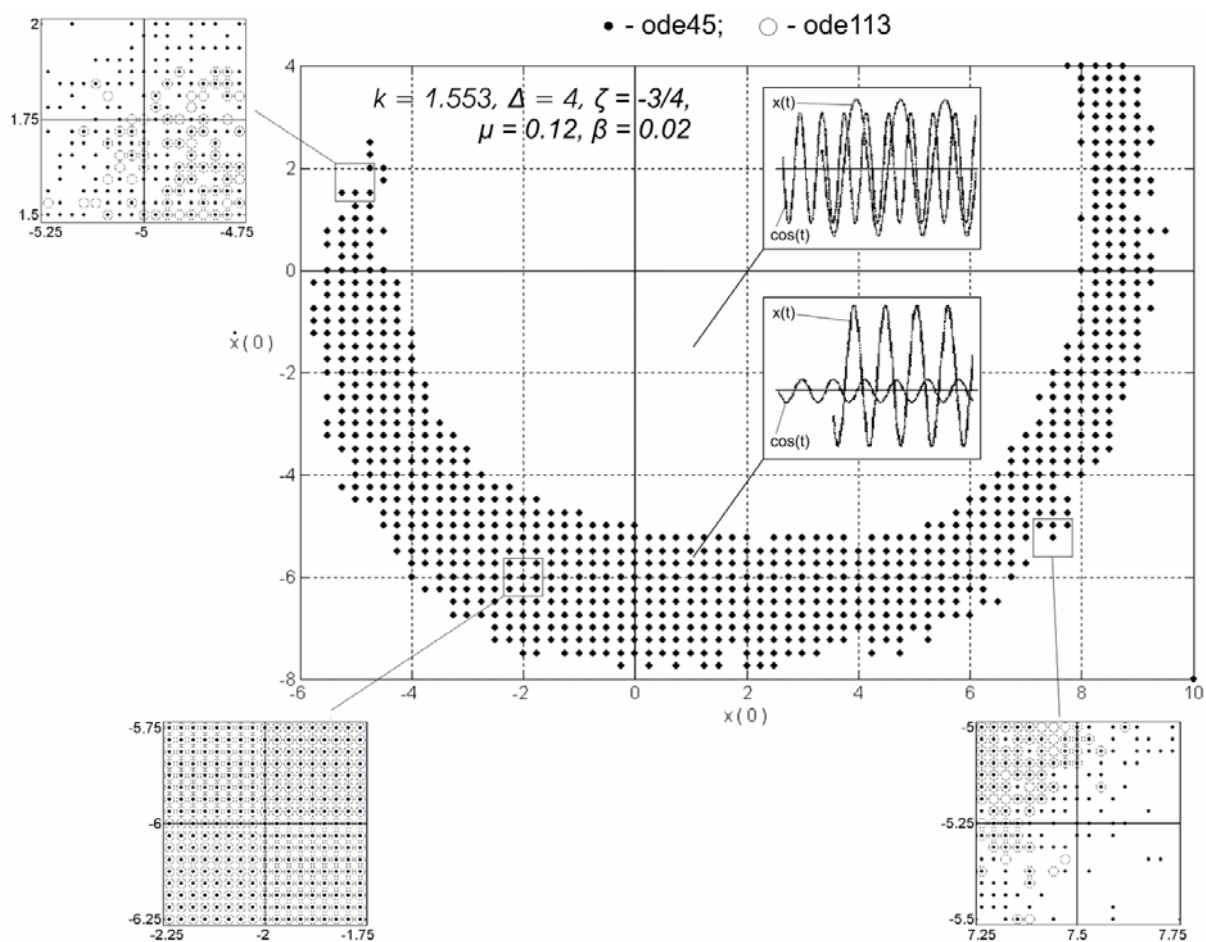


Рисунок 2 – Сечение ($t = 0$) областей притяжения периодических режимов

Какие же выводы можно сделать из проведенного исследования? Пожалуй, основной из них состоит в следующем.

При численном моделировании динамических систем, наряду с традиционно рекомендуемыми мероприятиями, предполагающими использование различных методов, варьирование шага и точности интегрирования, в минимальный объем исследований необходимо включать построение и анализ областей притяжения исследуемых режимов. Представляется целесообразным также приемлемые технические решения выбирать во внутренней ее части с некоторой отстройкой от ее границ, тем самым снижая риск принятия неверных управленческих решений.

Литература

1. Цыфанский С.Л., Береснович В.И., Окс А.Б. Практическое использование нелинейных эффектов в вибрационных машинах / Под. ред. К.М. Рагульскаса. – СПб.: Политехника, 1992. – 95 с.
2. Мартынов Н.Н. Введение в Matlab 6. – М.: Кудиц-Образ, 2002. – 352 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т. 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. Закржевский М.В. Колебания существенно-нелинейных систем. – Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.
5. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.