

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Директор АДІ ДВНЗ ДонНТУ  
М.М.Чальцев  
06.07.2012 р.

Кафедра «Опір матеріалів та будівельна механіка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА  
«РОЗРАХУНОК ПРУЖНИХ СИСТЕМ ПРИ ПРОСТИХ  
НАВАНТАЖЕННЯХ»  
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»  
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.040106  
«ЕКОЛОГІЯ, ОХОРОНА НАВКОЛИШНЬОГО  
СЕРЕДОВИЩА ТА ЗБАЛАНСОВАНЕ  
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ»**

**10/41-2012-01**

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Навчально-методична комісія  
факультету «Автомобільні  
дороги»  
Протокол № 9 від 16.05.2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Кафедра «Опір матеріалів та  
будівельна механіка»  
Протокол № 9 від 7. 05.2012 р.

УДК 539.3(07)

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів «Розрахунок пружних систем при простих навантаженнях» з дисципліни «Технічна механіка» (для студентів напряму підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування») [Електронний ресурс] / укладачі: Чальцев М.М., Хникін Л.М., Космак В.О.: Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-R): 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97-2000. – назва з титул. екрану.

Укладачі:

Чальцев М.М., к.т.н., проф.  
Хникін Л.М., к.т.н., доц.  
Космак В.О., доц.

Відповідальний за випуск:

Хникін Л.М., к.т.н, доц.

Рецензент:

Коновалова Л.П., к.т.н., доц

© Державний вищий навчальний заклад  
«Донецький національний технічний університет»  
Автомобільно-дорожній інститут, 2012

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ .....	4
1.1 Теоретичні відомості .....	4
1.2 Приклад розрахунку статично невизначуваної стержневої системи .....	6
2 КРУЧЕННЯ .....	10
2.1 Теоретичні відомості .....	10
2.2 Приклад розрахунку .....	11
3 ЗГИН .....	15
3.1 Теоретичні відомості .....	15
3.1.1 Внутрішні зусилля та побудова їх епюр .....	15
3.1.2 Напруження та розрахунки на міцність .....	16
3.2 Приклад розрахунку .....	17
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....	24
ДОДАТОК Варіанти індивідуальних завдань .....	25

## ВСТУП

Дані методичні вказівки призначені до самостійного виконання розрахунково-проектувальної роботи «Розрахунок пружних систем при простих навантаженнях».

Головна мета виконання цієї роботи – закріпити й поглибити теоретичні знання з розділів розтяг (стиск), кручення та згин, розвинути техніку розрахунків і набути навичок оформлення теоретичних розрахунків.

## 1 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ

### 1.1 Теоретичні відомості

Під розтяганням (стисканням) розуміють такий вид деформації брусу, при якому в його поперечних перетинах виникає лише один внутрішній силовий фактор – поздовжня сила  $N$ , а всі інші дорівнюють нулю.

Нормальні напруження  $\sigma$  в поперечних перерізах бруса площею  $A$  при розтяганні або стисканні визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

де  $N = \int_A \sigma dA$  – нормальна вісьова внутрішня сила, яка може бути визначена за методом перерізу як алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил  $P_i$ , що діють на відсічену частину бруса, тобто

$$N = \sum P_i. \quad (1.2)$$

Відносне поздовжнє подовження  $\varepsilon$  стержня довжиною  $l$  для однорідного напруженого стану:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.3)$$

де  $\Delta l$  – абсолютна деформація стержня, яка визначається як різниця між кінцевою та початковою довжиною,  $m$ .

У межах малих деформацій для більшості матеріалів виконується закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (1.4)$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, який називають модулем пружності першого роду, модулем поздовжньої деформації, або модулем Юнга.

Значення  $E$ , МПа для деяких матеріалів:

Сталь	$(1,9 \dots 2,1) \cdot 10^5$
Чугун	$(1,5 \dots 1,6) \cdot 10^5$

Мідь	$(1,0 \dots 1,3) \cdot 10^5$
Алюміній та його сплави	$(0,69 \dots 0,77) \cdot 10^5$
Деревина	$(0,1 \dots 0,16) \cdot 10^5$

При розтяганні стержня довжиною  $l$  з постійним поперечним перерізом закон Гука можна записати у вигляді:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.5)$$

де  $EA$  – жорсткість перерізу бруса при розтяганні (стисканні).

Відносні поздовжня  $\varepsilon$  та поперечна  $\varepsilon'$  деформації пов'язані з коефіцієнтом Пуассона  $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ , значення якого знаходяться у межах  $\mu = 0 \div 0,5$ . Для більшості матеріалів  $\mu \approx 0,3$ .

Потенційна енергія деформації  $u$  при розтяганні (стисканні) визначається за формулою:

$$u = \int_0^l \frac{N^2 dl}{2EA}. \quad (1.6)$$

Діаграма розтягання низьковуглецевої сталі при статичному навантаженні зразка має вигляд, що наведений на рисунку 1.1.

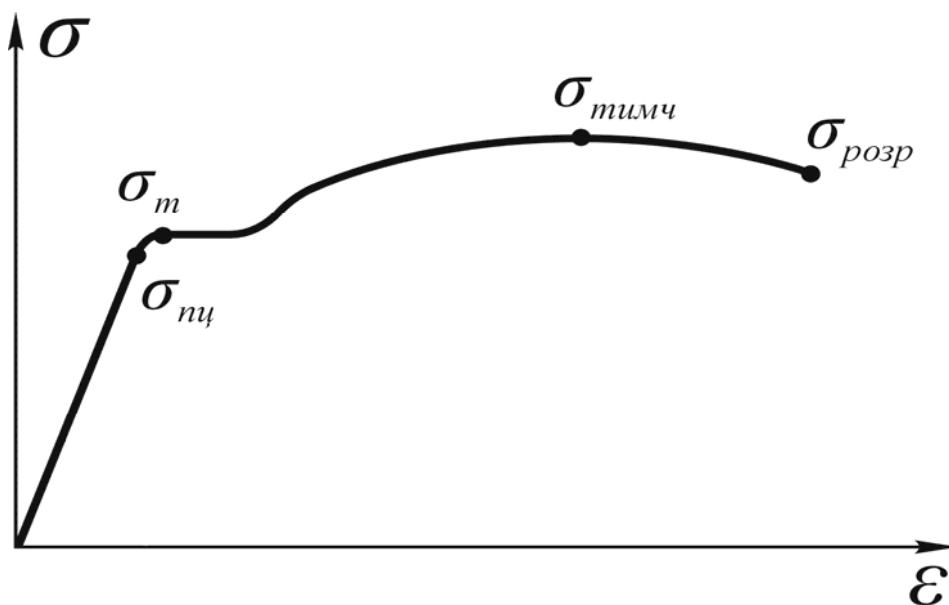


Рисунок 1.1 – Діаграма розтягання низьковуглецевої сталі

На діаграмі позначені такі характерні напруження:

$\sigma_{тц}$  – границя пропорційності;

$\sigma_{т}$  – границя текучості;

$\sigma_{тимч}$  – границя міцності (тимчасовий опір);

$\sigma_{розр}$  – напруження розриву.

Відношення певного граничного напруження  $\sigma_{гран}$  до коефіцієнту запасу міцності  $k$  називають допустимим напруженням:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{гран}}{k}. \quad (1.7)$$

За величину граничного напруження для пластичних матеріалів приймають границю текучості  $\sigma_m$ , а для крихких – границю міцності  $\sigma_{тимч}$ .

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів приймають рівним  $k = 1,4 \div 1,6$ ; для крихких  $k = 2,5 \div 3$ .

Умова міцності за допустимими напруженнями має вигляд:

$$\sigma \leq [\sigma]. \quad (1.8)$$

Статично невизначуваною системою називають таку кінематично незмінну систему, для якої визначення зовнішніх реакцій та внутрішніх силових факторів не можна виконати за допомогою методу перерізів та рівнянь рівноваги статки.

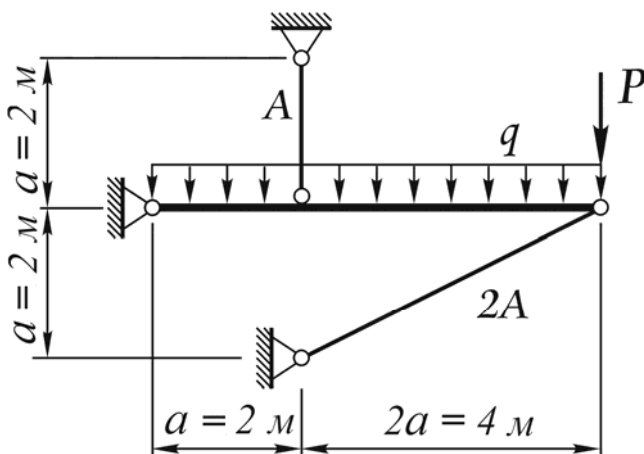
План розв'язання статично невизначуваних систем:

1. Складають рівняння рівноваги (статична сторона задачі).
2. Складають рівняння сумісності деформацій, розглядаючи деформований стан системи (геометрична сторона задачі).
3. Виражають деформації через зусилля за законом Гука й підставляють до рівняння сумісності деформацій (фізична сторона задачі).
4. Отримане рівняння розв'язують сумісно з рівнянням рівноваги (синтез).

## 1.2 Приклад розрахунку статично невизначуваної стержневої системи

Абсолютно жорстка балка  $ОВС$  закріплена за допомогою пружних стержнів 1 та 2 (див. рис. 1.2). Площа поперечного перерізу першого стержня  $A$ , другого –  $2A$ .

Визначити зусилля в стержнях від заданого навантаження та підібрати площу поперечних перерізів стержнів з умови міцності за допустимими напруженнями.



Вихідні дані:

$$\begin{aligned} P &= 50 \text{ кН}; \\ q &= 20 \text{ кН / м}; \\ a &= 2 \text{ м}; \\ [\sigma] &= 160 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Рисунок 1.2 – Задана схема

## Розв'язок

## 1. Визначення ступеня статичної невизначеності

Ступень статичної невизначеності  $S$  визначається як різниця між кількістю невідомих та кількістю рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи сил. Невідомими являються: реакції шарніру  $X_0$ ,  $Y_0$  та зусилля у стержнях  $N_1$ ,  $N_2$  (рис. 1.3). Для отриманої довільної плоскої системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, отже  $S = 4 - 3 = 1$ , тобто задача один раз статично невизначувана.

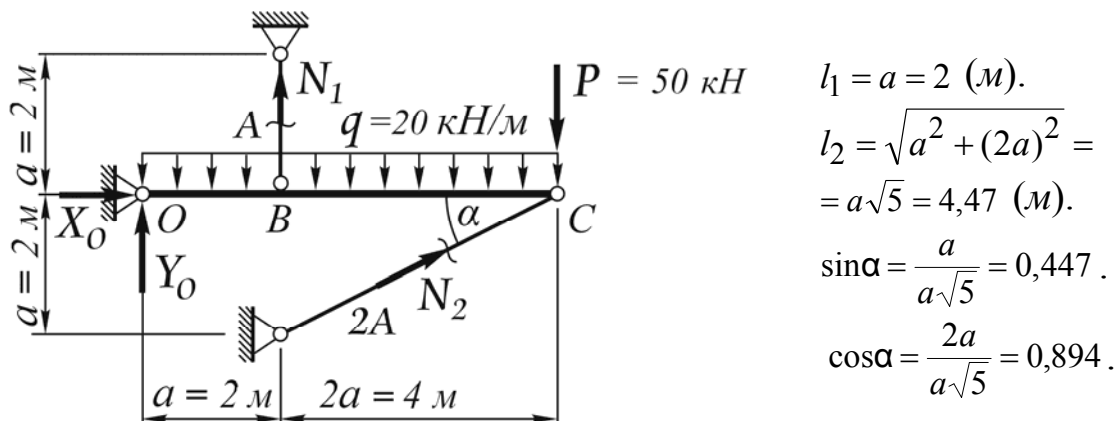


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема

## 2. Розкриття статичної невизначуваності

## 2.1 Статична сторона задачі

Складаємо лише одне рівняння рівноваги, яке дасть залежність між шуканими величинами  $N_1$  та  $N_2$ , а саме:

$$\sum m_0(\vec{F}_k) = 0; N_1 \cdot a + N_2 \cdot 3a \cdot \sin\alpha - P \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot 1,5a = 0$$

$$N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 6 \cdot 0,447 - 50 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$N_1 + 1,341N_2 = 330$$

## 2.2 Геометрична сторона задачі

Так як балка  $OBC$  – абсолютно жорстка, деформуються лише стержні. При деформуванні системи балка  $OBC$  під дією сил повертається навколо шарніру  $O$  та займає положення  $OB'C'$  (див. рис. 1.4). Точка  $B$  отримує переміщення  $BB' = \delta_B$ , а точка  $C$  – переміщення  $CC' = \delta_C$ . Деформації стержнів  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  визначаємо як різниці між довжинами стержнів після деформування та до нього.

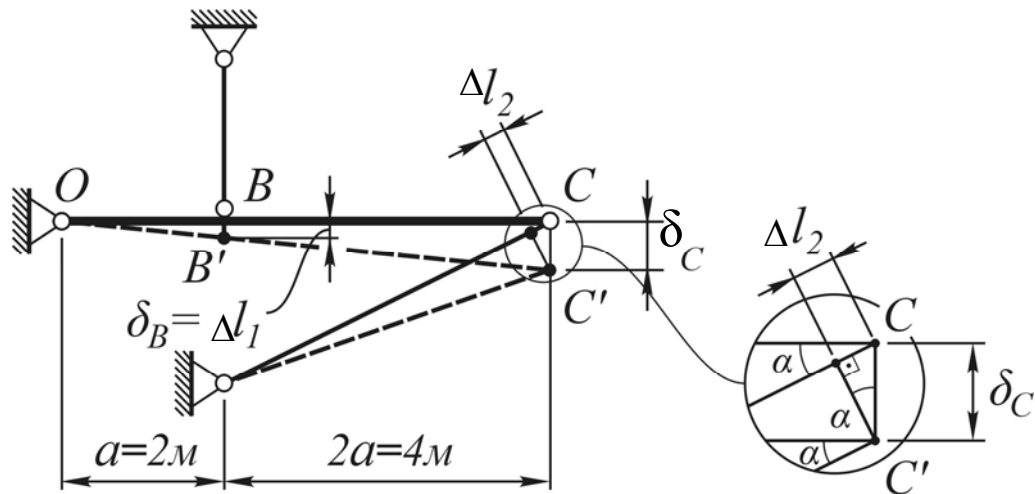


Рисунок 1.4 – Схема деформацій пружної системи 3

Оскільки встановити зв'язок між деформаціями стержнів одразу неможливо, спочатку встановлюємо зв'язок між переміщеннями точок  $B$  та  $C$ . Для цього розглянемо подібні трикутники  $\Delta OBB'$  та  $\Delta OCC'$ .

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}; \quad \frac{\delta_B}{2} = \frac{\delta_C}{6}; \quad \delta_C = \delta_B \frac{6}{2}; \quad \delta_C = 3\delta_B.$$

Тепер встановлюємо зв'язок між переміщеннями точок та деформаціями стержнів.

$$\delta_B = \Delta l_1; \quad \delta_C = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}.$$

Встановлюємо зв'язок між деформаціями стержнів:

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{3 \sin \alpha}.$$

### 2.3 Фізична сторона задачі

Виражаємо деформації через зусилля в стержнях за законом Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 l_1}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 l_2}{2EA}.$$

Повертаючись до співвідношення  $\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{3 \sin \alpha}$ , знаходимо зв'язок між силами в стержнях:

$$\frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{N_2 l_2}{2EA \cdot 3 \sin \alpha}; \quad N_1 = N_2 \frac{l_2}{l_1 \cdot 6 \sin \alpha}.$$



## 2.4 Синтез

Поєднуємо отримані результати зі статичної та фізичної сторони задачі.

$$\begin{cases} N_1 + 1,341N_2 = 330; \\ N_1 = N_2 \frac{l_2}{l_1 \cdot 6 \sin \alpha}. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь.

$$N_1 = N_2 \frac{l_2}{l_1 \cdot 6 \sin \alpha} = N_2 \frac{4,47}{2 \cdot 6 \cdot 0,447} = 0,833N_2;$$

$$0,833N_2 + 1,341N_2 = 330;$$

$$2,174N_2 = 330; \quad N_2 = \frac{330}{2,174} = 151,8 \text{ (кН)};$$

$$N_1 = 0,833N_2 = 0,833 \cdot 151,8 = 126,45 \text{ (кН)}.$$

Отже,  $N_1 = 126,45$  кН;  $N_2 = 151,8$  кН. Статична невизначуваність розкрита.

## 3. Підбір площі поперечних перерізів стержнів

Умова міцності:  $\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ . Визначаємо  $\sigma_{max}$ .

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{A} = \frac{126,45}{A_1}. \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{2A} = \frac{151,8}{2A} = \frac{75,9}{A}.$$

$$\text{Отже, } \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{126,45}{A} \leq [\sigma].$$

Визначаємо необхідне з умови міцності значення  $A$ . При цьому зусилля треба виражати у меганьютонах, оскільки допустиме напруження має таку розмірність:

$$A \geq \frac{126,45}{[\sigma]} = \frac{126,45 \cdot 10^{-3}}{160} = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)} = 7,9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Приймаємо  $A = 8 \text{ см}^2$ . Отже  $A_1 = A = 8 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 2A = 16 \text{ см}^2$ .  
Обчислюємо напруження у стержнях.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{126,45 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 158,06 \text{ (МПа)}.$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{151,8 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4}} = 94,88 \text{ (МПа)}.$$

## 2 КРУЧЕННЯ

### 2.1 Теоретичні відомості

Під крученням розуміють такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перетинах виникає лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент  $M_{кр}$ , а всі інші дорівнюють нулю.

Брус, що працює на кручення, називають *валом*.

Крутний момент може бути визначений за методом перерізів як алгебраїчна сума всіх зовнішніх скручувальних моментів  $m_i$ , що діють на частину валу, що розглядається, тобто:

$$M_{кр} = \sum m_i . \quad (2.1)$$

Дотичні напруження  $\tau$  в поперечних перерізах круглого бруса при його крученні визначаються за формулою:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_\rho} \rho , \quad (2.2)$$

де  $M_{кр}$  – крутний момент у перерізі,  $H \cdot m$ ;

$\rho$  – відстань від центру ваги перерізу до точки, де визначаються напруження,  $m$ ;

$J_\rho$  – полярний момент опору перерізу,  $m^4$ .

Для круглого поперечного перерізу діаметром  $d$ :

$$J_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} . \quad (2.3)$$

Кут закручування  $\varphi$  (*рад*) ділянки стержня довжиною  $l$  з постійним поперечним перерізом та крутним моментом  $M_{кр}$  можна визначити за формулою (закон Гука при крученні):

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_\rho} , \quad (2.4)$$

де  $G$  – модуль пружності другого роду, або модуль зсуву, МПа;

$G J_\rho$  – жорсткість перерізу при крученні.

Модуль зсуву може бути виражений через модуль поздовжньої деформації та коефіцієнт Пуассона:  $G = E / 2(1 + \mu)$ .

При проектуванні діаметр валів призначають виходячи з двох умов: *умови міцності* та *умови жорсткості*.

Умова міцності полягає в тому, що максимальні дотичні напруження  $\tau_{max}$  не повинні перевищувати гранично допустимі  $[\tau]$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (2.5)$$

де  $W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$  – полярний момент опору перерізу, м<sup>3</sup>.

З умови міцності (2.5) знаходять діаметр вала  $d_1$ :

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}^{\max}}{\pi[\tau]}}, \quad (2.6)$$

Умова жорсткості полягає в тому, що максимальний відносний кут закручування  $\theta = \varphi/l$  не повинен перевищувати гранично допустимий  $[\theta]$ :

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (2.7)$$

З умови жорсткості (2.7) знаходять діаметр вала  $d_2$ :

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}^{\max}}{\pi \cdot G[\theta]}}, \quad (2.8)$$

Остаточно приймають більше з двох значень  $d_1$  та  $d_2$ , округливши його кратно 2 або 5 мм.

## 2.2 Приклад розрахунку

Від електродвигуна на вал 1 передається потужність  $N$ . З валу 1 на вал 2 передається потужність  $N_1$  та до робочих машин потужності  $N_2, N_3$ . З валу 2 до робочих машин передаються потужності  $N_4, N_5, N_6$ . Схема валів наведена на рис. 2.1.

Визначити діаметри валів  $d_1$  та  $d_2$  з умов міцності та жорсткості, якщо перерізи валів сталі по довжині.

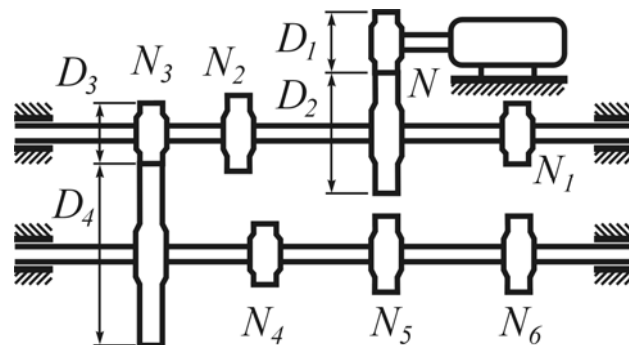


Рисунок 2.1 – Схема розподільних валів

Допустимі напруження  $[\tau] = 80$  МПа.

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = 0,5$  град/м.

Модуль зсуву  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Частота обертання валу електродвигуна  $n = 970$  об/хв.

Діаметри шківів  $D_1 = 0,2$  м;  $D_2 = 0,4$  м;  $D_3 = 0,2$  м;  $D_4 = 0,6$  м.

Баланс потужностей:  $N_1 = 0,15N$ ;  $N_2 = 0,25N$ ;  $N_3 = 0,6N$ ;

$N_4 = 0,2N$ ;  $N_5 = 0,35N$ ;  $N_6 = 0,05N$ .

### Розв'язок

#### 1. Розрахунок першого валу

Визначаємо частоту обертання  $n_1$  та кутову швидкість  $\omega_1$  валу.

$$n_1 = n \frac{D_1}{D_2} = 970 \frac{0,2}{0,4} = 485 \text{ (об/хв)}.$$

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 485}{30} = 50,76 \text{ (рад/с)}.$$

Визначаємо скручувальні моменти  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  на першому валу. При обчисленнях потужність  $N_1 = 0,15N = 0,15 \cdot 20 = 3$  кВт та інші підставляємо до формул у ватах. Скручувальні моменти отримуємо у ньютонках на метр.

$$m = \frac{N}{\omega_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{50,76} = 394,01 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_1 = \frac{N_1}{\omega_1} = \frac{3 \cdot 10^3}{50,76} = 59,10 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_2 = \frac{N_2}{\omega_1} = \frac{5 \cdot 10^3}{50,76} = 98,50 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_3 = \frac{N_3}{\omega_1} = \frac{12 \cdot 10^3}{50,76} = 236,41 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

Отримані значення округлюємо до десятих, слідкуючи за виконанням рівності  $m = m_1 + m_2 + m_3$ . Отже:

$$m = 394,0 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad m_1 = 59,1 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad m_2 = 98,5 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad m_3 = 236,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру крутних моментів  $M_{кр}$ , користуючись методом перерізів. Епюра  $M_{кр}$  представлена на рис. 2.2.

$$m_3 = 236,4 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad m_2 = 98,5 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad m_1 = 59,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

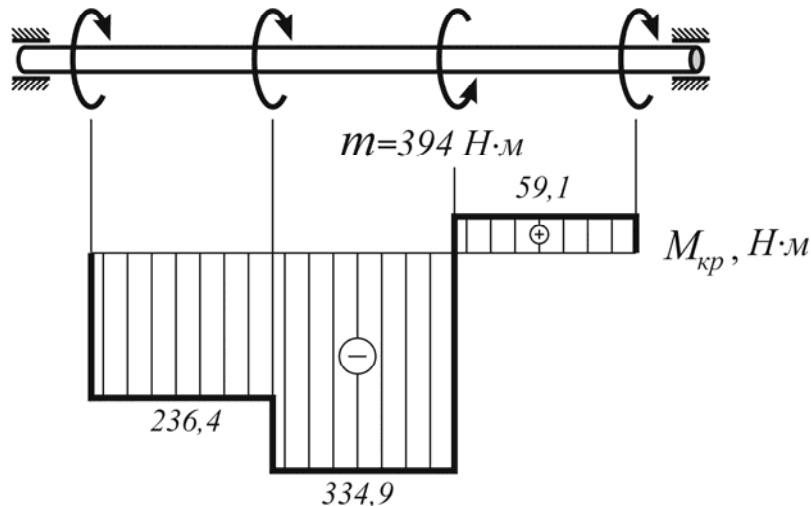


Рисунок 2.2 – Епюра крутних моментів  $M_{кр}$  для вала 1

Визначаємо діаметр вала 1 з умови міцності:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 334,9}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0277 \text{ м} = 27,7 \text{ мм.}$$

При визначенні діаметру з умови жорсткості гранично допустиме значення відносного кута закручування слід підставляти в *радіанах на метр* довжини, а не в градусах на метр, тобто

$$[\theta] \cdot \frac{\pi}{180} = 0,5 \cdot \frac{3,14}{180} = 8,722 \cdot 10^{-3} \text{ (рад/м).}$$

Діаметр  $d_2$  вала з умови жорсткості:

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{\max}}{G \cdot \pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 334,9}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,722 \cdot 10^{-3}}} = 0,047 \text{ м} = 47 \text{ мм.}$$

Остаточно діаметр вала слід прийняти кратним 2 або 5 мм, округливши більше з двох значень  $d_1$  у більшу сторону. В даному випадку приймаємо  $d_1 = 48 \text{ мм}$ .

## 2. Розрахунок другого вала

Визначаємо частоту обертання  $n_2$  та кутову швидкість  $\omega_2$  вала.

$$n_2 = n_1 \frac{D_3}{D_4} = 485 \frac{0,2}{0,6} = 161,67 \text{ (об/хв)};$$

$$\omega_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{30} = \frac{3,14 \cdot 161,67}{30} = 16,92 \text{ (рад/с).}$$

Визначаємо скручувальні моменти  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  та  $m_6$  на другому валу.

$$m_3 = \frac{N_3}{\omega_2} = \frac{12 \cdot 10^3}{16,92} = 709,22 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_4 = \frac{N_4}{\omega_2} = \frac{4 \cdot 10^3}{16,92} = 236,41 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_5 = \frac{N_5}{\omega_2} = \frac{7 \cdot 10^3}{16,92} = 413,71 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$m_6 = \frac{N_6}{\omega_2} = \frac{1 \cdot 10^3}{16,92} = 59,1 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

Отримані значення округлюємо до десятих, слідкуючи за виконанням рівності  $m_3 = m_4 + m_5 + m_6$ . Отже:

$$m_3 = 709,2 \text{ Н}\cdot\text{м}, m_4 = 236,4 \text{ Н}\cdot\text{м}, m_5 = 413,7 \text{ Н}\cdot\text{м}, m_6 = 59,1 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру крутних моментів  $M_{кр}$ , користуючись методом перерізів. Епюра  $M_{кр}$  представлена на рис. 2.3.

$$m_3 = 709,2 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad m_4 = 236,4 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad m_5 = 59,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

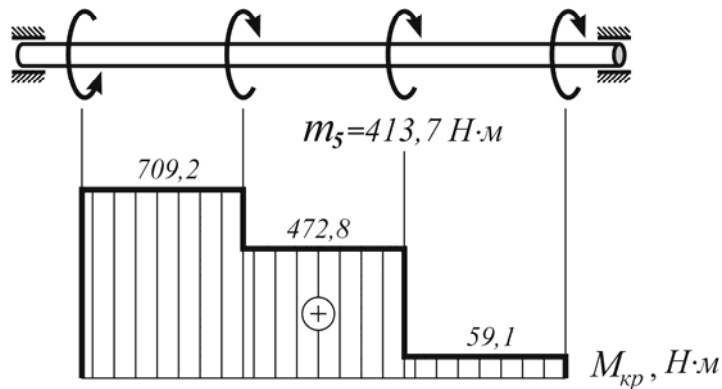


Рисунок 2.3 – Епюра крутних моментів  $M_{кр}$  для вала 2

Визначаємо діаметр вала 2 з умови міцності:

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 709,2}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0356 \text{ м} = 35,6 \text{ мм}.$$

Визначаємо діаметр вала 2 з умови жорсткості:

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{\max}}{G \cdot \pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 709,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,722 \cdot 10^{-3}}} = 0,0567 \text{ м} = 56,7 \text{ мм}.$$

Остаточно діаметр вала 2 приймаємо  $d_2 = 58 \text{ мм}$ .

## 3 ЗГИН

### 3.1 Теоретичні відомості

#### 3.1.1 Внутрішні зусилля та побудова їх епюр

Під плоским згином розуміють такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перетинах виникає одночасно два внутрішні силові фактори – поперечна сила  $Q$  та згинальний момент  $M$ , а всі інші дорівнюють нулю.

Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

Внутрішні силові фактори в довільному перерізі обчислюють за методом перерізів наступним чином.

Поперечна сила дорівнює алгебраїчній сумі всіх сил, що діють на розглядувану частину балки, тобто:

$$Q = \sum P_i. \quad (3.1)$$

При цьому  $i$ -та зовнішня сила  $P_i$  враховується зі знаком «+», якщо вона намагається обернути розглядувану частину балки за ходом годинникової стрілки (див. рис. 3.1(а)).

Згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, що діють на розглядувану частину балки, відносно центру ваги перерізу, тобто

$$M = \sum m_C(\vec{P}_i). \quad (3.2)$$

При цьому момент  $i$ -тої зовнішньої сили  $P_i$  враховується зі знаком «+», якщо при згинанні верхні волокна балки зазнають стискання (сила створює момент «на балку», див. рис. 3.1(б)).

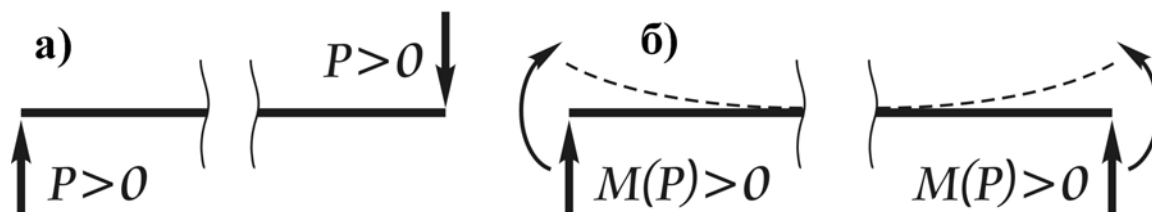


Рисунок 3.1 – Правило знаків при обчисленні поперечної сили  $Q_y$  (а) та згинального моменту  $M_z$  (б)

Між навантаженням на балку  $q$ , поперечною силою  $Q_y$  та згинальним моментом  $M_z$  існують наступні диференціальні залежності:

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (3.3)$$

При побудові епюр внутрішніх силових факторів рекомендується дотримуватись наступної послідовності дій:

1. Визначити опорні реакції.

2. Поділити балку на ділянки (граничами ділянок є місця прикладання зосереджених сил, моментів, початок і кінець розподіленого навантаження).
3. Скласти аналітичні вирази для  $Q$  та  $M$ .
4. Обчислити  $Q$  та  $M$  у характерних перерізах та побудувати епюри.
5. Користуючись диференціальними залежностями, перевірити правильність побудови епюр.

### 3.1.2 Напруження та розрахунки на міцність

При розрахунках балок на міцність обчислюють нормальні та дотичні напруження у небезпечних перерізах (у перерізах з екстремальними значеннями внутрішніх зусиль).

Нормальні напруження обчислюють за формулою Нав'є:

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y, \quad (3.4)$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження, МПа;

$y$  – ордината точки, де обчислюються напруження, по відношенню до центральних осей перерізу, м;

$J_z$  – осьовий момент інерції перерізу (відносно центральної осі), м<sup>4</sup>.

Дотичні напруження обчислюють за формулою Журавського:

$$\tau = \frac{Q \cdot S(y)}{b(y) \cdot J_z}, \quad (3.5)$$

де  $\tau$  – дотичне напруження, МПа;

$S(y)$  – статичний момент відсіченої частини перерізу відносно нейтрального шару, м<sup>3</sup>;

$b(y)$  – ширина перерізу на рівні  $y$ , де визначаються напруження, м.

Найбільші нормальні напруження виникають у небезпечних перерізах у найвіддаленіших від нейтрального шару (від центральної осі перерізу  $z$ ) точках, тобто при  $y = y_{\max}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}, \quad (3.6)$$

де  $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$  – осьовий момент опору перерізу, м<sup>3</sup>.

З умови міцності  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  по нормальним напруження визначають необхідний момент опору перерізу:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (3.7)$$

де  $[\sigma]$  – допустиме нормальне напруження, МПа.



Підібраний за формулою (3.7) переріз перевіряють на міцність по дотичним напруженням (перевірка на зріз) за умовою:  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ . Допустиме значення дотичних напружень  $[\tau]$  для металевих балок складає  $[\tau] = 0,5 \div 0,6[\sigma]$ . При цьому  $\tau_{\max}$  має місце у нейтральному шарі.

При малому запасі міцності або високих значеннях поперечної сили проводять повну перевірку міцності по головним напруженням у небезпечній точці перерізу. Для двотаврового перерізу такою точкою є перехід від полки до стінки, де ширина перерізу змінюється стрибком, завдяки чому різко зростають дотичні напруження.

Головні напруження  $\sigma$  у небезпечній точці можна обчислити за однією з чотирьох теорій міцності.

За 1-ою теорією міцності: 
$$\sigma^I = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

За 2-ою: 
$$\sigma^{II} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) - \mu(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \right].$$

За 3-ою: 
$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

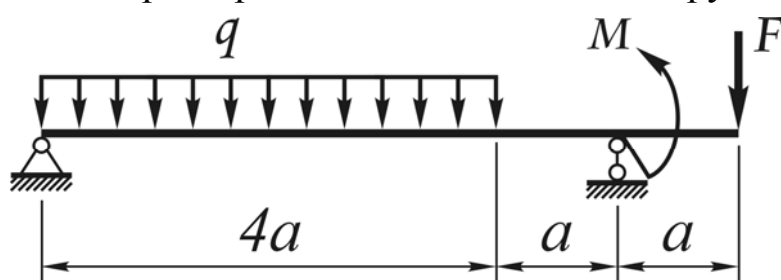
За 4-ою: 
$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Зазвичай при розрахунках металевих балок використовують третю теорію міцності.

### 3.2 Приклад розрахунку

Для заданої балки (див. схему балки на рис. 3.2) потрібно:

1. Побудувати епюри поперечних сил  $Q_y$  та згинальних моментів  $M_z$ .
2. Підібрати з умови міцності при згинанні круглий, прямокутний ( $h/b = 2$ ) та двотавровий перерізи балки.
3. Порівняти ефективність підібраних перерізів за витратою металу.
4. Перевірити міцність балки за зріз.
5. Виконати повну перевірку балки на міцність у небезпечному перерізі по головним напруженням за третьою теорією міцності, побудувавши епюри нормальних та дотичних напружень по висоті перерізу.



Вихідні дані:

$$P = 20 \text{ кН};$$

$$q = 5 \text{ кН/м};$$

$$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$a = 1 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$[\tau] = 80 \text{ МПа}$$

Рисунок 3.2 – Схема балки

1. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.

Спочатку визначаємо опорні реакції балки (рис. 3.3).

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad R_B \cdot 5 + M - F \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$R_B = \frac{8q + 6F - M}{5} = \frac{8 \cdot 10 + 6 \cdot 20 - 5}{5} = 39 \text{ (кН)}.$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_A \cdot 5 + M - F \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot 3 = 0;$$

$$R_A = \frac{M - F + 12q}{5} = \frac{5 - 20 + 120}{5} = 21 \text{ (кН)}.$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0; \quad 21 + 39 - 20 - 40 = 0.$$

Для побудови епюр  $Q_y$  та  $M_z$  розділяємо балку на ділянки.

Ділянка I.  $0 \leq x_1 < 4$  м.

$$Q_y = R_A - q \cdot x_1.$$

$$Q_{y_{x=0}} = R_A = 21 \text{ кН}. \quad Q_{y_{x=4}} = 21 - 10 \cdot 4 = -19 \text{ кН}.$$

Оскільки поперечна сила змінює знак, знаходимо переріз, де  $Q_y = 0$ .

$$R_A - q \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{21}{10} = 2,1 \text{ (м)}.$$

$$M_z = R_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2};$$

$$M_{z_{x_1=0}} = 0; \quad M_{z_{x_1=4\text{м}}} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad M_z^{extr}_{x_0=2,1} = 22,05 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II.  $0 \leq x_2 < 1$  м.

$$Q_y = F = 20 \text{ кН}.$$

$$M_z = -F \cdot x_2; \quad M_{z_{x_2=0}} = 0; \quad M_{z_{x_2=1}} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III.  $1\text{ м} \leq x_3 < 2\text{ м}$ .

$$Q_y = F - R_B = 20 - 39 = -19 \text{ кН}.$$

$$M_z = -F \cdot x_3 + R_B \cdot (x_3 - 1) + M;$$

$$M_{z_{x_3=1}} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z_{x_3=2}} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Епюри  $Q_y$  та  $M_z$  представлені на рис. 3.3.

## 2. Підбір перерізів з умови міцності

Небезпечним є переріз з екстремальним згинальним моментом  $M_z = 22,05 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . З умови міцності  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  знаходимо потрібний момент опору перерізу:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad W_z^{\text{потр}} \geq \frac{M_z^{\max}}{[\sigma]};$$

$$W_z^{\text{потр}} = \frac{22,05 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,378 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 137,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 137,8 \text{ см}^3.$$

### 2.1 Круглий переріз

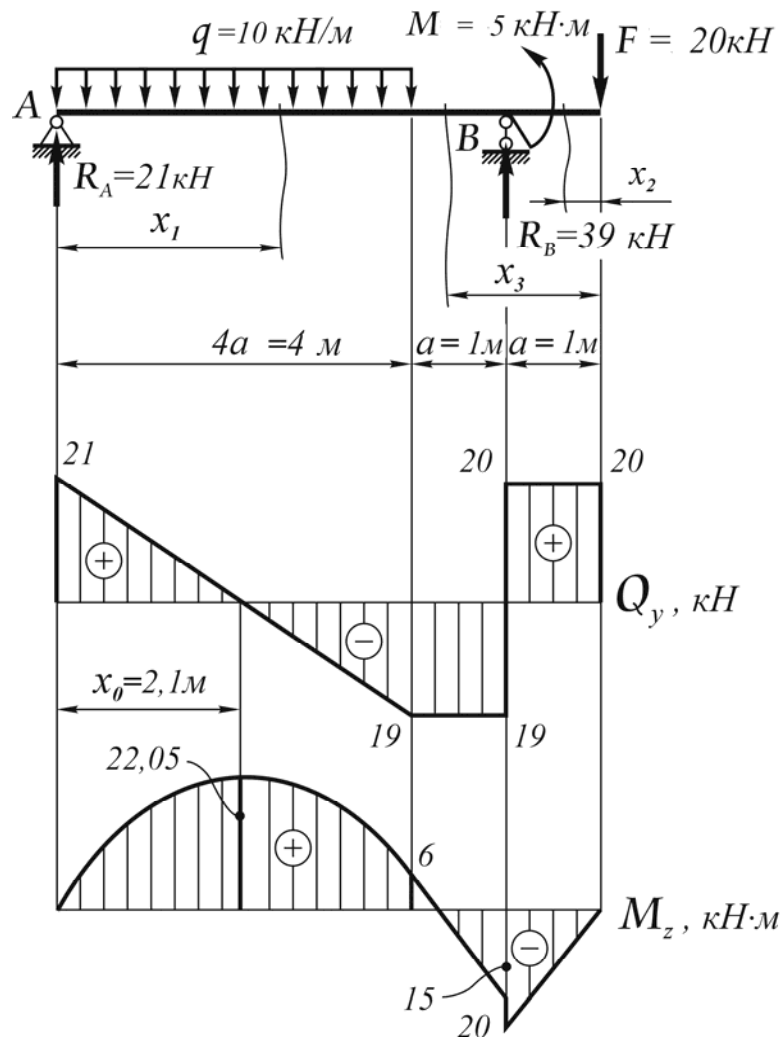
Оскільки для круглого перерізу  $W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ , то  $\frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq W_z^{\text{потр}}$  і

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_z^{\text{потр}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 137,8}{3,14}} = 11,198 \text{ см}. \text{ Приймаємо } d = 12 \text{ см}.$$

Обчислимо момент опору обраного перерізу та максимальні напруження.

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^3}{32} = 169,56 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{22,05 \cdot 10^{-3}}{169,56 \cdot 10^{-6}} = 130 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Рисунок 3.3 – Побудова епюр  $Q_y$  та  $M_z$ 

## 2.2 Прямокутний переріз

Оскільки для прямокутного перерізу  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ , а  $\frac{h}{b} = 2$ , тобто  $h = 2b$ ,

то  $W_z = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$  і  $\frac{2}{3}b^3 \geq W_z^{\text{потр}}$ , звідки знаходимо необхідну ширину

перерізу:  $b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z^{\text{потр}}}$ .

$b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}137,8} = 5,91$  см. Приймаємо  $b = 6$  см,  $h = 2b = 12$  см.

Обчислимо момент опору обраного перерізу та максимальні напруження:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_z^{\text{max}}}{W_z} = \frac{22,05 \cdot 10^{-3}}{144 \cdot 10^{-6}} = 153,13 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

### 2.3 Двотавровий переріз

Двотавровий переріз підбирається з таблиць сортаменту (див. додаток А), звідки слід обрати профіль з найближчим більшим моментом опору. Таким буде двотавровий переріз № 18, для якого  $W_z = 143 \text{ (см}^3\text{)}$ .

Випишемо також інші геометричні характеристики перерізу, які знадобляться у подальших розрахунках, а саме:

- площа перерізу  $A = 23,4 \text{ (см}^2\text{)}$ ;
- осьовий момент інерції  $J_z = 1290 \text{ (см}^4\text{)}$ ;
- статичний момент пів перерізу  $S^* = 81,4 \text{ (см}^3\text{)}$ .

Обчислимо максимальні напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{22,05 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 154,2 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

### 3. Порівняння перерізів

Усі підібрані перерізи задовольняють умову міцності, але для виготовлення прямокутного чи круглого перерізу знадобиться значно більше матеріалу, ніж для двотаврового, тому двотавровий переріз є більш ефективним.

Витрата металу пропорційна площі перерізу. Знайдемо площі підібраних перерізів для їх кількісного порівняння:

Круглий переріз  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ (см}^2\text{)}$ .

Прямокутний переріз  $A = bh = 6 \cdot 12 = 72 \text{ (см}^2\text{)}$ .

Двотавровий переріз  $A = 23,4 \text{ (см}^2\text{)}$ .

Отже, прямокутний переріз у  $k = \frac{72}{23,4} = 3,07$  разів менш ефективний за

двотавровий, а круглий – у  $k = \frac{113}{23,4} = 4,83$  разів.

### 4. Перевірка двотаврового перерізу на зріз

Умова міцності на зріз має вигляд:  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ . Максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max}$  виникає в центрі ваги перерізу з найбільшим значенням поперечної сили, тобто на опорі А, де  $Q = Q_{\max} = 21 \text{ кН}$ . Використовуючи формулу Журавського, знаходимо:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z^*}{b \cdot J_z} = \frac{21 \cdot 10^{-3} \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 26 \text{ (МПа)}.$$

Отже,  $\tau_{\max} = 26 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}$ .

Умова міцності на зріз виконується.

### 5. Повна перевірка балки на міцність у небезпечному перерізі

Для повної перевірки балки слід обрати переріз, в якому згинальний момент та поперечна сила одночасно сягають великих значень, хоча ці значення не обов'язково мають бути екстремальними.

В нашому випадку таким перерізом є опорний переріз  $B$ , де  $Q_y = 20$  кН,  $M_z = 20$  кН.

Для двотаврового перерізу небезпечною точкою є перехід від полки до стінки, де ширина перерізу змінюється стрибком, завдяки чому різко зростають дотичні напруження. При розрахунках дійсний двотавровий переріз замінюємо уявним, що складається з прямокутних елементів – стінки та полок (див. рис. 3.4). Для побудови епюри нормальних напружень використовуємо формулу Нав'є, а для епюри дотичних напружень – формулу Журавського.

Напруження обчислюємо в чотирьох точках, які знаходяться на осі симетрії  $y$ . Точка 1 знаходиться на поверхні балки. Точка 2 – на полці при переході до стінки. Точка 3 – у стінці перед полкою. Точка 4 в нейтральному шарі (на осі симетрії  $z$ ).

Для обчислень необхідно вибрати з таблиць сортаменту необхідні дані по перерізу, а саме: момент інерції  $J_z = 1290$  см<sup>4</sup>; статичний момент пів перерізу  $S^* = 81,4$  см<sup>3</sup>; розміри  $h, b, s, t$  (вказані на рисунку 3.4 в мм).

Точка 1.

Ордината  $y = h/2 = 9$  см.

Ширина перерізу  $b(y) = b = 9$  см.

Статичний момент пів перерізу  $S(y) = 0$ .

$$\sigma_1 = \frac{M}{J_z} y = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1290 \cdot 10^{-8}} 9 \cdot 10^{-2} = 139,54 \text{ (МПа)}.$$

$$\tau_1 = 0 \text{ (так як } S(y) = 0 \text{)}.$$

Точка 2.

Ордината  $y = h/2 - t = 9 - 0,81 = 8,19$  см.

Ширина перерізу  $b(y) = b = 9$  см.

Статичний момент пів перерізу – це статичний момент полки, а саме:

$$S(y) = b \cdot t \cdot (y/2 - t/2) = 9 \cdot 0,81 \cdot (9 - 0,405) = 62,66 \text{ (см}^3 \text{)}.$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{J_z} y = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1290 \cdot 10^{-8}} 8,19 \cdot 10^{-2} = 126,98 \approx 127 \text{ (МПа)}.$$

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot S(y)}{b(y) \cdot J_z} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 1,08.$$

Точка 3.

Ордината  $y = h/2 - t = 8,19$  см.

Ширина перерізу  $b(y) = s = 0,51$  см.

Статичний момент співпадає зі значенням у точці 2:  $S(y) = 62,66$  (см<sup>3</sup>).

$\sigma_3 = \sigma_2 = 127$  (МПа).

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot S(y)}{b(y) \cdot J_z} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{0,51 \cdot 10^{-2} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 19,05 \text{ (МПа)}.$$

Точка 4.

Ордината  $y = 0$ .

Ширина перерізу  $b(y) = s = 0,51$  см.

Статичний момент пів перерізу:  $S(y) = S^* = 81,4$  (см<sup>3</sup>).

$\sigma_4 = 0$ .

$$\tau_4 = \frac{Q \cdot S(y)}{b(y) \cdot J_z} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{0,51 \cdot 10^{-2} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 24,25 \text{ (МПа)}.$$

Епюри дотичних та нормальних напружень наведені на рис. 1.4.

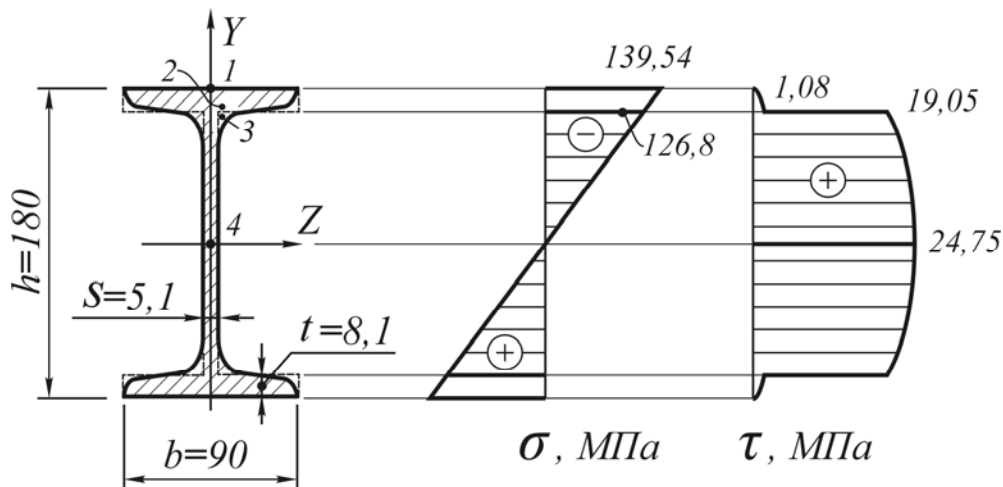


Рисунок 3.4 – Побудова епюр нормальних  $\sigma$  та дотичних  $\tau$  напружень

Головні напруження обчислюємо в точці 3:

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{126,8^2 + 4 \cdot 19,05^2} = 132,4 \text{ (МПа)}.$$

Отже,  $\sigma^{III} = 132,4$  МПа  $<$   $[\sigma] = 160$  МПа. Умова міцності виконується.

Варіанти індивідуальних завдань видаються викладачем згідно з додатком.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов/ Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. 775 с.
2. Ободовский Б. А. Сопротивление материалов в примерах и задачах / Б. А. Ободовский. – Харьков 1971. – 379 с.
3. Миролубов Н. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / Н. Н. Миролубов, С. А. Енгалигев, Н. Д.Сергиевский и др. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.:Высш. шк., 1985. – 399 с.



## ДОДАТОК: Варіанти індивідуальних завдань

