

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М.М. Чальцев
11. 07. 2011 р.

Кафедра «Опір матеріалів і будівельна механіка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ
РОБОТИ «РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ
НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ»
З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ
5.070.106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)**

10-32-2011-01

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія
факультету «Автомобільний транспорт»
Протокол № 10
від 21.06. 2011р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «СМ і СМ»
Протокол № 7
від 17.05. 2011р.

УДК.539.41(071)

Методичні вказівки з дисципліни «Опір матеріалів» до виконання розрахунково-проектувальної роботи «Розрахунок статично визначуваної балки на міцність та жорсткість» (для студентів напряму підготовки 5.070.106 «Автомобільний транспорт») [Електронний ресурс] /укладачі: М.М.Чальцев, Л.М.Хникін, В.О.Космак. – Електрон. дані – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Системні вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97-2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено короткі теоретичні відомості до розрахунку статично визначуваних балок на міцність і жорсткість та приклади виконаних завдань. Методичні вказівки містять варіанти індивідуальних завдань і довідкові матеріали.

Укладачі: Чальцев М.М., к.т.н., проф.
Хникін Л.М., к.т.н., доц.
Космак В.О., к.т.н., доц.

Відповідальний за випуск: Хникін Л.М., к.т.н., доц.
каф. «Опір матеріалів»

Рецензент: Крамар М.П., к.т.н., доц.
каф. «Технічна експлуатація
автомобілів»

©Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут, 2011.

ЗМІСТ

Загальні відомості	4
Короткі теоретичні відомості до розрахунку статично визначуваної балки на міцність і жорсткість.....	4
Приклад розрахунку балки на міцність і жорсткість	11
Розрахунок балки на жорсткість.....	14
Додаток А Балки двотаврові ДСТУ 8239-72	22
Додаток В Варіанти індивідуальних завдань	23

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Курс «Опір матеріалів» є однією з основних розрахункових дисциплін для студентів механіків і служить основою для розрахунку спеціальних дисциплін.

Виконання розрахунково–проектувальної роботи (РПР) дає можливість засвоїти і закріпити отримані в процесі її виконання теоретичні знання та практичні методи розрахунку.

Короткі теоретичні відомості до розрахунку статично визначуваної балки на міцність і жорсткість

З метою наочності аналізу напружено-деформованого стану балки будуються епюри: поперечних сил Q , згинальних моментів M , нормальних (σ) і дотичних (τ) напруг, кутів повороту (θ) і прогинів (y).

Для розрахунку на міцність нормальні напруги σ в довільній точці K поперечного перерізу балки можна обчислити за формулою (рис.1.1):

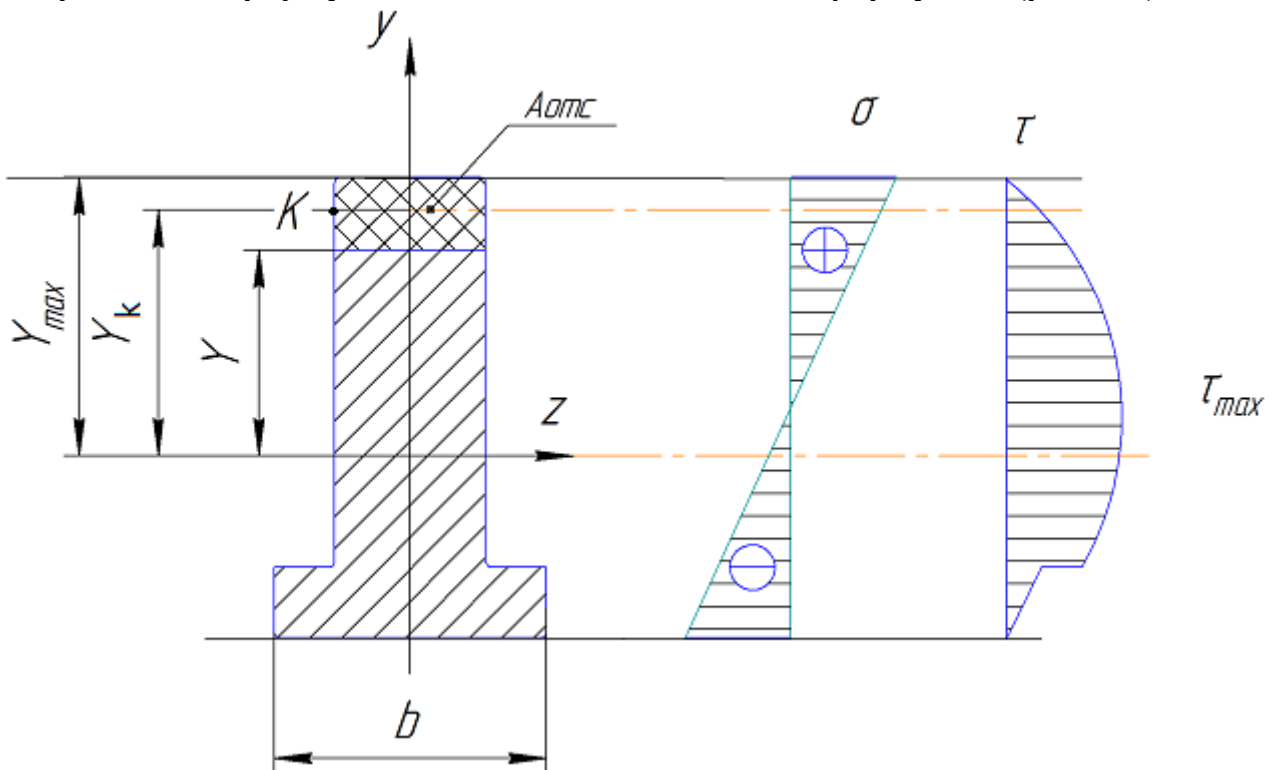


Рис 1.1 – Діаграми нормальних (σ) і дотичних (τ) напружень

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y_k}{I_z}, \quad (1.1)$$

де M_x – згинальний момент в перерізі, кНм;

y_k – координата точки, де обчислюються нормальні напруги, м;

I_z – осьовий момент інерції відносно вісі z , $см^4$.

Найбільші нормальні (за модулем) напруги виникають у найбільш віддалених точках перетину балок від центру ваги перерізу. Умова міцності за нормальною напругою для балок, матеріал яких однаково опирається розтягуванням і стисненням, має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_t} \leq [\sigma], \quad (1.2)$$

де $[\sigma]$ – напруга, що допускається під час розтягування (стиску);

M_{\max} – максимальний згинальний момент на епюрі M ;

W_z – момент опору перерізу, який визначається за формулою:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}. \quad (1.3)$$

У даному випадку y_{\max} – координата найбільш віддаленої точки від ц.в. перерізу. Дотичні напруги визначаються за формулою Д. І. Журавського:

$$\tau_p = \frac{Q \cdot S_z^{omc}}{b(y) \cdot I_z},$$

де $b(y)$ – ширина перерізу балки на рівні точок з координатами y ;

S_z^{omc} – статичний момент площі частини перерізу, розташованого вище рівня відсіченої частини:

$$S_z^{omc} = A_{omc} \cdot y_1. \quad (1.4)$$

Міцність балки за дотичним напруженням перевіряється за умови:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z^{полусеч.}}{b(y) \cdot I_z} \leq [\tau], \quad (1.5)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження матеріалу балки;

$S_z^{полусеч.}$ – статичний момент площі перерізу, розташований вище або нижче нейтральної вісі.

Балки з поперечним перерізом, в яких окремі елементи змінюються стрибкоподібно, наприклад, таврова, двотаврова балка або балка, складена з швелерів в місці різкої зміни ширини, перевіряється за теоріями міцності:

За третьою теорією
$$\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sqrt{\delta^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (1.6)$$

За четвертою теорією
$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\delta^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.7)$$

У даному випадку небезпечним є той переріз балки, де комбінація Q і M приймають досить великі значення.

З метою розрахунку балок на жорсткість будують епюри прогинів (y) і кутів повороту (θ) перетинів. У балках постійної жорсткості зручно користуватися універсальними рівняннями за методом початкових параметрів:

$$y_x = y_0 + Q_0 x + \frac{1}{El} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + \sum \frac{M(x-a_m)^2}{2} + \sum \frac{P(x-a_p)^3}{6} + \sum \frac{q(x-a_q)^4}{24} \right]$$

$$Q_x = Q_0 + \frac{1}{El} \left[M_0 \frac{x}{12} + Q_0 \frac{x^2}{2} + \sum M(x-a_m) + \sum \frac{P(x-a_p)^2}{2} + \sum \frac{q(x-a_q)^3}{6} \right], \quad (1.8)$$

де y_0, θ_0 – початкові параметри, прогин і кут повороту балки на початку координат (рис 1.2).

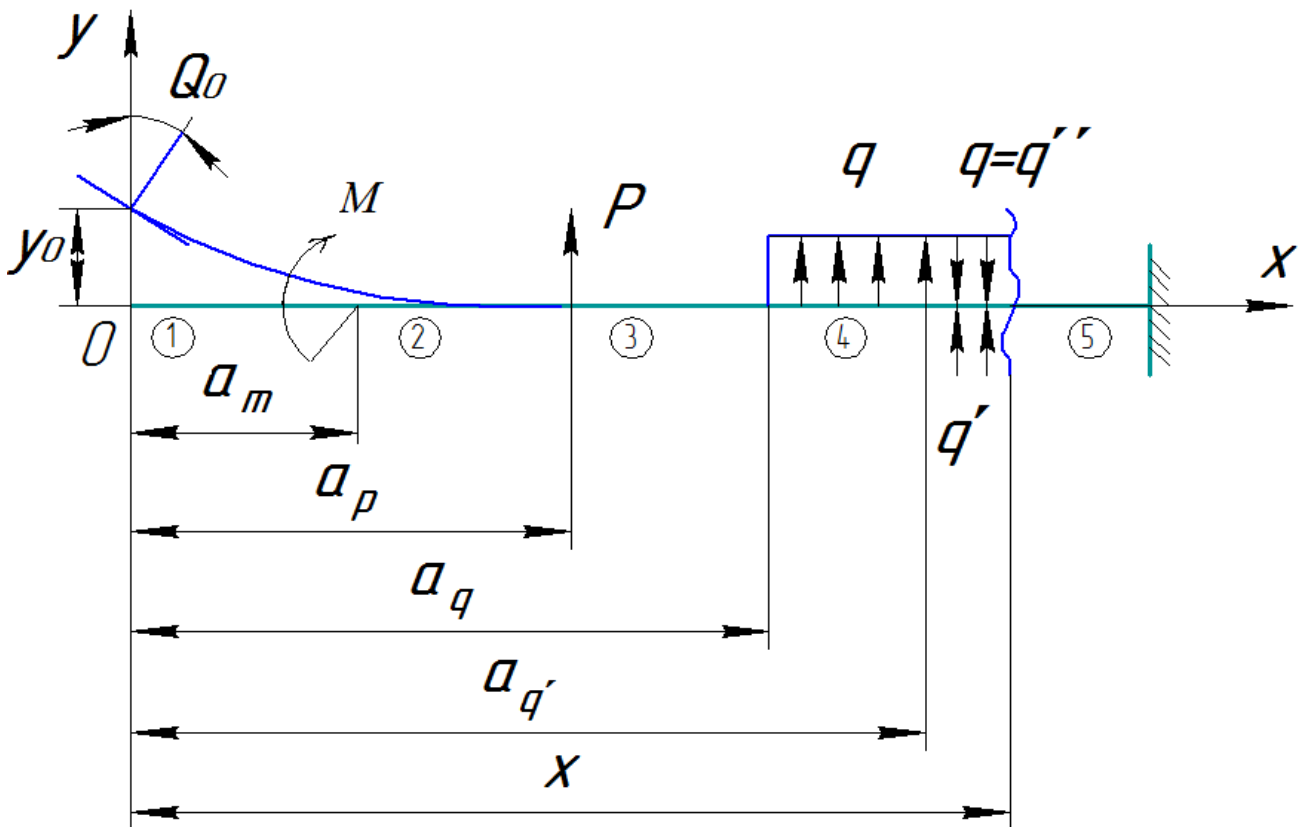


Рисунок 1.2 – До розрахунку балки за методом початкових параметрів

M , P , q – зосереджені моменти, сили та розподілені навантаження в прогині балки. Знак \sum вказує на те, що однотипних силових факторів може бути кілька, оскільки вплив їх всіх має бути обліково-алгебраїчною сумою. Причому знак додання цієї суми повинен збігатися зі знаком згинального моменту, викликаного даним силовим фактором.

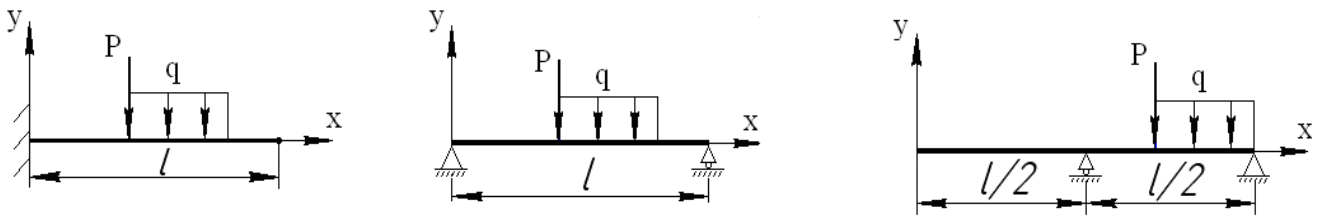
Під час переходу від однієї ділянки до іншої рівняння початкових параметрів записуються з урахуванням тих силових факторів, які розташовані зліва поточного перетину розглянутої ділянки. Внаслідок цього виходять аналітичні вирази для прогинів і кутів повороту на кожній ділянці. Переймаючись координатами точок відповідних ділянок, можна послідовно вивчити закономірність зміни прогинів і кутів повороту на кожному з них і побудувати епюри. При цьому слід використовувати співвідношення:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI}; \quad \frac{dy}{dx} = \Theta(x), \quad (1.9)$$

які дозволяють уточнити поведінку епюр на кожній ділянці. Так, якщо в деякій точці ділянки $M=0$, тоді $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, а це вказує на те, що ця точка є точкою перегину, де змінюється кривизна епюри прогинів, тобто опуклість на увігнутість і навпаки. Якщо в деякій точці $\frac{dy}{dx} = \Theta = 0$, то це вказує на наявність екстремуму функції прогину в цій точці.

Під час переходу через точки екстремуму на епюрі прогинів повинен змінюватися знак кутів повороту. Якщо на якійсь ділянці $M = 0$, кривизна вісі балки буде дорівнювати нулю. У цьому випадку точки вісі балки переміщуються, а вісь балки залишається прямолінійною. Кут повороту буде по всій довжині балки постійною величиною. Якщо на даній ділянці балки $\frac{dy}{dx} > 0$, то на цій ділянці функція прогинів y буде зростаючою, а при $\frac{dy}{dx} < 0$ – спадною.

Параметри y_0 і θ_0 знаходять з граничних умов (рис.1.3).



$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 \Theta(0) &= 0 \\
 y(0) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 \Theta(0) &\neq 0 \\
 y(0) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 \Theta(0) &\neq 0 \\
 y(0) &\neq 0
 \end{aligned}$$

Рисунок 1.3 – До визначення початкових параметрів y_0, θ_0

Умови жорсткості балки запишемо у вигляді:

$$y_{\max} = \frac{l}{K} \leq [f], \quad (1.10)$$

де $[f]$ – дозволений прогин балки, який визначається за нормами проектування;

l – довжина проекту балки;

K – коефіцієнт, що залежить від типу споруди або машини $\left(K = \frac{l}{200} \dots \frac{l}{800} \right)$.

Для обчислення переміщень за способом Верещагіна потрібно знати вирази площ і відстаней до центрів ваги тих постатей, які найчастіше зустрічаються в епюрах моментів. Ці дані наведено в табл. 1.1.

Крім методу початкових параметрів для визначення прогинів і кутів повороту, що застосовують для балок, є також енергетичний метод. Формула О. Мора застосовується для балок зі східчато-змінною жорсткістю і стрижнів з ламаною віссю.

$$\Delta = \sum \int_l \frac{M(x) \cdot \bar{M}(x)}{EI_z} dx, \quad (1.11)$$

де інтегрування поширюється на довжину l ділянки балки,

$M(x), \overline{M}(x)$ – вираження згинальних моментів у вантажному та одиничному стані відповідно. Якщо згинальна жорсткість EI_z балки постійна, то інтегрування можна замінити виразом:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega \cdot y_c}{EI_{zi}}, \quad (1.12)$$

де $\sum_{i=1}^n$ – підсумовування виконується по всіх ділянках системи;

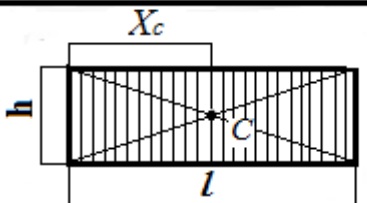
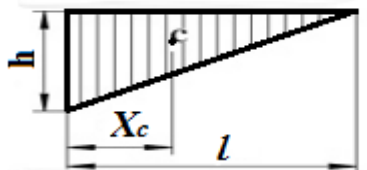
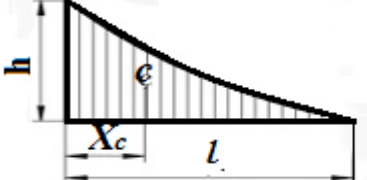
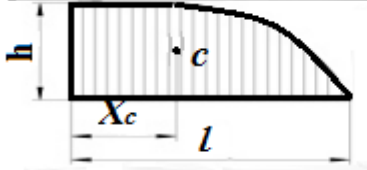
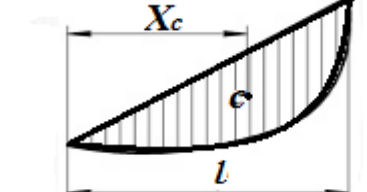
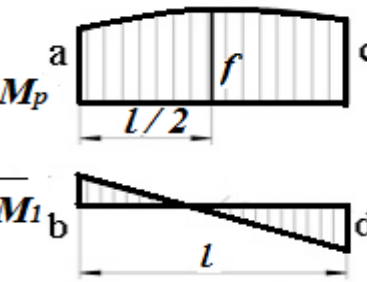
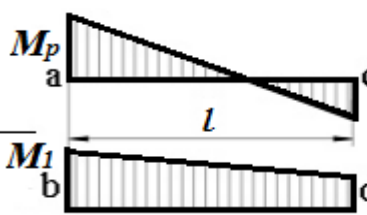
ω – площа епюри вантажного стану, яка будується від зовнішнього навантаження;

y_c – ордината одиничного навантаження, побудована від одиничної сили $\overline{P}=1$ або одиничного моменту $\overline{M}_{(x)}=1$ (безрозмірних), які прикладаються в перетинах, де потрібно визначити або прогин, або кут повороту відповідно. Ординати y_c обчислюються під центром ваги епюри (ω) вантажного стану.

Під Δ слід розуміти прогин або кут повороту, від цього і вибирається одиничний стан; (під час визначення прогину – одинична сила, ($\overline{P}=1$), під час визначення кута повороту – одинична пара, ($\overline{M}=1$)). Цей метод запропоновано А. М. Верещагіним у 1825 році.

Для визначення переміщень за методом Верещагіна потрібно знати вирази площ і відстані до центра ваги тих фігур, які найбільш зустрічаються в епюрах моментів. Ці дані наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1–Визначення площ вантажних епюр та їх центрів ваги

Фігури	Площа епюр, ω	X_c -коор. ц.в. епюри
	lh	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$
	$\frac{lh}{3}$	$\frac{l}{4}$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$
	$\frac{2}{3}lh = \frac{q^*l^3}{12}$ $q^* = const$	$\frac{l}{2}$
	$\sum \omega y_i = \frac{l}{6}(ab + 4fq + cd)$	
	$\sum \omega y_i = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)$	

У цій таблиці q^* – інтенсивність розподіленого навантаження;

a, b, c, d, f, q – ординати епюр вантажних і одиничних моментів зі своїми знаками.

Приклад розрахунку балки на міцність і жорсткість

Для заданої балки (рис. 1.4) побудувати епюри поперечних сил $Q(x)$ і згинальних моментів $M(x)$. Провести підбір балок трьох типів перерізів: двотаврової, з двох швелерів і круглої. Виконати повну перевірку міцності двотаврової балки. У розрахунку прийняти: допустимі нормальні напруги $[\sigma]=160$ МПа, допустимі дотичні напруги $[\tau]=90$ МПа.

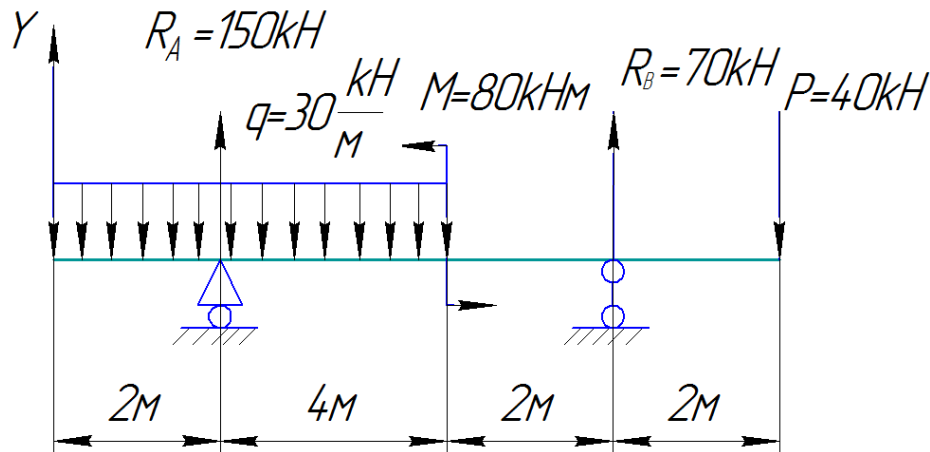


Рисунок 1.4 – До розрахунку статично визначуваної балки на міцність

2.1 Визначення реакцій опор балки

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 6 + 30 \cdot 6 \cdot 5 + 80 - 40 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_A = 150 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 6 - 40 \cdot 8 - 30 \cdot 6 \cdot 1 + 80 = 0 \Rightarrow R_B = 70 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\sum y = 0 \quad 150 + 70 - 30 \cdot 6 - 40 = 0.$

2.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Записуємо рівняння поперечних сил Q і згинальних моментів M :

а) Ділянка 1 $0 \leq x \leq 2$ м;

$$Q(x) = -qx; \quad Q(0) = 0; \quad Q(2) = -60 \text{ кН}.$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}; \quad M(0) = 0; \quad M(2) = -\frac{30 \cdot 2^2}{2} = -50 \text{ кНм}.$$

б) Ділянка 2 $0 \leq x \leq 4$ м;

$$Q(x) = -q(2+x) + A; \quad Q(0) = -30 \cdot 2 + 150 = 90 \text{ кН};$$

$$M(x) = -q \frac{(x+2)^2}{2} + R_A - \text{квадратна парабола}$$

$$\left(\frac{dM}{dx} \right)_{x_0} = Q(x_0) = -30(2+x_0) + A = 0 \Rightarrow x_0 = 3 \text{ м}, \quad Q(4) = -30 \text{ кН};$$

$$M(0) = -60 \text{ кНм}, \quad M(3) = 75 \text{ кНм}, \quad M(4) = 60 \text{ кНм}.$$

в) Ділянка 3 $0 \leq x \leq 2\text{м}$;

$$Q(x) = P = 40 \text{ кН} = \text{const},$$

$$M(x) = Px; \quad M(0) = 0; \quad M(2) = -80 \text{ кНм}.$$

г) Ділянка 4 $0 \leq x \leq 2\text{м}$;

$$Q(x) = P - R_B = 40 - 70 = -30 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M(x) = -P(2 + x) + R_B; \quad M(x) = -60 \text{ кНм}, \quad M(2) = -20 \text{ кНм}.$$

2.3 Визначення розмірів поперечних перерізів балки

Необхідний момент опору двох швелерів визначимо за найбільшим згинальним моментом:

$$M_{\max} = 80 \text{ кНм}.$$

Із умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_e} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z^{mp} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cdot 10^6 = 500 \text{ см}^3.$$

За сортаментом приймаємо швелер № 24а з найближчим більшим $W_z^{mp} = 265 \text{ см}^3$.

$$\text{Загальна площа } F_n = 2 \cdot F_c = 2 \cdot 32,9 = 65,8 \text{ см}^2$$

Знайдемо діаметр круглого перерізу

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 500}{3,14}} = 17,2 \text{ см}.$$

Площа перерізу балки

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 17,2^2}{4} = 232 \text{ см}^2.$$

За необхідним моментом опору, використовуючи сортамент (ДСТУ 8239-72), підбираємо номер двотавра, відповідно до додатка А:

$$W_z^1 = 518 \text{ см}^3, \quad I_z = 7780 \text{ см}^4, \quad v = 14,5 \text{ см}, \quad h = 30 \text{ см}, \quad d = 0,65 \text{ см}, \quad t = 1,07 \text{ см},$$

$$F = 49,9 \text{ см}^2, \quad S_z^{\text{полусеч}} = 292 \text{ см}^3,$$

що відповідає двотавру № 30.

2.4 Перевірка двотаврової балки на міцність

Перевіряємо міцність двотаврової балки за дотичними напруженнями, використовуючи формулу Журавського:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z^{\text{полусеч}}}{d \cdot I_z} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7780 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 52 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Міцність балки за дотичними напруженнями забезпечено.

5. Дослідження напруженого стану балки в небезпечному перерізі.

Небезпечним буде перетин, розташований правіше від опори А, де $M = -60 \text{ кНм}$, $Q = -90 \text{ кН}$. Небезпечною точкою в небезпечному перерізі буде точка 2, де стикаються полка зі стінкою, причому ця точка лежить на стінці.

2.5 Побудова епюр нормальних і дотичних напружень в небезпечному перерізі. Нормальні напруження в точці 2'

$$\sigma_{(2')} = -\frac{M \cdot y_{(2')}}{I_z} = -\frac{-60 \cdot 10^3 \cdot (15 - 1,07) \cdot 10^{-2}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 107,4 \text{ МПа.}$$

У точці 1

$$\sigma_{(1)} = -\frac{M \cdot y_{(1)}}{I_z} = -\frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 116 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруги в точці 2

$$\tau_{(2')} = \frac{Q \cdot S_z^{омс}}{d \cdot I_z} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot (15 - \frac{1,07}{2}) \cdot 14,5 \cdot 1,07 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7780 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6} = 39,9 \text{ МПа.}$$

У точці 2 за аналогією отримаємо $\tau_{(2)} = 1,79 \text{ МПа}$, $\tau_{(3)} = 52 \text{ МПа}$.

2.6 Перевірка міцності балки за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{(2')}^{екв} = \sqrt{\sigma_{(2')}^2 + 3\tau_{(2')}^2} = \sqrt{107,4^2 + 3 \cdot 39,9^2} = 127 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Епюри σ і τ показано на рис. 1.5.

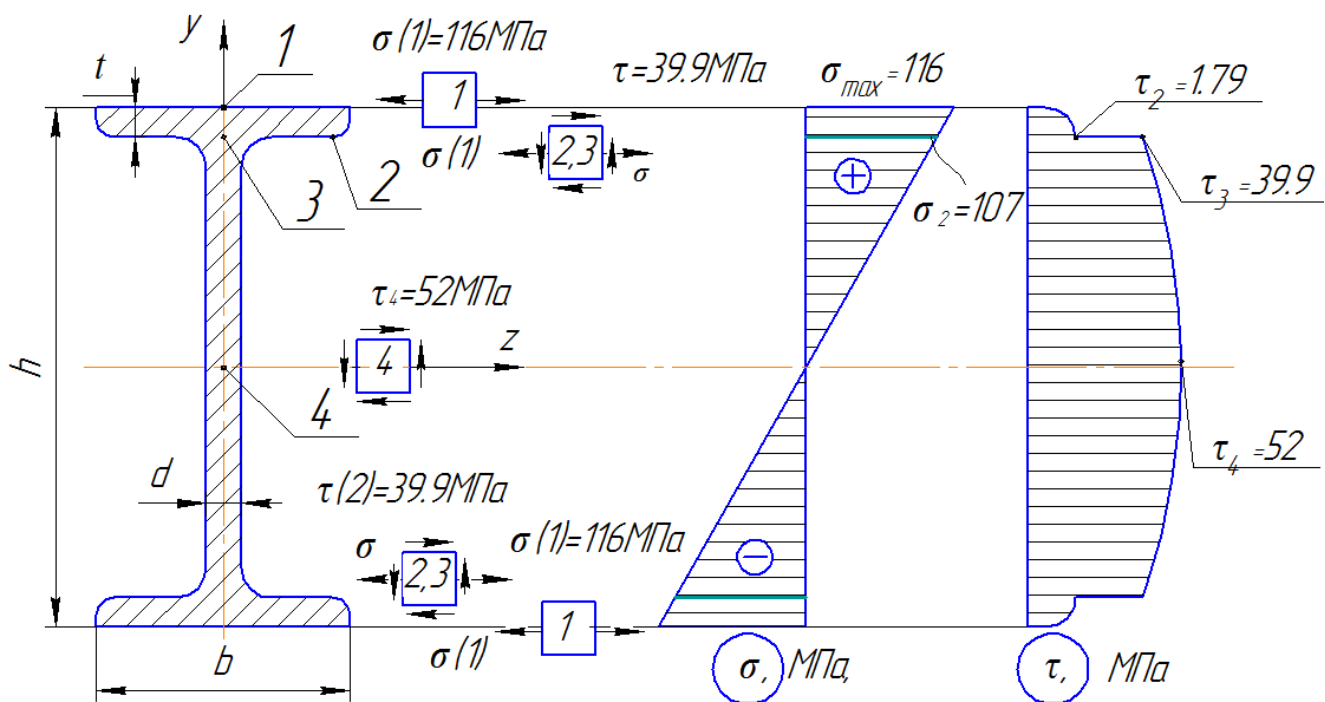


Рисунок 1.5 – Епюри σ і τ для двотаврового перерізу

Зобразимо напружений стан у кожній характерній точці. У точці 1 матеріал балки відчуває, як видно з епюр σ і τ , просте розтягнення, тому міцність перевірено за формулою (1.2).

У плоскому напруженому стані знаходиться матеріал в точці 2. Тому розрахунок на міцність тут виконано за четвертою теорією міцності. Чистий зсув відчувають точки 4, що належать нейтральній вісі балки. Це і обумовила перевірка міцності за дотичними напруженнями.

2.7 Порівняння металоємності балок різних форм перетинів

Відношення площ

$$\frac{F_1}{F_1} : \frac{F_n}{F_1} : \frac{F_0}{F_1} = 1 : \frac{65,8}{49,9} : \frac{232}{49,9} = 1 : 1,3 : 4,65.$$

Отримані результати свідчать про те, що найбільш економічною за металоємністю є двотаврова балка і найменш економічною – кругла. На 30% у порівнянні з двотавровою виходить перевитрата матеріалу під час використання швелерів.

Розрахунок балки на жорсткість

Визначити кути повороту і прогини для двотаврової балки за методом початкових параметрів і знайти за способом перемноження епюр А.Н.Верещагіна прогин і кут повороту одного перерізу. Виконати перевірку жорсткості балки.

3.1 Побудова епюр прогинів і кутів повороту

Для побудови епюр прогинів і кутів повороту скористаємося методом початкових параметрів. Початок координат виберемо в крайній лівій точці балки (рис.1.6).

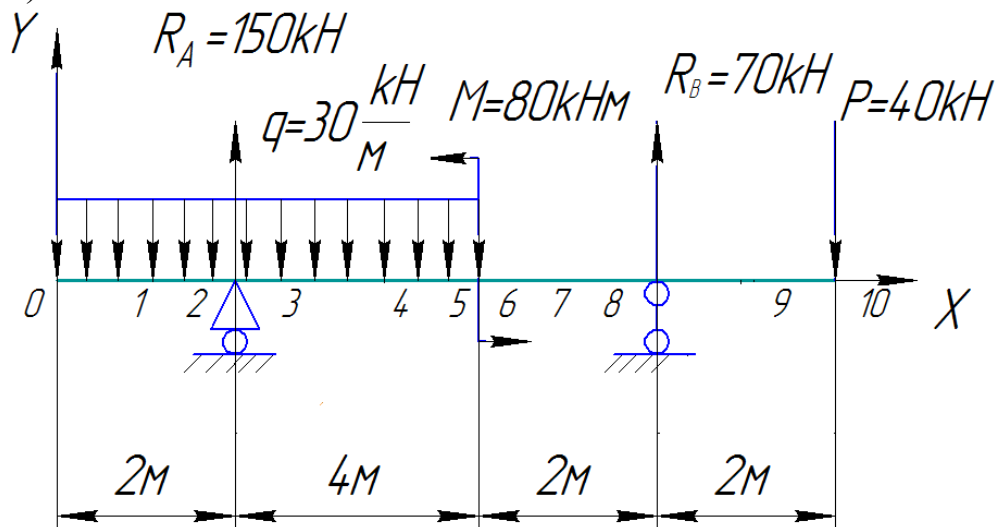


Рисунок 1.6 – До розрахунку балки на жорсткість за методом початкових параметрів

Розбиваємо балку на ділянки і для кожної з них записуємо рівняння кутів повороту і прогинів:

$$y = y_0 + \theta + \frac{1}{EI} \left[\frac{q(x-6)^4}{24} \Big|_0^1 + \frac{R_A(x-2)^3}{6} \Big|_0^2 + \frac{q(x-6)^3}{6} - \frac{M(x-6)^3}{2} \Big|_2^3 + \frac{R_A(x-8)^3}{6} \Big|_2^4 \right];$$

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = \theta + \frac{1}{EI} \left[\frac{q(x-0)^3}{0} \Big|_0^1 + \frac{R_A(x-2)^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{q(x-6)}{6} - M(x-6) \Big|_2^3 + \frac{R_A(x-8)^2}{2} \Big|_2^4 \right].$$

Формулювання граничних умов:

при $x=2\text{м}$; і $x=8\text{м}$ $y=0$.

3.2 Визначення початкових параметрів y_0, θ_0

Користуючись граничними умовами, складаємо вираження прогинів для визначення початкових параметрів y_0, θ_0 . Так, для т. А ($x=2\text{м}$) та В ($x=8\text{м}$) маємо рівняння прогинів:

$$y_0 + \theta_0 \cdot 2 + \left[\frac{-q(2-0)^4}{24} \right] \cdot \frac{1}{EI} = 0;$$

$$y_0 + \theta_0 \cdot 8 + \left[\frac{-q(8-0)^4}{24} + \frac{q(8-6)^4}{24} + \frac{R_A(8-2)^3}{6} + \frac{M(8-6)^2}{2} \right] \cdot EI = 0.$$

Або з урахуванням вихідних даних:

$$y_0 + 2\theta_0 = \frac{90(2-0)^4}{24EI};$$

$$y_0 + 8\theta_0 = \frac{1}{EI} \left[\frac{30(8-0)^4}{24} - \frac{30(8-6)^4}{24} - \frac{150(8-6)^3}{6} + \frac{80(8-6)^2}{2} \right].$$

Вирішуючи спільно систему, визначаємо:

$$y_0 = \frac{73,334}{EI}; \quad \theta_0 = \frac{-26,667}{EI}.$$

3.3 Побудова епюр кутів повороту

Визначаємо кути повороту в характерних перерізах балки:

$$\Theta_{4.5} = 0$$

$$-26,667 - \frac{30(x-0)^3}{6} + \frac{150(x-2)^2}{2} = 0;$$

$$5x^3 + 75x^2 - 300x + 273,33 = 0;$$

$$x_2 = 4,6808.$$

$$\text{- в точці 0} \quad \theta_0 = \frac{-26,667}{EI};$$

$$\text{- в точці 1} \quad \theta_1 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(1-0)^3}{6} \right] = \frac{-31,67}{EI};$$

$$\text{- в точці 2} \quad \theta_2 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(2-0)^3}{6} \right] = \frac{-66,67}{EI};$$

$$\text{- в точці 3} \quad \theta_3 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(3-0)^3}{6} + \frac{150(3-2)^2}{2} \right] = \frac{-86,67}{EI};$$

$$\text{- в точці 4} \quad \theta_4 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(4-0)^3}{6} + \frac{150(4-2)^2}{2} \right] = \frac{-46,67}{EI};$$

$$\text{- в точці 5} \quad \theta_5 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(5-0)^3}{6} + \frac{150(5-2)^2}{2} \right] = \frac{23,33}{EI}.$$

Результати розрахунку показують, що на другій ділянці між т.4 і т.5 є нульова точка, її положення можна визначити шляхом розв'язання кубічного рівняння.

$$\theta_0 = 0;$$

$$-26,667 - \frac{30(x-0)^3}{6} + \frac{150(x-2)^2}{2} = 0;$$

$$5x^3 + 75x^2 - 300x + 273,33 = 0;$$

$$x_1 = 4,68684.$$

$$\text{- в точці 6} \quad \theta_6 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(6-0)^3}{6} + \frac{150(6-2)^2}{2} \right] = \frac{93,33}{EI};$$

- в точці 7

$$\theta_7 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(7-0)^3}{6} + \frac{150(7-2)^2}{2} + \frac{30 \cdot (7-6)^3}{6} - 80 \cdot (7-6) \right] = \frac{58,33}{EI};$$

- в точці 8

$$\theta_8 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(8-0)^3}{6} + \frac{150(8-2)^2}{2} + \frac{30 \cdot (8-6)^3}{6} - 80 \cdot (8-6) \right] = \frac{6,67}{EI};$$

- в точці 9

$$\theta_9 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 + \frac{30(9-0)^3}{6} + \frac{150(9-2)^2}{2} + \frac{30 \cdot (9-6)^3}{6} - 80 \cdot (9-6) + \frac{70 \cdot (9-8)^2}{2} \right] = \frac{-66,67}{EI};$$

- в точці 10

$$\theta_{10} = \frac{1}{EI} \left[-26,667 + \frac{30(10-0)^3}{6} + \frac{150(10-2)^2}{2} + \frac{30 \cdot (10-6)^3}{6} - 80 \cdot (10-6) + \frac{70(10-8)^2}{2} \right] = \frac{-86,67}{EI}.$$

Між точками 7 і 8 знаходимо нульову точку

$$\theta_0 = \frac{1}{EI} \left[-26,667 - \frac{30(x-0)^3}{6} + \frac{30 \cdot (x-6)^3}{6} + \frac{150(x-2)^2}{2} - 80 \cdot (x-6) \right] = 0;$$

$$x_1 = 7,9115.$$

Епюру кутів повороту показано на рис. 1.7.

3.4 Побудова епюри прогинів

Для побудови епюри прогинів визначаємо їх у всіх характерних точках. Ними є точки на граничних ділянках та нульові точки на епюрі кутів повороту, в яких прогини приймають екстремальні значення.

Обчислення прогинів дає наступні результати:

$$\text{- в точці 0 } y_0 = \frac{73,334}{EI};$$

$$\text{- в точці 1 } y_1 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 - \frac{30(1-0)^4}{24} \right] = \frac{45,417}{EI};$$

$$\text{- в точці 2 } y_2 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 2 - \frac{30(2-0)^4}{24} \right] = 0;$$

$$\text{- в точці 3 } y_3 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 3 - \frac{30(3-0)^4}{24} + \frac{150(3-2)^3}{6} \right] = \frac{82,912}{EI};$$

$$\text{- в точці 4 } y_4 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 4 - \frac{30(4-0)^4}{24} + \frac{150(4-2)^3}{6} \right] = \frac{-153,334}{EI};$$

$$\text{- в точці 5 } y_5 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 5 - \frac{30(5-0)^4}{24} + \frac{150(5-2)^3}{6} \right] = \frac{-166,257}{EI};$$

$$\text{- в точці 6 } y_6 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 6 - \frac{30(6-0)^4}{24} + \frac{150(6-2)^3}{6} \right] = \frac{-166,667}{EI};$$

- в точці 7

$$y_7 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 7 - \frac{30(7-0)^4}{24} + \frac{30(7-6)^4}{24} + \frac{150(7-2)^3}{6} \right] = \frac{-39,583}{EI};$$

- в точці 8

$$y_8 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 8 - \frac{30(8-0)^4}{24} + \frac{30(8-6)^4}{24} + \frac{150(8-2)^3}{6} - \frac{80 \cdot (8-6)^2}{2} \right] = 0;$$

- в точці 9

$$y_9 = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 9 - \frac{30(9-0)^4}{24} + \frac{30(9-6)^4}{24} + \frac{150(9-2)^3}{6} - \frac{80(9-2)^2}{2} + \frac{70(10-8)^3}{6} \right] = \frac{40,39}{EI};$$

- в точці 10

$$y_{10} = \frac{1}{EI} \left[73,334 - 26,667 \cdot 10 - \frac{30(10-0)^4}{24} + \frac{30(10-6)^4}{24} + \frac{150(10-2)^3}{6} - \frac{80 \cdot (9-6)^2}{2} + \frac{70 \cdot (10-8)^3}{6} \right] = \frac{120}{EI}.$$

Епюру прогинів побудовано на рис 1.7.

Нахил нормалі в кожній точці епюри прогинів повинен відповідати знаку і величині ординати на епюрі кутів повороту. Додатні прогини збігаються з додатним напрямом осі y , тобто вгору, додатний кут нахилу перерізу балки відповідає повороту нормалі від недеформованого стану в деформований проти стрілки годинника.

3.5. Виконуємо перевірку балки на жорсткість за умовою:

$$y_{\max} = \frac{1}{600} l = kl \leq [f],$$

де $[f]$ – дозволений прогин балки, який визначається за нормами проектування;

K – коефіцієнт, що залежить від споруджуваної споруди;

l – довжина прольоту.

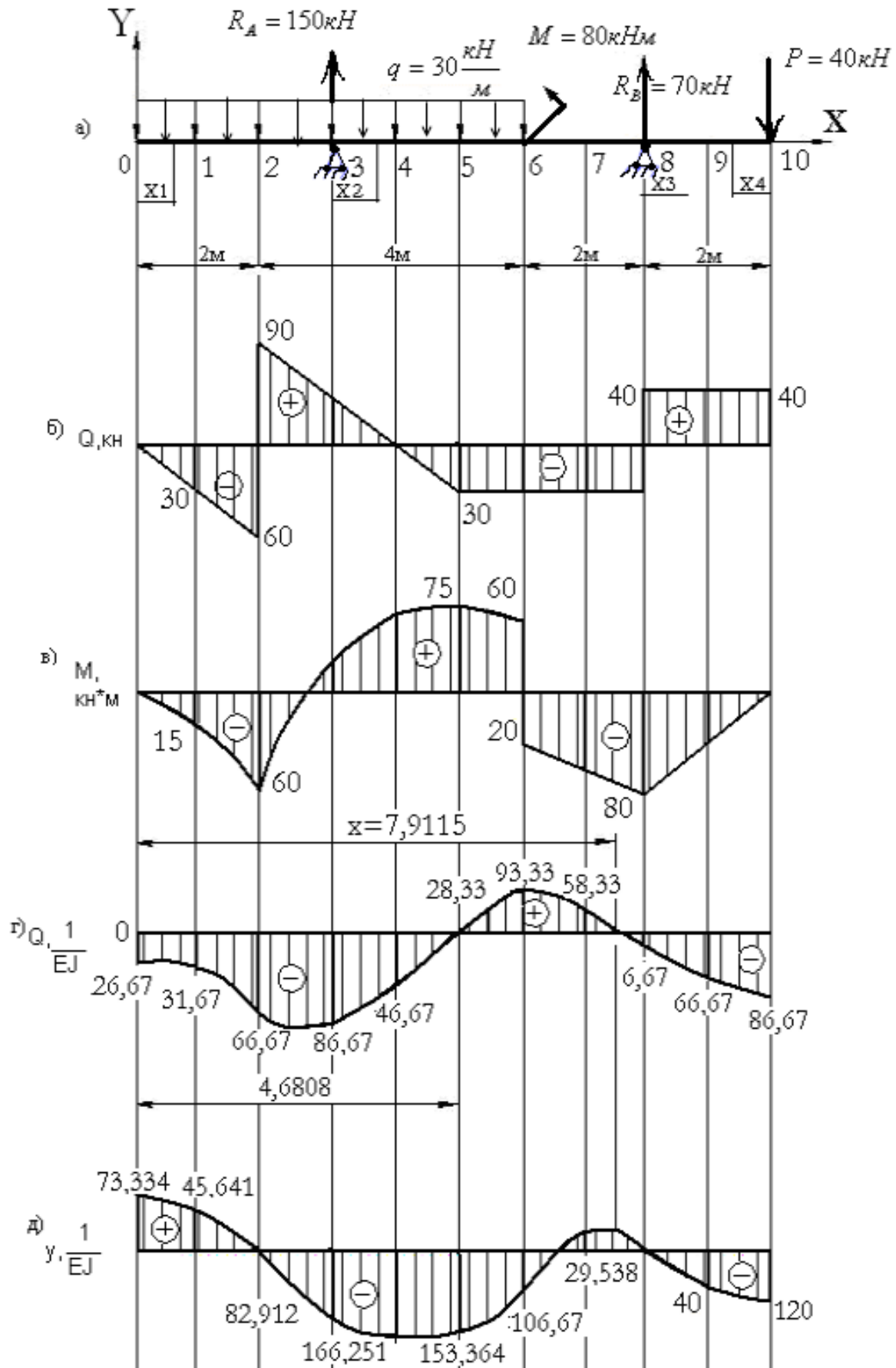


Рисунок 1.7– Розрахункова схема і епюри внутрішніх зусиль і переміщень

В якості y_{\max} в даному прикладі приймаємо максимальне значення прогину балки

$$y_{\max} = \frac{166,251 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^8 \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = 0,01068 \cdot 10^3 \text{ м} = 1,06 \text{ см}.$$

В даному прикладі приймаємо, що $k = \frac{1}{600}$, $l = 600$ см, тоді отримаємо

$$[f] = \frac{l}{600} = \frac{600}{600} = 1 \text{ см}.$$

Як бачимо, умова жорсткості не виконується. Отже, треба визначити момент інерції I_z балки, щоб

$$I_z^{mp} = \frac{166,251 \cdot 10^3}{E[f]} = \frac{166,75}{2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 83,375 \cdot 10^8 = 8337,5 \text{ см}^4.$$

За сортаментом вибираємо двотавр №33 $I_z^{\text{факт}} = 9840 \text{ см}^4$. Таким чином, остаточно приймаємо розмір двотавра не з умови міцності, а з умови жорсткості.

3.6 Визначення переміщень за способом перемноження епюр

За правилом множення епюр визначаємо прогин в точці К ($x=10$ м) (рис.1.8).

а) Для визначення прогину в т. К від заданого навантаження вантажна епюра має вигляд, показаний на рис. 1.9. Одиничний стан виберемо шляхом прикладання сили $\bar{P} = 1$ в точці К і побудуємо епюру \bar{M}_1 на рисунку 1.9.

$$y_k = M_p \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EI} \sum w_{yc} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (60 \cdot 0 - 4 \cdot 60 \cdot \frac{4}{3} - 60 \cdot \frac{4}{3}) + 3(2 \cdot 20 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 80 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 80 \cdot \frac{4}{3}) + 1 \cdot 80 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{-480}{3} + \frac{520}{3} + \frac{320}{3} \right] = 120 \cdot EI^{-1},$$

де $f = M_x = 4 = -g \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 2 = -30 \cdot 4 \cdot 2 + 150 \cdot 2 = 60 \text{ кНм}$;

$$\Theta_k = M_p \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EI} \sum w_{yc} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (60 \cdot 0 - 4 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} - 60 \cdot \frac{2}{3}) + \frac{2}{6} (2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 80 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 80 \cdot \frac{2}{3}) + \frac{2}{6} (2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 80 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 80 \cdot \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 1 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{-240}{3} + \frac{260}{3} + \frac{2400}{3} \right] = \frac{260}{3EI} = 86,667 \cdot EI^{-1}.$$

Знаки результатів y_k і θ_k вказують на збіг переміщень з напрямком одиничної сили і одиничного моменту відповідно. Такі величини переміщень отримано раніше за методом початкових параметрів.

Тоді відповідно до формул (1.11) і (1.12)

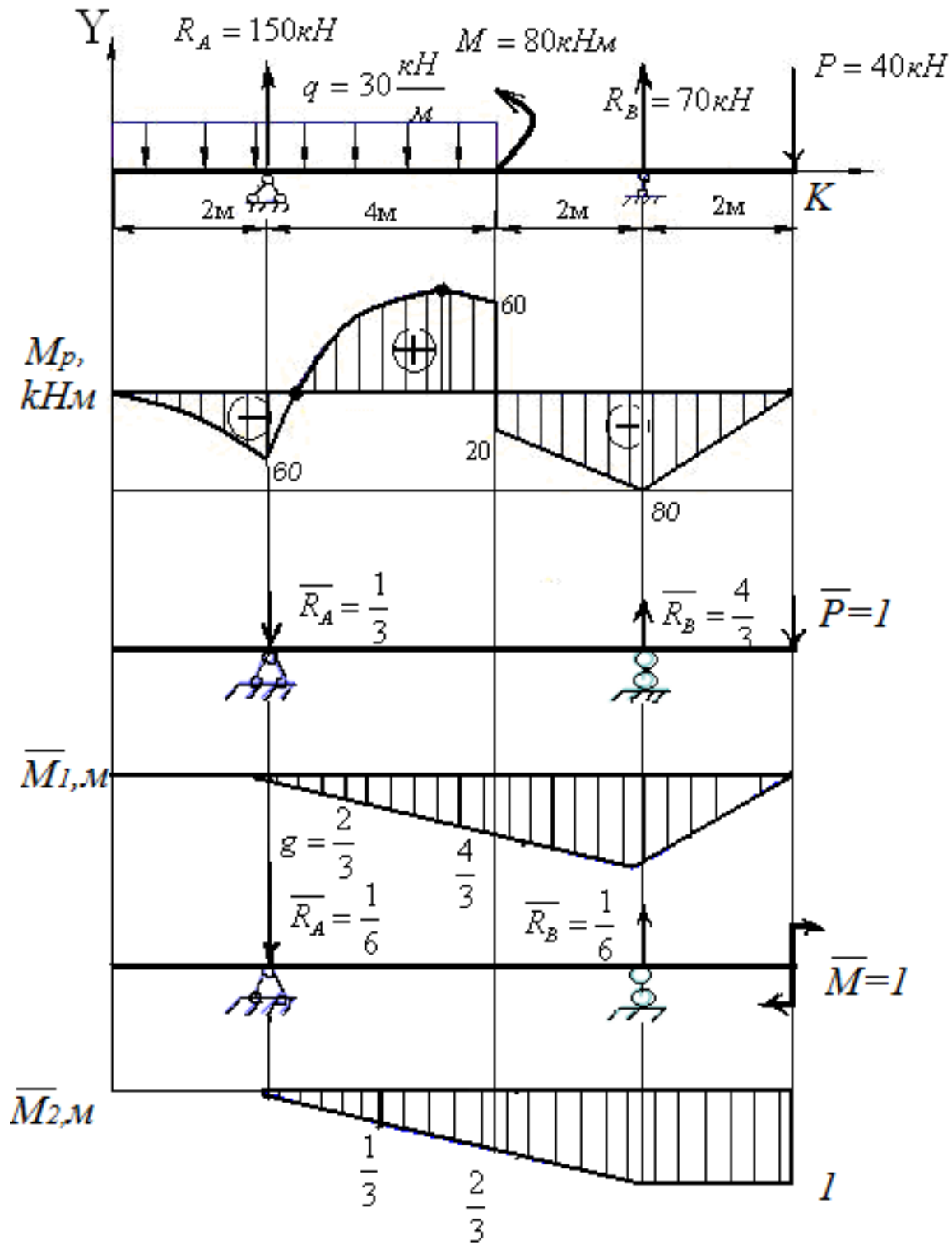
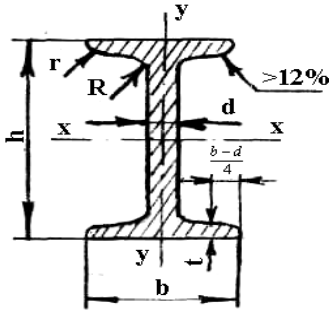


Рисунок 1.8–Визначення прогину і кута повороту від заданого навантаження
 Варіанти індивідуальних завдань до виконання розрахунково–
 проектувальної роботи видаються викладачем відповідно до додатку В.

Додаток А



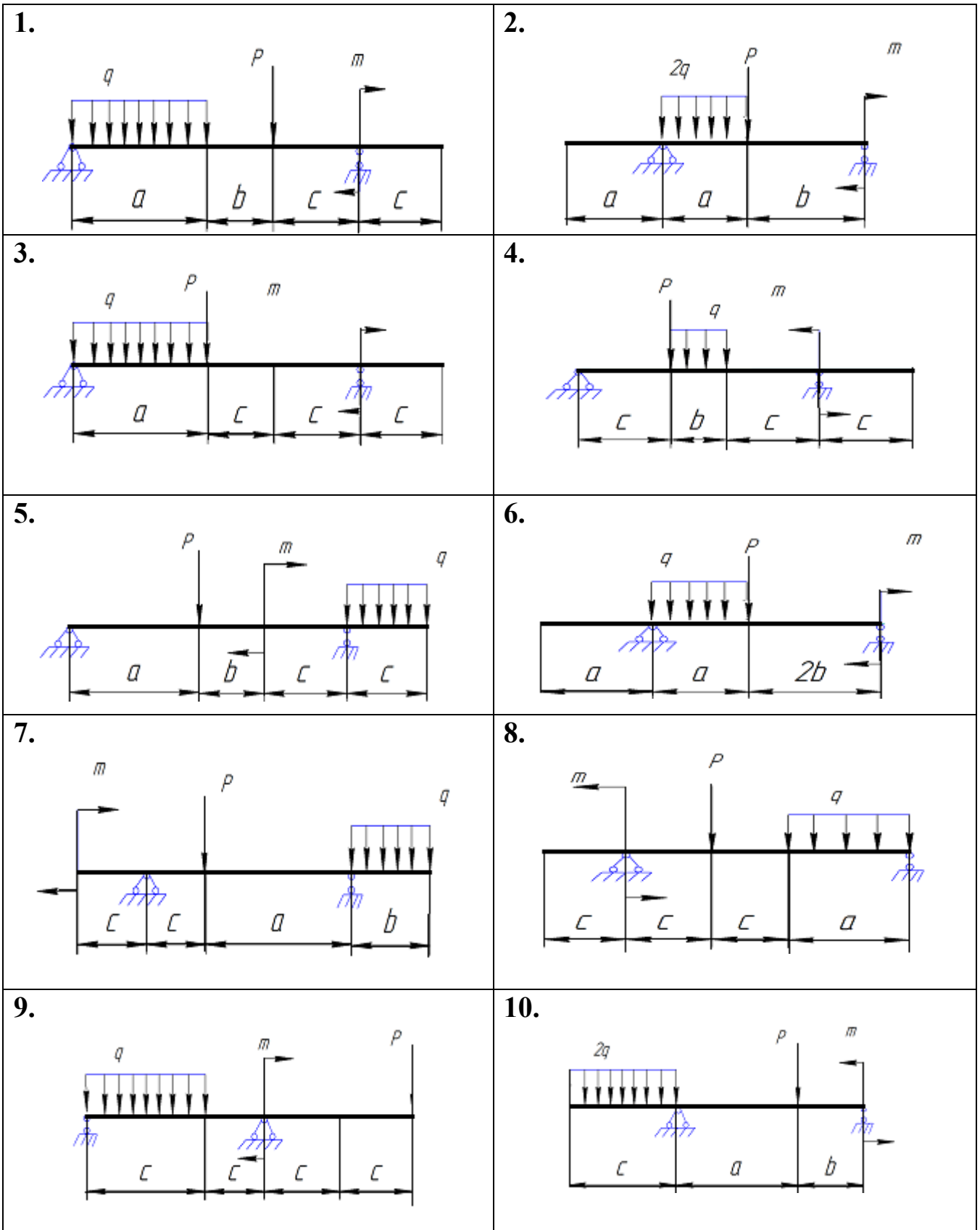
БАЛКИ ДВОТАВРОВІ (згідно з ДСТУ 8239-72)

h – висота балки ; I – момент інерції ;
 b – ширина балки ; W – момент опору ;
 d – товщина стінки ; I – радіус інерції ;
 t – середня товщина полки ; S – статичний момент напівперерізу ;

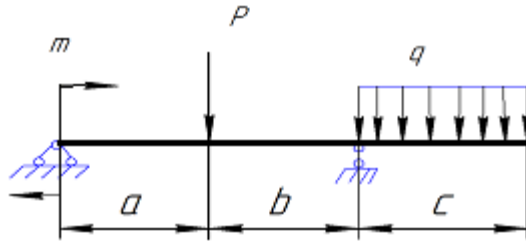
№	Розміри, мм				A, см ²	Довідкові величини для вісей							
	h	b	d	t		z-z				y-y			
						I_z	W_z	i_z	S_z	I_y	W_y	i_y	Маса, кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12	198	39.7	4.06	23	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.65	13.7
16	160	81	5	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.7	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.2	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
18a	180	100	5.1	8.3	25.4	1430	159	7.51	89.8	114	22.8	2.12	19.9
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21
20a	200	110	5.2	8.6	28.9	2030	203	8.37	114	155	28.2	2.32	22.7
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24
22a	220	120	5.4	8.9	32.8	2790	254	9.22	143	206	34.3	2.5	25.8
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
24a	240	125	5.6	9.8	37.5	3800	317	10.1	178	260	41.6	2.63	29.4
27	270	125	6	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
27a	270	135	6	10.2	43.2	5500	407	11.3	229	337	50	2.8	33.9
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
30a	300	145	6.5	10.7	49.9	7780	518	12.5	292	436	60.1	2.95	39.2
33	330	140	7	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13	72.6	19062	963	16.2	545	667	86.1	3.03	57
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	196	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Додаток В

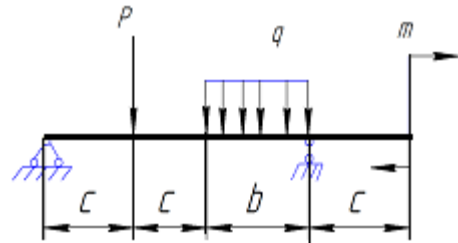
Варіанти індивідуальних завдань



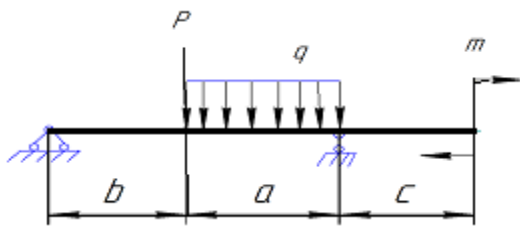
11.



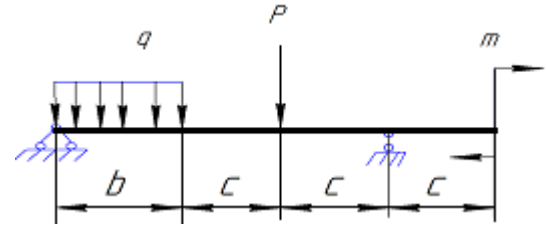
12.



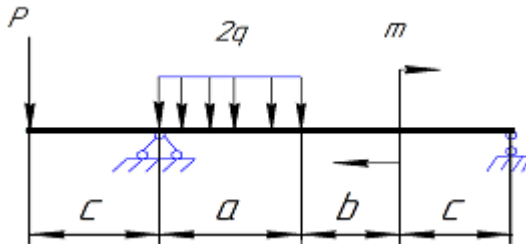
13.



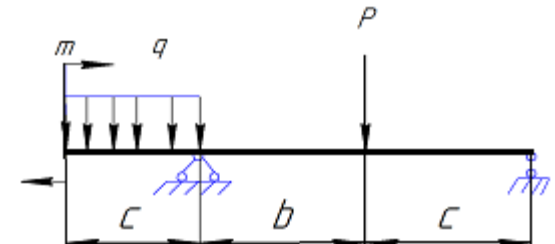
14.



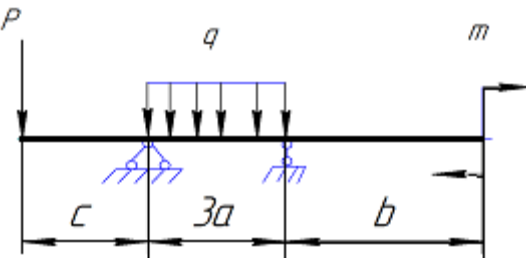
15.



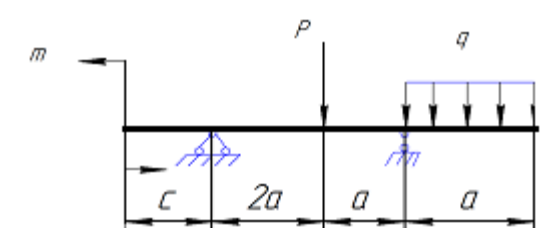
16.



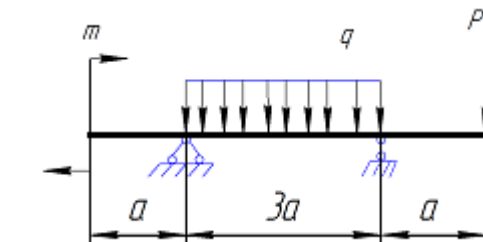
17.



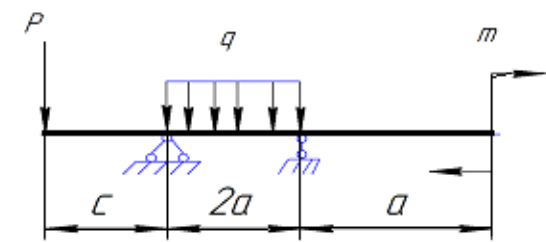
18.



19.



20.



<p>21.</p>	<p>22.</p>
<p>23.</p>	<p>24.</p>
<p>25.</p>	<p>26.</p>
<p>27.</p>	<p>28.</p>
<p>29.</p>	<p>30.</p>

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Чальцев Михайло Миколайович
Хникін Леонід Михайлович
Космак Володимир Олексійович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ
«РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ
ТА ЖОРСТКІСТЬ» З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 5.070.106
«АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)

Підписано до випуску 11.07.2011 р. Гарнітура Times New.
Умов. друк. арк. 1,63. Зам. № 199.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E-mail: druknf@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.