

## О новых решениях системы Матье-Дуффинга

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.

Донецкий национальный технический университет,

belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

### Abstract

*Belovodskiy V.N., Suhorukov M.I. "On new solutions of the Mathieu-Duffing system" It is described some of new stationary solutions of the Mathieu-Duffing equation in the first principal zone of unstability. The analytic results are verified by numerical simulation.*

*Key words: dynamical system, Mathieu-Duffing equation, stationary solution, numerical analysis.*

### Введение

Поведение нелинейных динамических систем своим многообразием постоянно привлекает внимание исследователей. Открытие сложных (суб- и супергармонических) резонансов в 30-е годы XX века [1] и последовавшее их изучение, сменилось открытием хаотических движений в 60-е годы [2] и интенсивным исследованием их проявлений во вполне детерминированных системах. Обычно, новые явления в нелинейной динамике вскрываются, а затем изучаются, на базе простых характерных моделей, — парадигм. К числу таковых относится и уравнение Матье с полиномиальной нелинейностью, — уравнение Матье-Дуффинга. Пожалуй, не будет большим преувеличением сказать, что редкий номер авторитетного журнала «Nonlinear Dynamics» обходится без публикаций, посвященных различным модификациям этого уравнения. И целью данной работы является изложение результатов исследования вопросов существования некоторых его новых решений.

### Исзуемое уравнение

Ниже рассматривается уравнение вида

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos 2\omega t)x + \delta x^3 = 0. \quad (1)$$

Оно относится к классу динамических систем с гармоническим параметрическим возбуждением и кубической характеристикой восстанавливающей силы. Уравнение (1), очевидно, имеет тривиальное решение, однако при определенных соотношениях между коэффициентами возбуждения  $\mu$  и сопротивления  $\beta$  в определенных частотных диапазонах положение покоя становится неустойчивым и происходит возбуждение параметрических резонансов. В плоскости  $\mu, \frac{\omega_0}{\omega}$  зоны неустойчивости представляют собой клиновидные области. Наиболее широкая из

них, главная, при  $\beta = 0$  примыкает к точке

$\frac{\omega_0}{\omega} = 1$ . Одной из особенностей этих колебаний

является то обстоятельство, что при  $\delta = 0$  их амплитуды нарастают экспоненциально и даже наличия линейного сопротивления недостаточно для их ограничения. По этой причине возбуждение параметрических колебаний в реальных конструкциях может оказаться крайне опасным для их прочности. Так, например, ряд исследователей [3] результаты знаменитой катастрофы Такомакского моста в 1940 году в США объясняют именно эффектом возбуждения изгибно-крутильных параметрических колебаний в его конструкции при периодических изменениях боковой ветровой нагрузки. Однако при наличии плавной нелинейности, в данном случае  $\delta \neq 0$ , параметрические колебания имеют ограниченную амплитуду.

Пожалуй, с работ В.В. Болотина [4], который при анализе колебаний внутри зон неустойчивости исходил из характера этих колебаний на их границах, традиционно считается, что при главном параметрическом резонансе происходит деление частоты возбуждения в два раза и период стационарных колебаний в два раза превышает период возбуждения. И, даже, более поздние открытия хаотических движений в таких системах сохранили прежние представления для малых значений параметров системы. Однако проведенные еще в 80-е годы экспериментальные исследования показали, что это не всегда так [5]. По этим соображениям нами и была предпринята попытка комбинированного численно-аналитического исследования данного вопроса [6].

### Исзуемые решения, порядок исследования, результаты

В качестве аналитических методов исследования были приняты методы усреднения и гармонического баланса и получены, по

существо, идентичные результаты. Так, рассматривая колебания в главной зоне неустойчивости и ориентируясь на её середину, т.е. полагая  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 1$ , а также предполагая моногармонический характер колебаний, решение описывалось в виде

$$x_{an}(t) = A_0 + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t, \quad (2)$$

где в случае гармонического баланса коэффициенты разложения (2) являются постоянными. Заметим, что характер предполагаемого решения отличается от традиционных представлений и его период равен периоду параметрического возбуждения. После подстановки (2) в (1) и выполнения обычных тригонометрических преобразований для определения  $A_0$ ,  $A$ ,  $B$  была получена система уравнений

$$\begin{cases} A_0 - \mu A_1 + \delta \left( A_0^3 + \frac{3}{2} A_0 A_1^2 + \frac{3}{2} A_0 B_1^2 \right) = 0, \\ -3 A_1 + 2 \beta B_1 - 2 \mu A_0 + \delta \left( 3 A_0^2 A_1 + \frac{3}{4} A_1^3 + \frac{3}{4} A_1 B_1^2 \right) = 0, \\ -3 B_1 - 2 \beta A_1 + \delta \left( 3 A_0^2 B_1 + \frac{3}{4} A_1^2 B_1 + \frac{3}{4} B_1^3 \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Её решение проводилось в программной системе Matlab с использованием процедуры solve и при  $\beta = 0,001$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\delta = 1/3$  были получены следующие решения

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm(0,1478 + 3,4556 \cos 2t + 0,2710 \sin 2t), \\ x_{3,4} &= \pm(0,0116 + 0,2703 \cos 2t + 3,4536 \sin 2t). \end{aligned} \quad (4)$$

Апробация результатов (4) проводилась путем непосредственного численного интегрирования уравнения (1). Наличие первой пары решений подтвердилось и при численном моделировании, однако решения  $x_{3,4}$  такого подтверждения не получили. Попытка объяснить данное обстоятельство неустойчивостью этой пары решений и, в силу этого, отсутствием численной наблюдаемости, своего подтверждения также не получила. Выполненный расчет мультипликаторов системы в вариациях, построенной для решений  $x_{3,4}$ , наоборот, показал устойчивость полученных решений, т.к. соответствующий набор мультипликаторов оказался равным  $\rho_{1,2} = 0,8167 \pm 0,5759i$ , т.е.  $|\rho_{1,2}| = 0,9987 < 1$ . Напомним, что согласно теории Флоке-Ляпунова [3] именно отрицательный знак  $\ln|\rho_{3,4}|$  и определяет устойчивость тривиального решения системы с периодическими коэффициентами. Таким образом, сложилось явное противоречие между численным и аналитическими результатами. Перебор процедур решения (решателей ОДУ) из имеющихся в арсенале MATLAB и варьирование их управляющих параметров указанного противоречия не разрешил.

## Дополнительные гипотезы, исследования, результаты

После тщательного анализа полученных результатов удалось сформулировать, на наш взгляд, пожалуй, единственную правдоподобную гипотезу, объясняющую полученное противоречие. Она состояла в следующем: колебания типа  $x_{3,4}$  всё-таки существуют, однако несмотря на практически моногармонический их характер система уравнений (3) для определения коэффициентов  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , составленная исходя из моногармонических представлений, оказывается слишком грубой, в результате чего коэффициенты  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  определяются недостаточно точно и, в силу этого, неадекватным оказывается уравнение в вариациях и, как следствие, — расчет его мультипликаторов.

Если это предположение справедливо, то тогда уточнения и более согласованных результатов можно ожидать при большем учете гармонических составляющих в искомым решениях. Для проверки этой гипотезы была использована комплексная форма рядов Фурье. Искомое решение в этом случае имело вид

$$x_{an}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i2nt}, \quad (5)$$

где параметр  $N$  регулирует число гармоник, учитываемых в решении. После подстановки (5) в (1), проведения очевидных преобразований и приведения подобных получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов  $c_n$  и  $c_{-n}$

$$\begin{cases} (1 - 4N^2 - i2\beta N)c_{-N} - \mu c_{-N+1} + \delta f_{-N} = 0, \\ (1 - 4n^2 + i2\beta n)c_n - \mu c_{n-1} - \mu c_{n+1} + \delta f_n = 0, \\ n = -N+1, \dots, N-1, \\ (1 - 4N^2 + i2\beta N)c_N - \mu c_{N-1} + \delta f_N = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$f_n = \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m}.$$

Решение системы (6) при различных значениях  $N$  было выполнено уже при помощи системы Maple, которая, в отличие от Matlab, позволила получить весь спектр решений.

При изменении параметра  $N$  от 1 до 10 динамика в получаемых решениях оказалась следующей. Действительно, первоначально произошло существенное, до 40%, уточнение младших коэффициентов  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  разложения и последующая их стабилизация при дальнейшем изменении  $N$ . Характер колебаний, по-прежнему, остался практически моногармоническим. Приведем для иллюстрации уточненные решения  $x_{3,4}$ , полученные при  $N = 10$ , коэффициенты разложения указаны с точностью до пяти знаков после запятой:

$$\begin{aligned}
 x_{an}(t) = & \pm(0,00884 + 0,19389\cos 2t + 3,39108\sin 2t - \\
 & - 0,01156\cos 4t - 0,10594\sin 4t - \\
 & - 0,01887\cos 6t - 0,10917\sin 6t + \\
 & + 0,00142\cos 8t + 0,00612\sin 8t + \\
 & + 0,00096\cos 10t + 0,00327\sin 10t - \\
 & - 0,00010\cos 12t - 0,00028\sin 12t - \\
 & - 0,00004\cos 14t - 0,00009\sin 14t + \\
 & + 0,00001\cos 16t + 0,00001\sin 16t).
 \end{aligned}$$

Достигнутые уточнения в решениях  $x_{3,4}$  повлекли соответствующие уточнения и в значениях мультипликаторов. Их повторный расчет для уточненного уравнения в вариациях при  $N = 10$  показал, что  $\rho_1 = 1,3510$ ,  $\rho_2 = 0,7394$ . Таким образом, в силу  $|\rho_1| > 1$  решения  $x_{3,4}$  являются всё-таки неустойчивыми и отсутствие их численной наблюдаемости теперь становится вполне естественным.

На рис. 1 приводится одно из решений  $x_{an}(t)$  (знак "+") при различных значениях  $N$ , там же, — результаты непосредственного численного интегрирования уравнения (1). Значения мультипликаторов показаны на рис. 2, где они представлены на комплексной плоскости и расположены относительно единичной окружности.

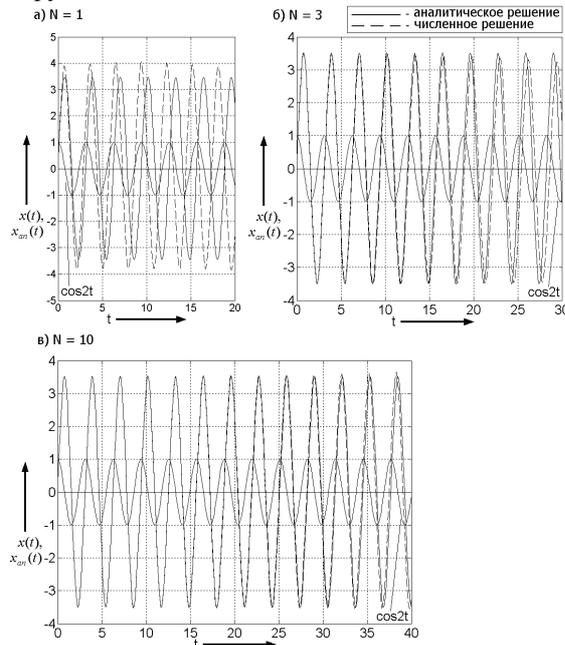


Рисунок 1 — Сравнение численного решения  $x(t)$  уравнения (1) и аналитического  $x_{an}(t)$  для различных значений  $N$

Таким образом, представленные иллюстрации демонстрируют уже согласованность полученных при  $N = 3$ ,  $N = 10$  результатов. С одной стороны, они показывают постепенный уход численного решения от аналитического, с другой, — позволяют данный факт объяснить неустойчивостью этих решений.

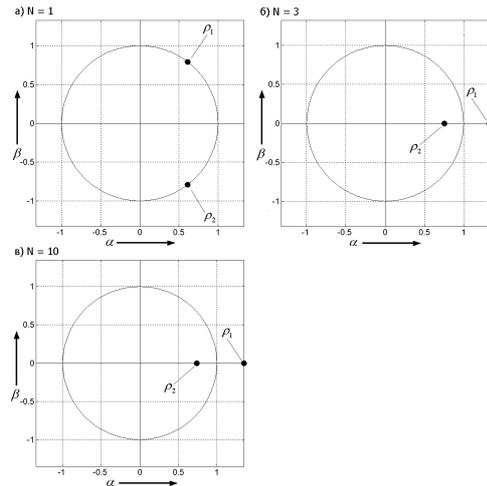


Рисунок 2 — Расчет мультипликаторов  $\rho = \alpha + i\beta$

### Выводы

Проведённые исследования подтверждают факт существования в системе Матье-Дуффинга в зоне главного параметрического резонанса стационарных движений с частотой равной частоте параметрического возбуждения и, на наш взгляд, демонстрируют эффективность численно-аналитического подхода к анализу нелинейных динамических систем. Это, в свою очередь, ставит задачу разработки специальных инструментальных средств, облегчающих процесс анализа. В частности, такими средствами могут быть программные модули, реализующие отдельные аналитические методы исследования. В целом, это серьезная задача, однако, по крайней мере, для систем с полиномиальными нелинейностями она представляется вполне реальной.

### Литература

1. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О явлениях резонанса n-го рода. — Полн. собр. трудов Мандельштама Л.И., М.: АН СССР, 1947, т. 2, с. 13-62.
2. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. — J. Atmos. Sci. — 1963. — V. 20, № 2. — p. 130-141.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
5. Belovodsky V.N., Tsyfansky S.L., Beresnevich V.I. The Dynamics of a Vibromachine with Parametric Excitation. — Journal of Sound and Vibration (2002), 254(5), 897-910.
6. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. «Нетрадиционные» решения уравнения Матье-Дуффинга: существование и устойчивость. — Труды ИПММ НАН Украины, 2007. Том 14. — с. 8-13.