

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М.М. Чальцев
____.____.20__ р.

Кафедра «Опір матеріалів і будівельна механіка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ
«РОЗРАХУНОК ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ І ПОБУДОВА ЇХ ЕПЮР»
З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ 6.070106, 6.060101
СПЕЦІАЛЬНОСТІ «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»,
«АВТОМОБІЛЬНІ ДОРОГИ І АЕРОДРОМИ»)

10/31-2011-01

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична
комісія факультету
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 10
від «21» 06.2011р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Опір матеріалів
і будівельна механіка»
Протокол №7
від «17» 05.2011р.

Горлівка – 2011

УДК 539. 41 (071)

Методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальної роботи «Розрахунок внутрішніх зусиль і побудова їх епюр» з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів напряму підготовки 6.070106, 6.060101 «Автомобільний транспорт», «Автомобільні дороги і аеродроми») [Електронний ресурс] / укладачі: М.М. Чальцев, Л.М. Хникін, В.О. Космак. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97-2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено короткі теоретичні викладки, методики розрахунків внутрішніх зусиль, варіанти завдань. Розглянуто прийоми і техніка виконання розрахунків.

Укладачі:

Чальцев М.М., к.т.н., проф.
Хникін Л.М., к.т.н., доц.
Космак В.О., к.т.н., доц.

Відповідальний за випуск:

Хникін Л.М., к.т.н., доц.
каф. «Опір матеріалів і
будівельна механіка»

Рецензент:

Кізілов В.В., к.т.н., доц.
каф. «Будівельно-дорожні
машини та деталі машин»

© Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут, 2011.

ЗМІСТ

1 Загальні вказівки до виконання розрахунково-проектувальної роботи.....	4
2 Теоретичні відомості	6
2.1 Внутрішні сили	6
2.2 Метод перерізів.....	7
2.3 Диференціальні залежності між внутрішніми силами і навантаженнями.....	10
2.4 Епюри і особливості їх побудови	12
2.4.1 Особливості епюр поздовжніх сил.....	13
2.4.2 Особливості епюр крутних моментів.....	14
2.4.3 Особливості епюр поперечних сил і моментів, що згинають..	16
2.4.4 Побудування епюр у плоскопросторових рамах	18
2.5 Побудова епюр за характерними перерізами	19
3 Приклади	20
3.1 Епюри поздовжніх сил	20
3.2 Епюри крутних моментів	21
3.3 Епюри поперечних сил і згинальних моментів.....	22
3.4 Епюри внутрішніх зусиль в плоских і плоскопросторових рамах. ...	27
Додаток А	36
Перелік посилань	61

1 ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІКИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО – ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Перед виконанням роботи необхідно проробити за підручником відповідний розділ курсу й освоїти методи розв'язання завдань. Основна література вказується далі. Додаткова література рекомендується викладачем, що керує виконанням РПР.

2. Робота виконується кожним студентом за індивідуальним завданням (варіантом), виданим викладачем.

3. Строки виконання РПР і поточного контролю встановлюються відповідно до робочого плану за курсом. Робота студента з виконання завдання відбивається під час міжсесійного контролю.

4. Під час складання РПР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні запитання й уміти розв'язувати завдання в обсязі відповідного розділу курсу. Прийнята викладачем РПР зберігається на кафедрі.

5. До іспиту і заліку студент допускається тільки після складання всіх РПР, передбачених навчальним планом.

6. Обсяг і зміст РПР обумовлено в плані роботи. Відхилення від цього плану можуть бути тільки за вказівкою викладача, що керує виконанням РПР.

7. Усі необхідні розрахунки рекомендується робити на мікрокалькуляторі. Використовуючи табличні і довідкові дані, слід давати посилання на літературні джерела.

8. Розрахунки на кожному наступному етапі оформлюються в такій послідовності : розрахункова схема із вказівкою всіх буквених і цифрових даних; під розрахунковою схемою розташовуються епюри внутрішніх сил; розрахункові формули, підстановка в них конкретних даних, остаточний результат і розмірність у системі Si . Кожний окремий етап розрахунків повинен мати заголовок, а їх послідовність відповідати плану виконання роботи. Усі епюри повинні бути позначені та виконані в обраному масштабі, ординати епюр повинні мати числові розрахункові значення.

9. Пояснювальна записка оформляється на стандартних аркушах паперу А4, текст і розрахунки, графічні ілюстрації виконуються чорнилом або тушшю, акуратно, без виправлень на одному рядку аркуша. Аркуші тексту записки укладаються в обкладинку із креслярського паперу й міцно зшиваються.

На першій сторінці обкладинки вказується наступне:

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра "Опір матеріалів і будівельна механіка"

Розрахунково-проектувальна робота № 1
з дисципліни "Опір матеріалів"
на тему: "Розрахунки внутрішніх сил і
побудова їх епюр"

Факультет:

Група:

Студент:

Керівник:

Горлівка – 2011

2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Внутрішні сили

Внутрішні сили – це додаткові сили взаємодії між сусідніми частками тіла, що виникають під час навантаження.

Внутрішні сили визначають звичайно в поперечних перерізах стрижнів (рис. 2.1).

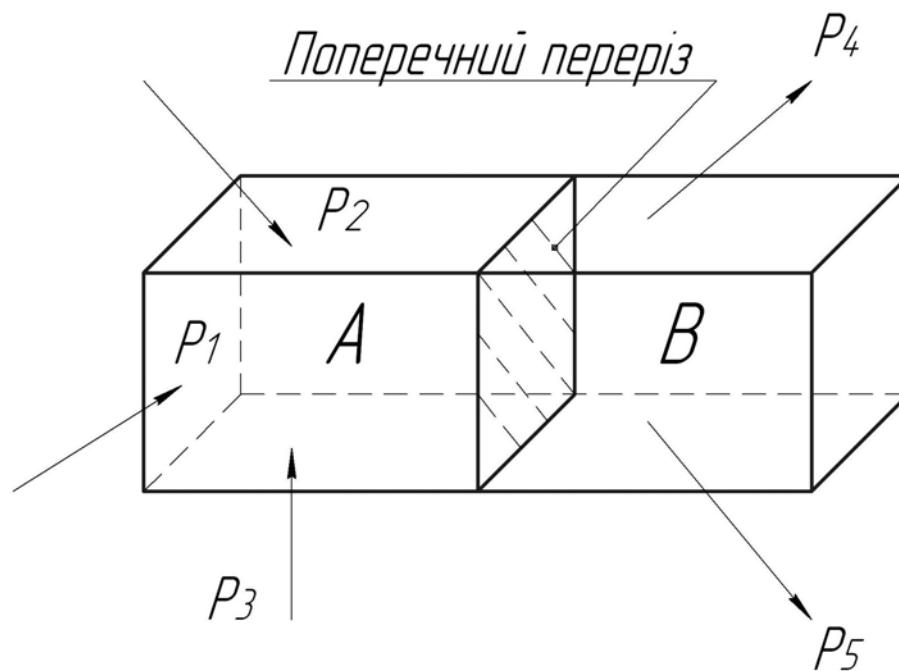


Рисунок 2.1 – Метод перерізів

Залежно від форми стрижня й характеру зовнішніх навантажень інтенсивність внутрішніх сил у різних точках може бути різною. Як усяку систему сил, внутрішні сили можна під часвести до однієї точки (як правило до центру ваги перерізу), у результаті чого на кожній стороні перетину одержимо головний вектор і головний момент внутрішніх сил у перерізі. Проекції головного вектора й головного моменту внутрішніх сил на поздовжню вісь стрижня – X і головні центральні осі перетину – y і z дають три сили – N , Q_y , Q_z і три моменти – M_x , M_y , M_z , які й називаються внутрішніми силами (рис. 2.2).

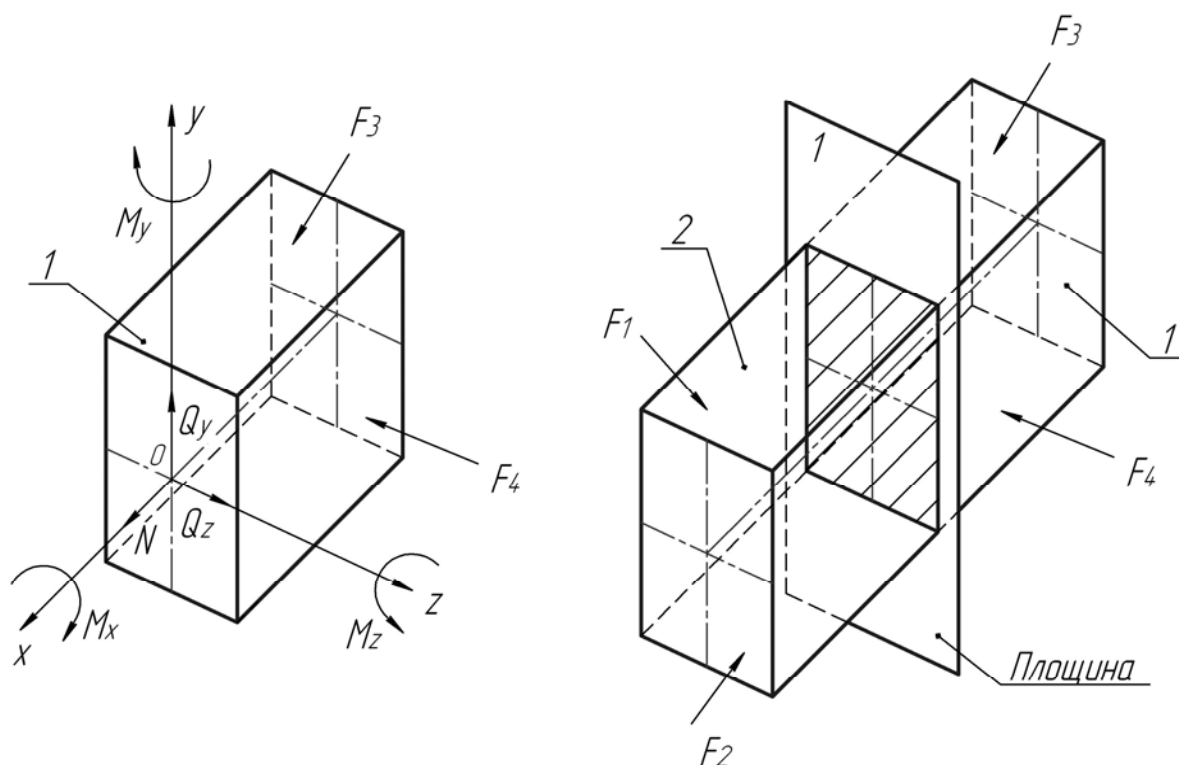


Рисунок 2.2 – Визначення внутрішніх зусиль методом перерізів

Сила N викликає поздовжню деформацію стрижня (розтягання або стиск); Q_y і Q_z – зсув відповідно в напрямку від y і z ; M_k – крутіння стрижня; M_y і M_z – вигин стрижня в головних площинах (Z_x і Y_z).

Для внутрішніх сил прийнято наступні назви:

- N – поздовжня або осьова сила (спрямована уздовж осі стрижня);
- Q_y і Q_z – поперечні сили;
- M_k – крутний момент;
- M_y , M_z – згинальні моменти.

2.2 Метод перерізів

Метод перерізів дозволяє знайти внутрішні сили в кожному перерізі стрижня під час дії будь-якого навантаження.

Для цього необхідно:

1. Подумки провести поперечний переріз стрижня в тому місці, де потрібно знайти внутрішні сили.

2. Залишити одну частину стрижня (А або Б, до або після перетину), де відомо всі зовнішні сили, включаючи й реакції зв'язків, і де зовнішніх сил менше (рис. 2.2)

3. Складають рівняння рівноваги частини стрижня, що залишився (о.ч.) під дією внутрішніх і зовнішніх сил (навантажень).

$$N + \Sigma F_x (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow N = \Sigma - F_x (\text{о.ч.}) \quad (2.1)$$

$$Q_y + \Sigma F_y (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow Q_y = \Sigma - F_y (\text{о.ч.}) \quad (2.2)$$

$$Q_z + \Sigma F_z (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow Q_z = \Sigma - F_z (\text{о.ч.}) \quad (2.3)$$

$$M_k + \Sigma M_x (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow M_k = \Sigma - M_x (\text{о.ч.}) \quad (2.4)$$

$$M_y + \Sigma M_y (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow M_y = \Sigma - M_y (\text{о.ч.}) \quad (2.5)$$

$$M_z + \Sigma M_z (\text{о.ч.}) = 0 \rightarrow M_z = \Sigma - M_z (\text{о.ч.}) \quad (2.6)$$

4. Визначають значення внутрішніх сил з рівнянь рівноваги частини стрижня, що залишився.

Повздовжня сила – N чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стрижня (на нормаль до перерізу) усіх зовнішніх сил, що діють на частину стрижня, що залишився (рис. 2.3).

Поперечна сила – Q_y (Q_z) чисельно дорівнює алгебраїчній сумі сил на вісь усіх зовнішніх сил, що діють на частину стрижня (рис. 2.4, 2.5).

Крутий момент – M_k чисельно орівнює алгебраїчній сумі моментів щодо осі x стрижня всіх зовнішніх сил, що діють на частину стрижня, що залишився (рис. 2.6).

Згинальний момент – M_y (M_z) чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо осі v (z) усіх зовнішніх сил, що діють на частину стрижня, що залишився (рис. 2.8, 2.9).

Повздовжня сила – N додатна, якщо вона (або складова її проєкція зовнішньої сили) викликає розтягання, тобто спрямована від перерізу (рис. 2.3).

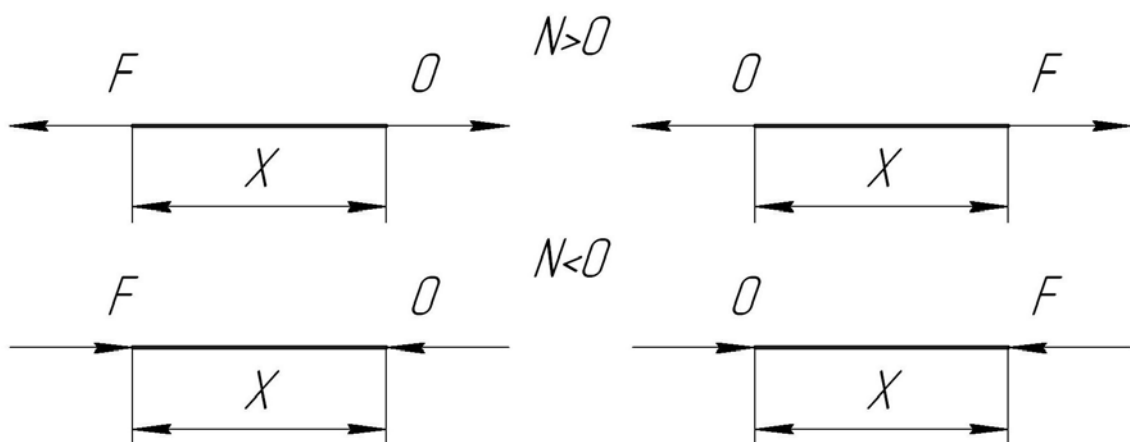


Рисунок 2.3 – Правило знаків під час розтягання

Повздовжня сила – N від'ємна, якщо вона (або складова її проєкція зовнішньої сили) викликає стиск, тобто спрямована на переріз (рис. 2.3).

Поперечна сила – Q додатна, якщо вона (або складова її проекція зовнішньої сили) обертає частину стрижня, що залишився, за годинниковою стрілкою (рис. 2.4).

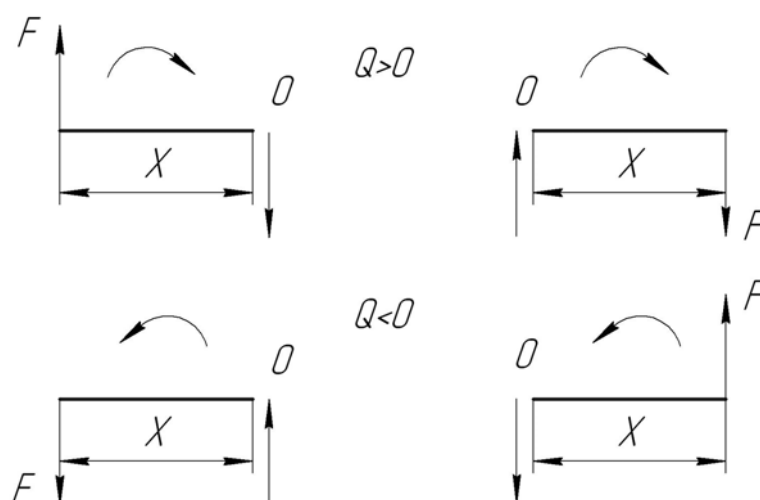


Рисунок 2.4 – Правило знаків до поперечних сил під час згинання

Поперечна сила – Q від'ємна, якщо вона (або складова її проекція зовнішньої сили) обертає частину стрижня, що залишився, проти годинникової стрілки (рис. 2.4).

Крутний момент – M_k додатний, якщо під час спостереження частини стрижня, що залишився, з боку перерізу він обертає перетин за годинниковою стрілкою (або складовий момент зовнішньої сили обертає переріз проти годинникової стрілки) (рис. 2.5).

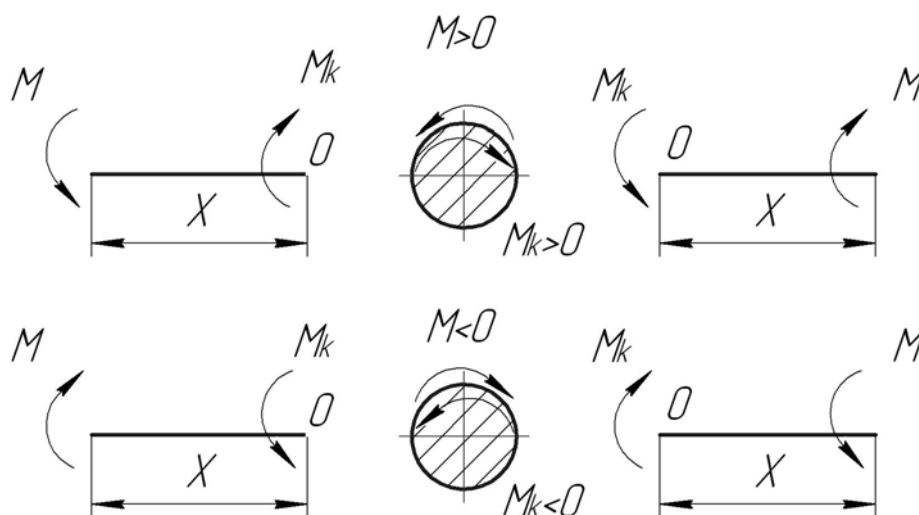


Рисунок 2.5 – Правило знаків під час кручення

Крутний момент – M_k від'ємний, якщо під час спостереження частини стрижня, що залишився, з боку перетину він обертає переріз проти годинникової стрілки (або складовий його момент зовнішньої сили обертає перетин за годинниковою стрілкою) (рис. 2.5).

Згинальний момент – M додатний, якщо він (або складовий його момент зовнішньої сили) викривляє поздовжню частину стрижня опуклістю вниз, тобто стискає верхні волокна й розтягує нижні (рис. 2.6).

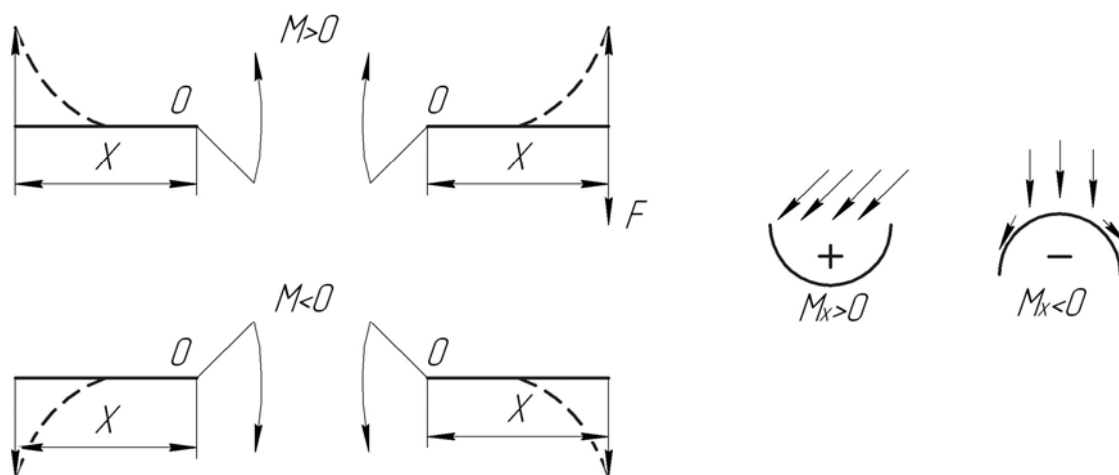


Рисунок 2.6 – Правило знаків до згинання

Згинальний момент – M від'ємний, якщо він (або складовий його момент зовнішньої сили) викривляє поздовжню опуклість нагору, тобто стискає нижні волокна й розтягує верхні (рис. 2.6).

2.3 Диференціальні залежності між внутрішніми силами і навантаженнями

Розглянемо ділянку стрижня між двома поперечними перерізами на відстані dx з рівномірним поздовжнім навантаженням інтенсивністю – q (рис. 2.7).

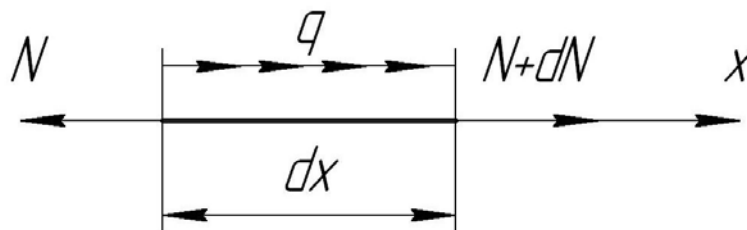


Рисунок 2.7 – Схема зусиль під час розтягу

Рівняння рівноваги $\sum F_x = 0$ дає наступне:

$$-N + qdx + N + dN = 0.$$

Звідки: $dN/dx = q$ – диференціальна залежність під час розтягання (стиску).

Розглянемо ділянку стрижня між двома поперечними перерізами на відстані dx з рівномірним обертаючим моментом інтенсивністю – m (рис. 2.8).

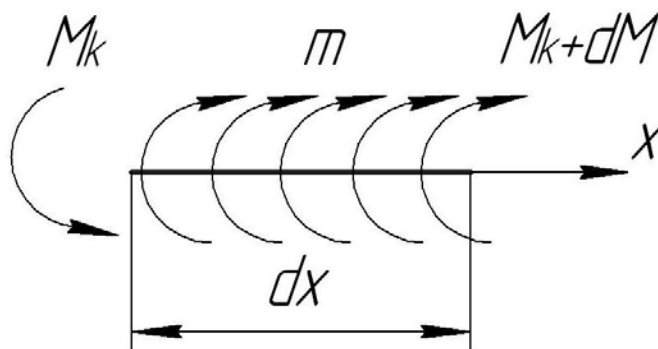


Рисунок 2.8 – Схема зусиль під час кручення

Рівняння рівноваги:

$$\sum M_x = 0; -M_k + m dx + M_k + dM_k = 0.$$

Звідки $dM_k/dx = m$ – диференціальна залежність під час крутіння.

Якщо ділянка стрижня між двома поперечними перерізами на відстані dx навантаженою рівномірно інтенсивністю – q і розподіленим рівномірно моментом інтенсивністю – m , то рівняння рівноваги дають наступне (рис.2.9):

а) $\sum F_y = 0; Q + q dx - Q - dQ = 0$, звідси $dq/dx = q$;

б) $\sum M_a = 0 \rightarrow M + m dx + \frac{q dx^2}{2} + Q dx - M - dM = 0$,

звідки $dM/dx = Q + m$.

Ці співвідношення називають диференціальними залежностями під час згинання.

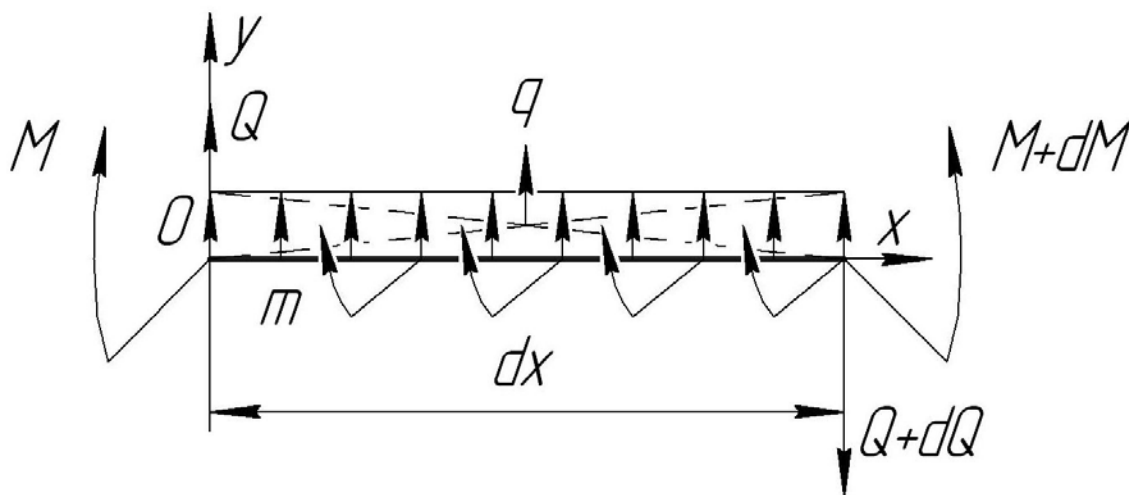


Рисунок 2.9 – Схема зусиль під час згинання

2.4 Епюри і особливості їх побудови

Епюра – графік (діаграма), що показує, як змінюються внутрішні сили під час переходу від перерізу до перерізу.

Під час побудови епюр застосовуються наступні правила:

1. Вісь (базу, нульову лінію), на якій будується епюра, вибирають таку, щоб вона була паралельна або збігалася з віссю стрижня.
2. Ординати епюри відкладаються від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихувати епюри прийнято лініями, перпендикулярними до бази й рівномірно розташованими.
4. Для сил і моментів вибирають масштаб. Ординати відкладають у масштабі.
5. На епюрах проставляють числа, що показують величини характерних ординат, у поле епюри, у кружечку, ставлять знак сили або моменту.
6. Усі епюри позначаються літерами в кружечку за назвою внутрішньої сили. Поруч проставляється розмірність.

На розрахунковій схемі стрижень заміняють віссю. Усі навантаження повинні бути наведені до осі стрижня. Залежно від типу опорного обладнання позначають опорні реакції й визначають їх за правилами курсу теоретичної механіки.

Пристаюючи до побудови епюри, стрижень розбивають на ділянки.

Ділянка – частина стрижня між точками зосереджених сил або частина стрижня, в межах якого розподілене навантаження міняється за одним законом.

Брус – прямий стрижень, що працює на розтягання (стиск).

Вал – прямий стрижень, що працює на крутіння.

Балка – прямий стрижень, що працює на вигин.

Ферма – система, що складається із прямих стрижнів, з'єднаних циліндричними шарнірами.

Рама – система, що складається із прямих стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Жорсткі вузли усувають можливість взаємного повороту схрещених стрижнів і їх зсув.

Існують характерні риси внутрішніх сил, засновані на диференціальних залежностях між внутрішніми силами й навантаженнями, знання яких полегшує побудова епюр і дозволяє контролювати правильність їх побудови.

2.4.1 Особливості епюр поздовжніх сил

1. Якщо на ділянці немає поздовжнього розподіленого навантаження ($p = 0$), то лінія епюри паралельна її осі (рис. 2.10).

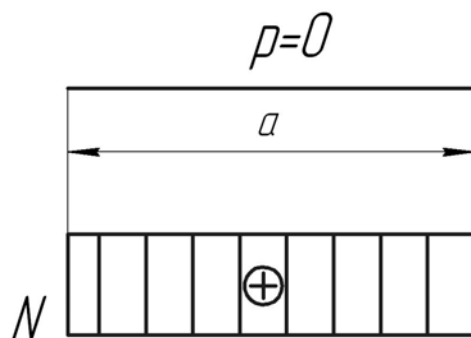


Рисунок 2.10 – Схема побудови епюр поздовжніх сил

2. У перетинах, де зосереджено поздовжні сили, на епюрі спостерігаються стрибки на величину цих сил (рис. 2.11).

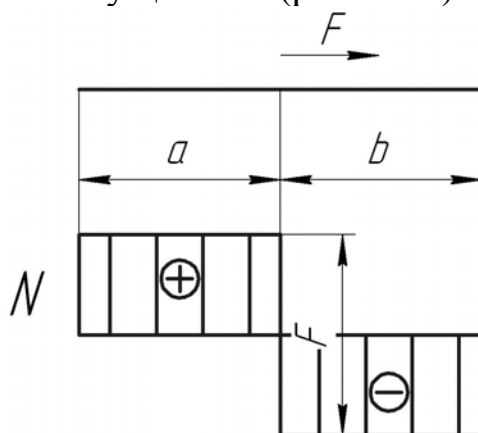


Рисунок 2.11 – Схема побудови епюр поздовжніх сил з зосередженою силою

3. Якщо на ділянці діє рівномірно розподілене повздовжнє навантаження ($q = \text{const}$), то лінія епюр похила (рис. 2.12).

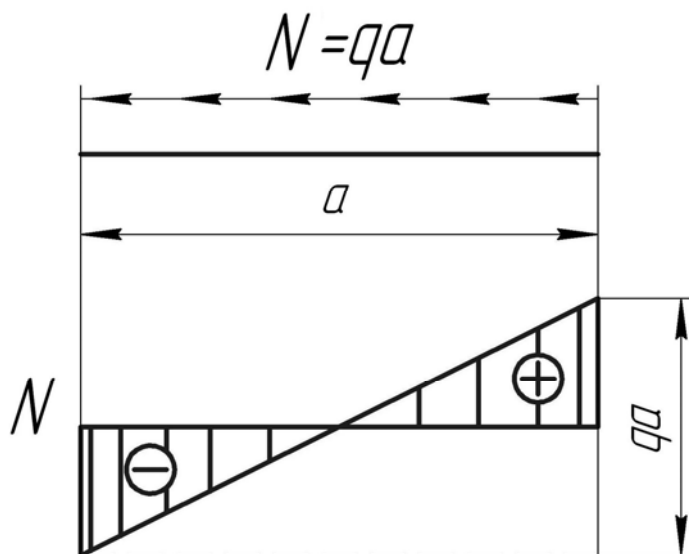


Рисунок 2.12 – Схема побудови епюр повздовжніх сил з розподіленим навантаженням

2.4.2 Особливості епюр крутних моментів

1. Якщо на ділянці немає розподілених моментів ($m=0$), то лінія епюри паралельна її осі (рис. 2.13).

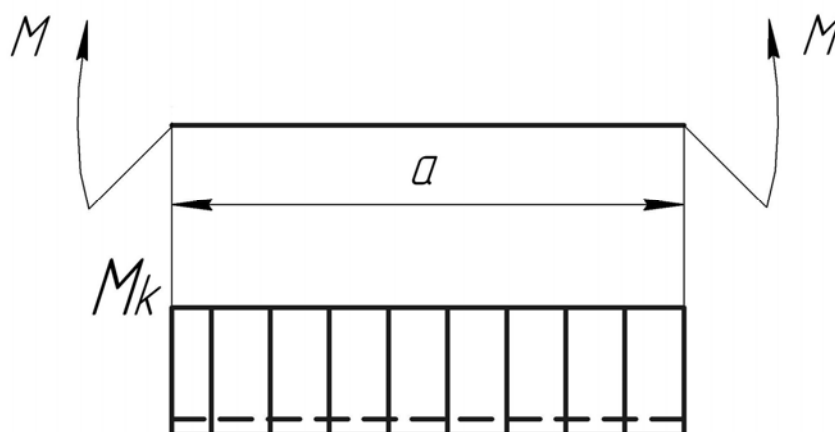


Рисунок 2.13 – Схема побудови епюри крутних моментів

2. У перерізах, де прикладено зосереджені моменти, на епюрі спостерігаються стрибки на величину цих моментів (рис. 2. 14).

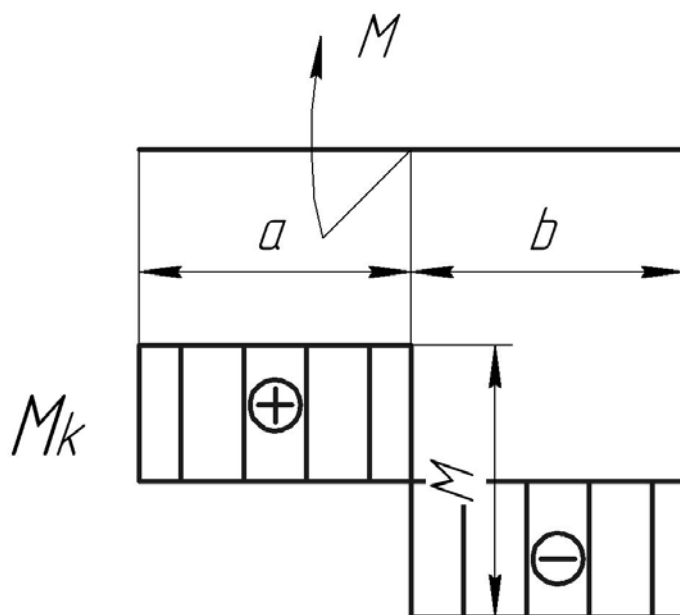


Рисунок 2.14 – Схема побудови епюри крутних моментів з зосередженим моментом

3. Якщо на ділянці діють рівномірно розподілені зовнішні моменти ($m = \text{const}$), то лінія епюри похила (рис. 2.15).

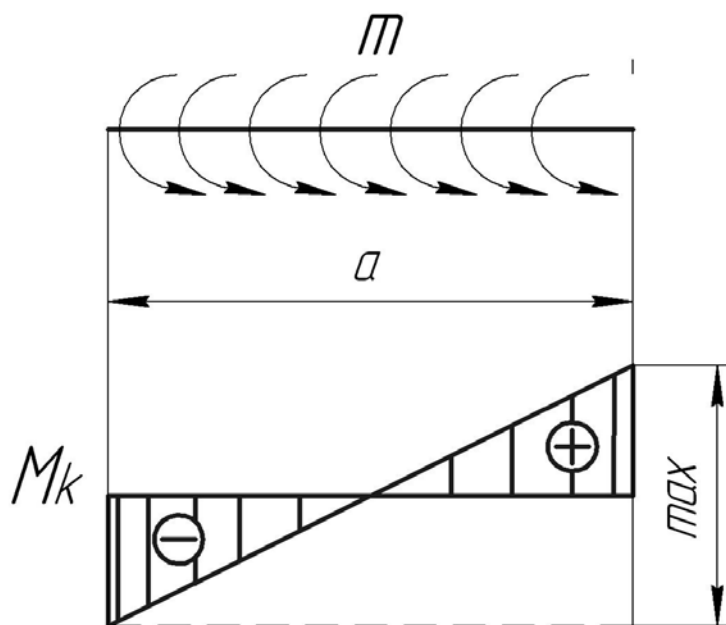


Рисунок 2.15 – Схема побудови епюри крутних моментів з розподіленим навантаженням

2.4.3 Особливості епюр поперечних сил і моментів, що згинають

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q=0$), епюри Q обмежені прямими, паралельними базі, а епюри M – похилими прямими (рис. 2.16).

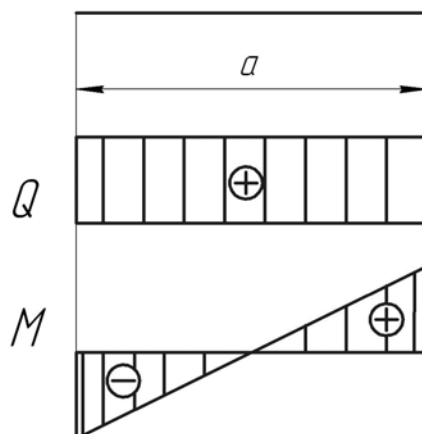


Рисунок 2.16 – Схема побудови епюри Q , M під час згинання

2. На ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q=\text{const}$), епюра Q обмежена похилими прямими, а епюра M – квадратичними параболою. Якщо q спрямована вниз, то Q – падаюча пряма, а опуклість епюри M спрямована нагору (рис. 2.17).

3. У перерізах, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі ($M=\text{extremum}$) (рис. 2.17).

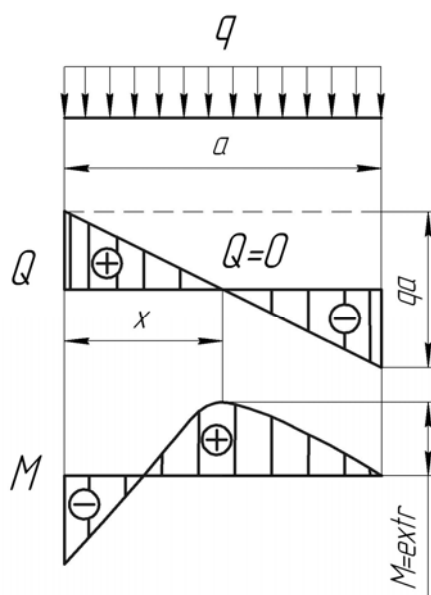


Рисунок 2.17 – Схема побудови епюр Q , M під час згинання з розподіленим навантаженням

4. На ділянках, де $Q > 0$, момент M зростає, а на ділянках, де $Q < 0$, момент M убуває (ліворуч – праворуч) (рис. 2.17, 2.18).

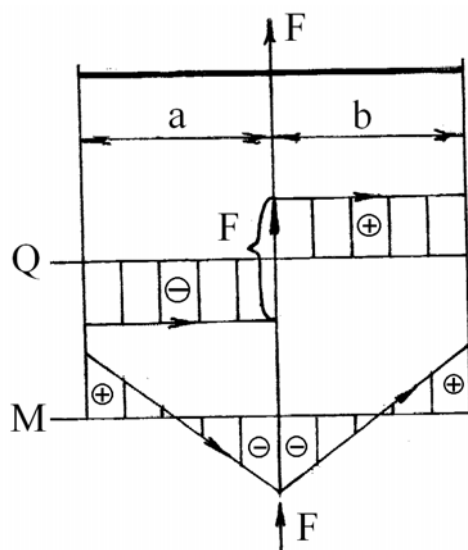


Рисунок 2.18 – Схема побудови епюр Q і M

5. У перетинах, де прикладено зовнішні зосереджені сили:

а) на епюрі Q спостерігаються стрибки на величину F у напрямку прикладених сил;

б) на епюрі M спостерігаються злами, причому вістря зламу спрямовано проти дії сили.

6. У перерізах, де прикладено зосереджені моменти, на епюрі M спостерігаються стрибки на величину цих моментів. Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. На епюрі Q змін немає (рис. 2.19).

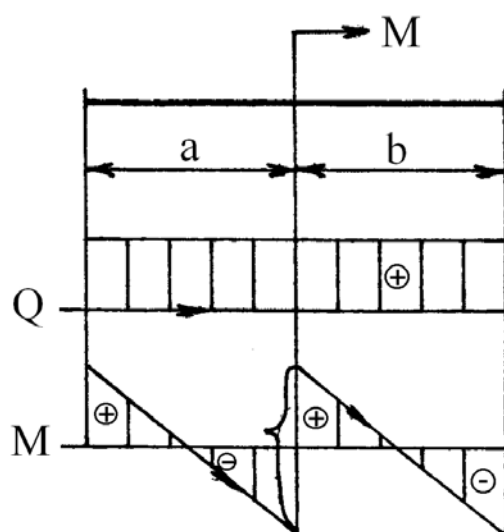


Рисунок 2.19 – Схема побудови епюр Q , M з зосередженим моментом

7. Якщо на ділянці діє рівномірно розподілений момент ($m = \text{const}$), то епюра M – похила, епюра Q – паралельна базі (рис. 2.20).

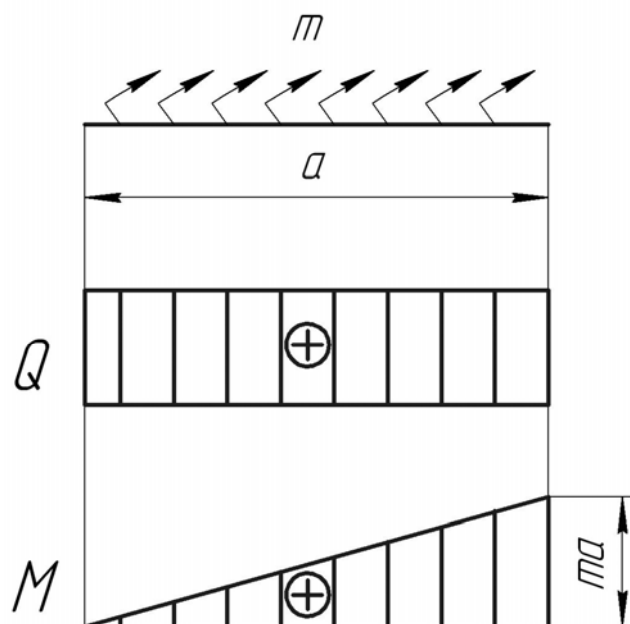


Рисунок 2.20 – Схема побудови епюр Q , M з розподіленим моментом, що згинає

2.4.4 Побудування епюр у плоскопросторових рамах

У рамах осі стрижнів можуть лежати в одній площині або в різних площинах у разі впливу просторового навантаження. У поперечних перерізах стрижнів можуть виникати всі шість внутрішніх сил: N , Q_y , Q_z , M_k , M_y , M_z .

У рамах під час переходу від однієї ділянки до іншої вводиться плаваюча система координат, при якій вісь x завжди впливає поздовж стрижня, вісь y залишається у вертикальній площині, а вісь z буде їм перпендикулярна.

Для поздовжніх сил – N , крутних моментів – M_k і поперечних сил Q зберігаються колишні правила знаків. Епюри N і M орієнтують як зазвичай, але ординати завжди відкладають по нормалі до осі стрижня. Епюри Q виконуються в площині осі x і відповідно до осі y або z , ординати відкладаються по нормалі до осі стрижня. Знаки епюр N , M_k , Q обов'язково вказуються.

Епюри згинальних моментів M будують на стислих волокнах (з боку ввігнутості поздовжньої осі стрижня). Епюри M орієнтують у площині дії

пари того згинального моменту, для якого вона побудована. Знак епюри M не вказується.

2.5 Побудова епюр за характерними перерізами

Можна будувати епюри внутрішніх сил, не складаючи вираження для ділянок. Достатньо обчислювати величини внутрішніх сил у характерних перетинах.

Характерними перетинами вважаються ті, в яких прикладено зосереджені сили й моменти, або починається і закінчується розподілене навантаження, а також ті, в яких $Q = 0$.

Для цих випадків можна рекомендувати наступний порядок побудови епюр:

1. Визначити опорні реакції.
2. За стрибками і нахилами, ідучи уздовж стрижня ліворуч праворуч, будують епюри N , M_k , і Q (записів можна не робити) по характерних перетинах.
3. Обчислюють у характерних перетинах величини M і будують епюру M .
4. Під час побудови всіх епюр керуються загальними властивостями епюр.

3 ПРИКЛАДИ

3.1 Епюри поздовжніх сил

Задача

Для заданої балки (рис 3.1) з осьовим навантаженням і розмірами:

Дано: $F_1 = 60\text{кН}$, $F_2 = 60\text{кН}$, $F_3 = 120\text{кН}$, $q_1 = 20\text{ кН/м}$, $q_2 = 20\text{ кН/м}$,
 $a = 1\text{м}$, $b = 2\text{м}$, $c = 3\text{м}$, $d = 4\text{м}$. Побудувати епюру N .

Розв'язання

1. Викреслюємо розрахункову схему стрижня із вказівкою всіх сил і розмірів у буквенному і цифровому значаннях.

2. Паралельно поздовжньої осі проводимо нульову лінію (базу) епюри.

3. Визначаємо реакцію R з рівняння рівноваги

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_1 - F_2 + q_1 b + F_3 - q_2 d + R = 0;$$

$$R = F_1 + F_2 - q_1 b - F_3 + q_2 d = 60 + 60 - 20 \cdot 2 - 120 + 20 \cdot 4 = 40\text{кН}.$$

4. Розбиваємо стрижень на ділянки й складаємо вираження для поздовжньої сили на ділянках.

Ділянка – (1); $0 \leq x \leq a = 1\text{м}$; $N_1 = F_1 = 60\text{кН}$.

Ділянка – (2); $0 \leq x \leq b = 2\text{м}$; $N_2 = F_1 + F_2 - q_1 x = 60 + 60 - 20 \cdot x = 120 - 20x$;

$$N_2|_{x=0} = 120\text{кН}; \quad N_2|_{x=2} = 120 - 20 \cdot 2 = 80\text{кН}.$$

Ділянка – (3); $0 \leq x \leq c = 3\text{м}$; $N_3 = F_1 + F_2 - q_1 \cdot b - F_3 = 60 + 60 - 20 \cdot 2 - 120 = -40\text{кН}$.

Ділянка – (4); $0 \leq x \leq d = 4\text{м}$; $N_4 = F_1 + F_2 - q_1 \cdot b - F_3 + q_2 \cdot x = -40 + 20 \cdot x$;

$$N_4|_{x=0} = -40\text{кН}; \quad N_4|_{x=4} = -40 + 20 \cdot 4 = 40\text{кН}.$$

5. За даними розрахунків будуюмо епюру N (рис. 3.1)

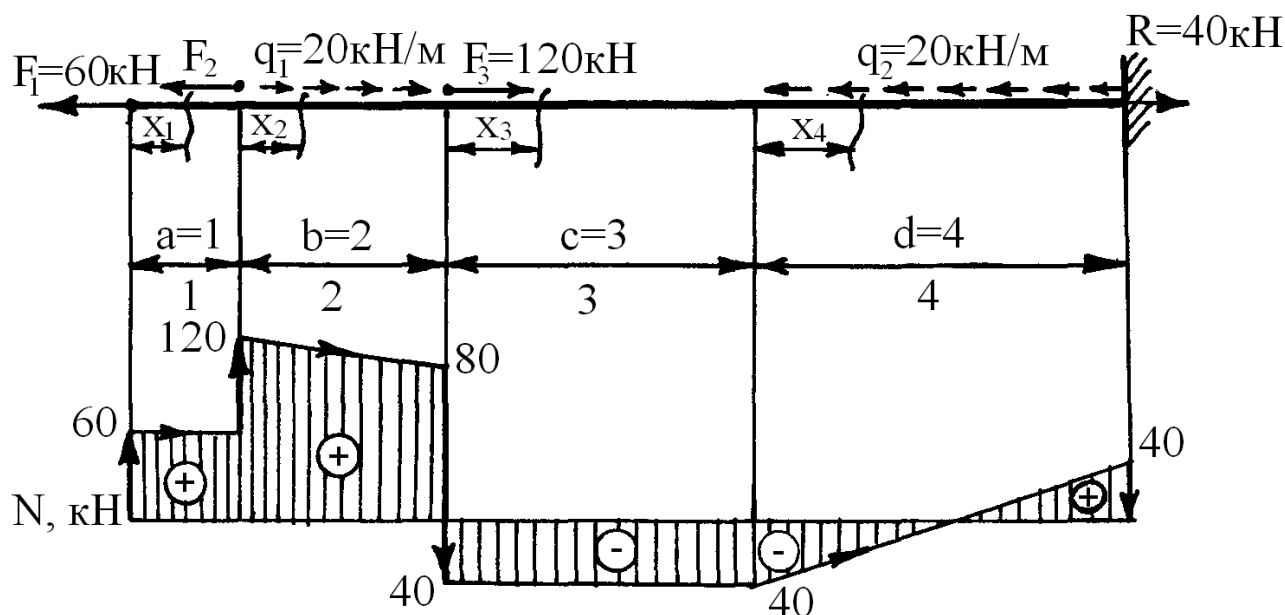


Рисунок 3.1 – Побудова епюри повздовжних сил.

3.2 Епюри крутних моментів

Задача №1

Дано: $M_1=80$ кНм; $m_1=60$ кНм/м; $M_2=80$ кНм; $M_3=120$ кНм; $m_2=20$ кНм/м ; $a=4$ м; $b=1$ м; $c=3$ м, розрахункова схема (рис. 3.2)

Побудувати епюру M_K .

Розв'язання

1. Накреслюємо розрахункову схему стрижня із вказівкою всіх сил і розмірів у буквенному і цифровому значеннях.

2. Паралельно поздовжньої осі проводимо нульову лінію (базу) епюри.

3. Визначаємо реакцію M_A з рівняння рівноваги:

$$M_X=0 \rightarrow M_1 - m_1 a + M_2 + M_3 - m_2 c = -80 + 60 \cdot 4 - 80 - 120 + 20 \cdot 3 = 20 \text{ кНм.}$$

4. Розбиваємо стрижень на ділянки й становимо вираження для крутних моментів на ділянках.

Ділянка – 1; $0 \leq x \leq a = 4$ м; $M_{K1} = M_1 - m_1 x = 80 - 60x$;

$$M_{k1}|_{x=0} = 80 \text{ кНм}; \quad M_{k1}|_{x=4} = 80 - 60 \cdot 4 = -160 \text{ кНм.}$$

Ділянка – 2; $0 \leq x \leq b = 1$ м; $M_{K2} = M_1 - m_1 a + M_2 = 80 - 60 \cdot 4 + 80 = 80$ кНм.

Ділянка – 3; $0 \leq x \leq c = 3$ м; $M_{K3} = M_1 - m_1 a + M_2 + M_3 - m_2 x = 80 - 60 \cdot 4 + 80 + 120 - 20x = 40 - 20x$;

$$M_{k3}|_{x=0} = 40 \text{ кНм}; \quad M_{k3}|_{x=3} = 40 - 20 \cdot 3 = -20 \text{ кНм.}$$

5. За даними розрахунків будуюмо епюру M_K (рис. 3.2).

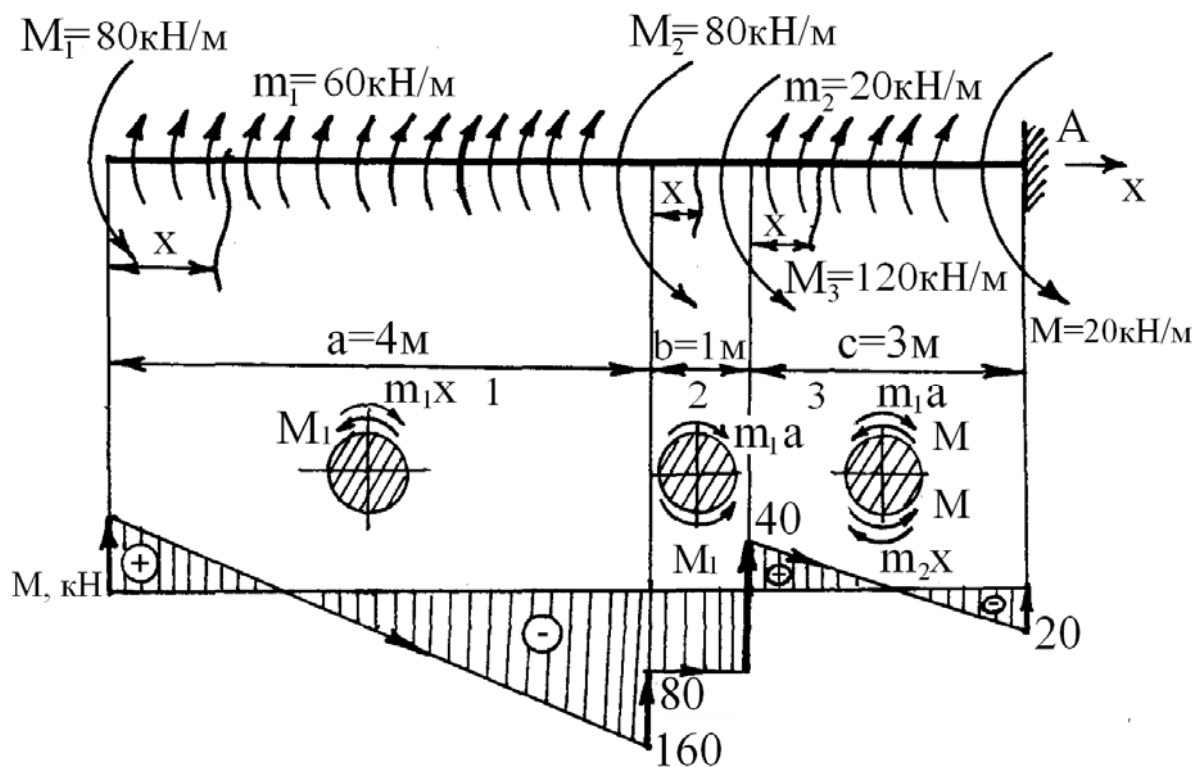


Рисунок 3.2 – Побудова епюри крутних моментів

3.3 Епюри поперечних сил і згинальних моментів

Задача №1

Дано: $F = 40$ кН; $M_1 = 100$ кНм; $q = 20$ кН/м; $a = 2$ м; $L = 10$ м; $b = 4$ м.
Побудувати епюри Q і M .

Розв'язання

1. Викреслюємо розрахункову схему стрижня із вказівкою всіх сил і розмірів у буквенному й цифровому значеннях.
2. Паралельно поздовжньої осі проводимо нульові лінії (базис) епюр Q і M .
3. Визначаємо опорні реакції R_A й R_B з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow Fa - M_1 - q \frac{(L+b)^2}{2} + R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \left(Fa - M_1 - q \frac{(L+b)^2}{2} \right) = \frac{1}{10} \left(-40 \cdot 2 + 100 + \frac{20 \cdot 14^2}{2} \right) = 198 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -F(a+L) + M + R_A \cdot L - q \cdot (L+b) \left(L - \frac{L+b}{2} \right) = 0$$

$$R_A = \frac{1}{L} \left(F(a+L) - M + q \cdot (L+b) \left(L - \frac{L+b}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{10}(40 \cdot 12 - 100 + 20 \cdot 14 \cdot 3) = 122 \text{кН}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0 &\rightarrow -F_A + R_A - q(L + b) + R_B = 0; \\ -20 + 122 - 20 \cdot 14 + 198 &= 0. \end{aligned}$$

4. Розбиваємо стрижень на ділянки й складаємо вираження для поперечних сил і згинальних моментів на ділянках.

Ділянка – 1; $0 \leq x \leq a = 2$ м; $Q_1 = -F = -40$ кН; $M_1 = -Fx = 40$ кх;

$$M_1|_{x=0} = 0; \quad M_1|_{x=2} = 80 \text{кНм}.$$

Ділянка – 2; $0 \leq x \leq l = 10$ м; $Q_2 = -F + R_A - qx = -40 + 122 - 20x = 82 - 20x$;

$$Q_2|_{x=0} = 82 \text{кН}; \quad Q_2|_{x=10} = 82 - 20 \cdot 10 = -118 \text{кН}.$$

Поперечна сила міняє знак. Визначаємо координату перетину, де $Q_2 = 0$.

$$Q_2 = 82 - 20x = 0 \rightarrow x = \frac{82}{20} = 4,1 \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -F(a + x) + M_1 + R_A x - q \frac{x^2}{2} = -40 \times 2 - 40x + 100 + 122x - 10x^2 = \\ &= 20 + 82x - 10x^2; \end{aligned}$$

$$M_2|_{x=0} = 20 \text{кН};$$

$$M_2|_{x=4,1} = 20 + 82 \cdot 4,1 - 10 \cdot 10 \cdot 4,1^2 = 188 \text{кНм} = \max$$

$$M_2|_{x=10} = 20 + 82 \cdot 10 - 10 \cdot 10 = -160 \text{кНм}$$

Ділянка – 3; $0 \leq x \leq b = 4$ м; $Q_3 = qx = 20x$;

$$Q_3|_{x=0} = 0; \quad Q_3|_{x=4} = 20 \cdot 4 = 80 \text{кН};$$

$$M_3 = -\frac{qx^2}{2} = -10x^2; \quad M_3|_{x=0} = 0; \quad M_3|_{x=4} = -10 \cdot 4^2 = -160 \text{кНм}$$

5. За даними розрахунків будуємо епюри Q і M (рис. 3.3).

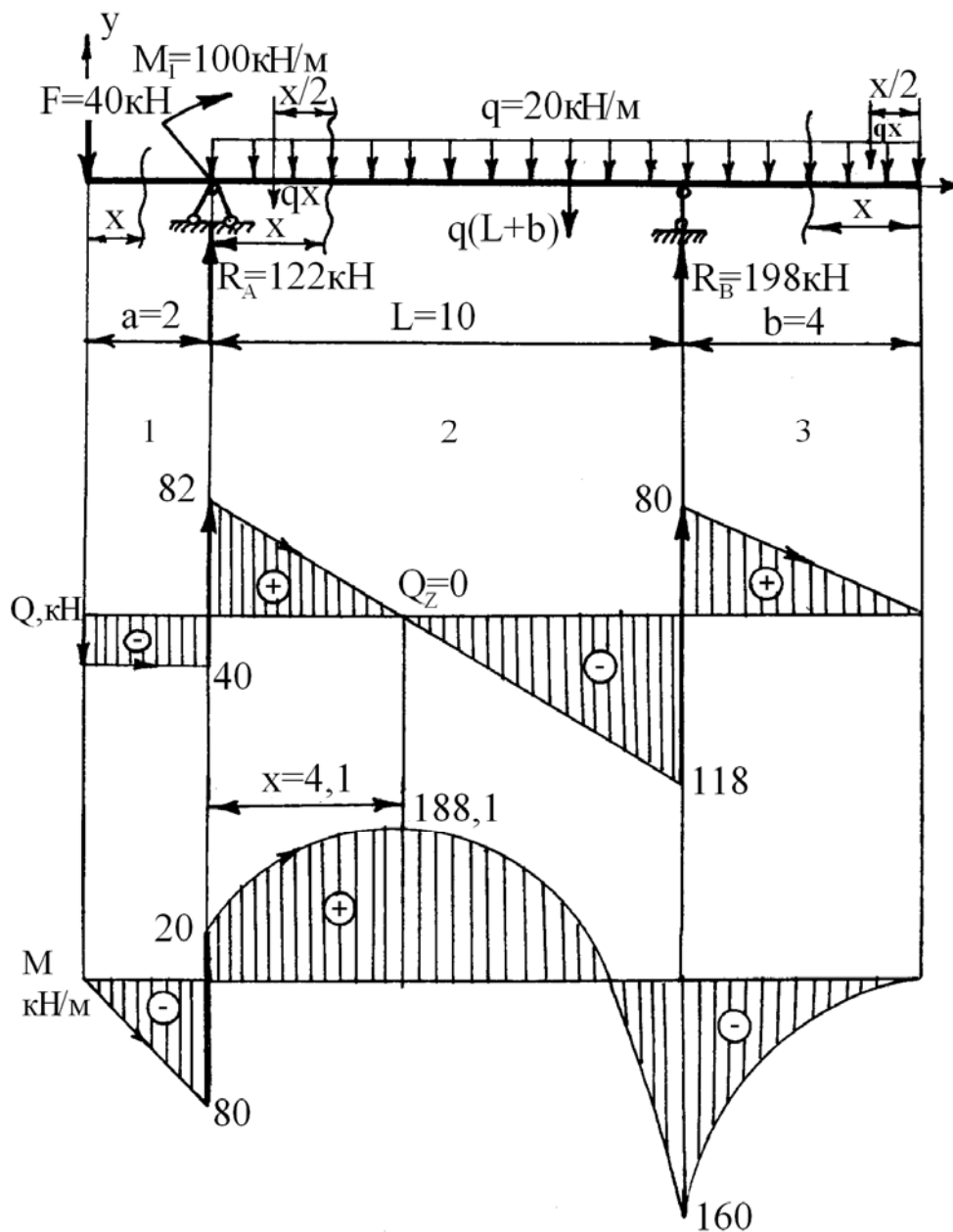


Рисунок 3.3 – Побудова епюри поперечних сил Q і моментів, що згинають

Задача №2

Розрахункова схема (рис 3.4 а) – балка з проміжним шарніром

Дано: $P=10\text{кН}$, $q=20\text{кН/м}$, $a=2\text{ м}$.

Побудувати епюри Q и M .

Розв'язання

1. Будуємо поперхову схему балки (рис. 3.4 б).
2. Визначаємо опорні реакції балки ВД (рис. 3.4 в).

$$\sum M_D = 0; \quad R_c \cdot a - \frac{1}{2} qa \cdot \left(a + \frac{1}{3}a\right) = 0,$$

$$R_c \cdot a - \frac{1}{2} qa \cdot \left(a + \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{2} qa \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} qa = \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 2 = 26.667 \text{кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad -R_D \cdot a + P \cdot a - \frac{1}{2} q \cdot a \cdot \frac{1}{3}a = 0,$$

$$R_D = P - \frac{1}{6} q \cdot a = 10 - \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 2 = 3.333 \text{кН}.$$

Перевірка: $\sum Y_i = 0; \quad R_D + R_c - P - \frac{1}{2} qa = 0;$

$$3,333 + 26.667 - 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2;$$

$$30 - 30 = 0.$$

3. Обчислюємо поперечні сили і згинальні моменти для балки ВД (рис. 3.4 в).

Ділянка ДС $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$

$$Q = R_A - D = 3,333 - 10 = -6,667 \text{кН};$$

$$M_1 = (R_A - D) \cdot x_1 = -6,667 \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0 \rightarrow M_1 = 0;$$

$$x_1 = 2\text{м} \rightarrow M_1 = -6,667 \cdot 2 = 13,333 \text{кН}.$$

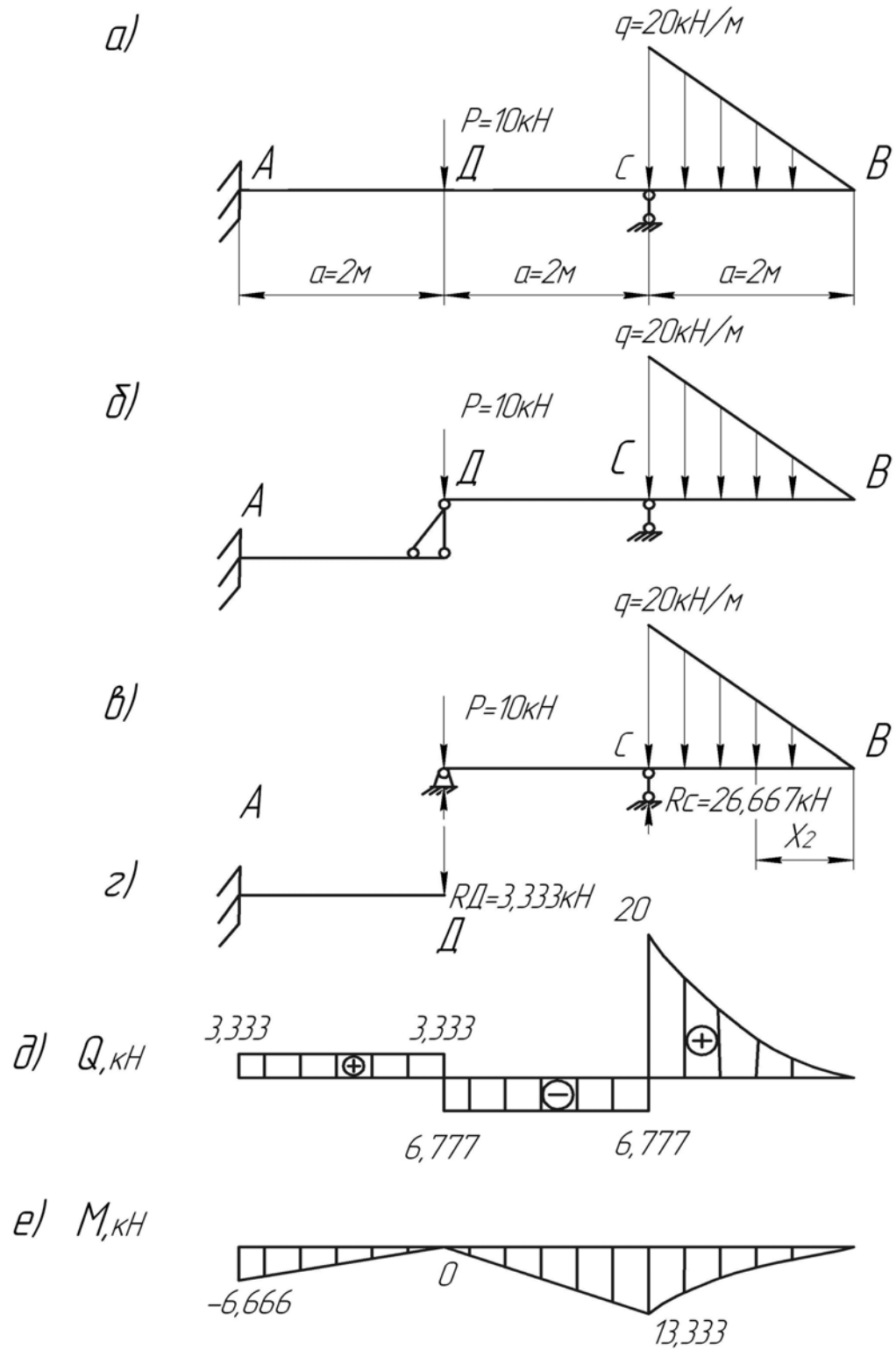


Рисунок 3.4 – Побудова епюр в балках з проміжним шарніром

Ділянка ВС $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$.

$$Q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2}{a} \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{2} \cdot 20 = 5x_2^2;$$

$$x_2 = 0 \rightarrow Q_2 = 0;$$

$$x_2 = 1\text{ м} \rightarrow Q_2 = 5 \cdot 1^2 = 5\text{ кН};$$

$$x_2 = 2\text{ м} \rightarrow Q_2 = 5 \cdot 2^2 = 20\text{ кН}.$$

$$Q_2 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{a} \cdot q = -\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{2} \cdot 20 = -\frac{5}{3}x^3;$$

$$x_2 = 0 \rightarrow M_2 = 0;$$

$$x_2 = 1\text{ м} \rightarrow M_2 = -\frac{5}{3} \cdot 1^3 = -1,667\text{ кНм};$$

$$x_2 = 2\text{ м} \rightarrow M_2 = -\frac{5}{3} \cdot 2^3 = -13,333\text{ кНм}.$$

4. Обчислюємо поперечні сили і згинальні моменти для балки АТ (рис. 3.4 г)

$$0 \leq x_3 \leq 2\text{ м}.$$

$$Q_3 = R_A = 3,333\text{ кН};$$

$$M_3 = -R_A \cdot x_3 = 3,333 \cdot x_3;$$

$$x_3 = 0 \rightarrow M_3 = 0;$$

$$x_3 = 2\text{ м} \rightarrow M_3 = -3,333 \cdot 2 = -6,666\text{ кНм}$$

За отриманими результатами будуюмо епюру поперечних сил Q (рис. 3,4 д) і епюру згинальних моментів M (рис. 3.4 е)

3.4 Епюри внутрішніх зусиль в плоских і плоскопросторових рамах.

Задача №1

Дано: $P=10\text{ кН}$, $q=20\text{ кН/м}$, $M=30\text{ кН/м}$, $a=2\text{ м}$, розрахункова схема (рис. 3.5 а)

Побудувати епюри поперечних сил Q , згинальних моментів M і крутних моментів $M_{кр}$.

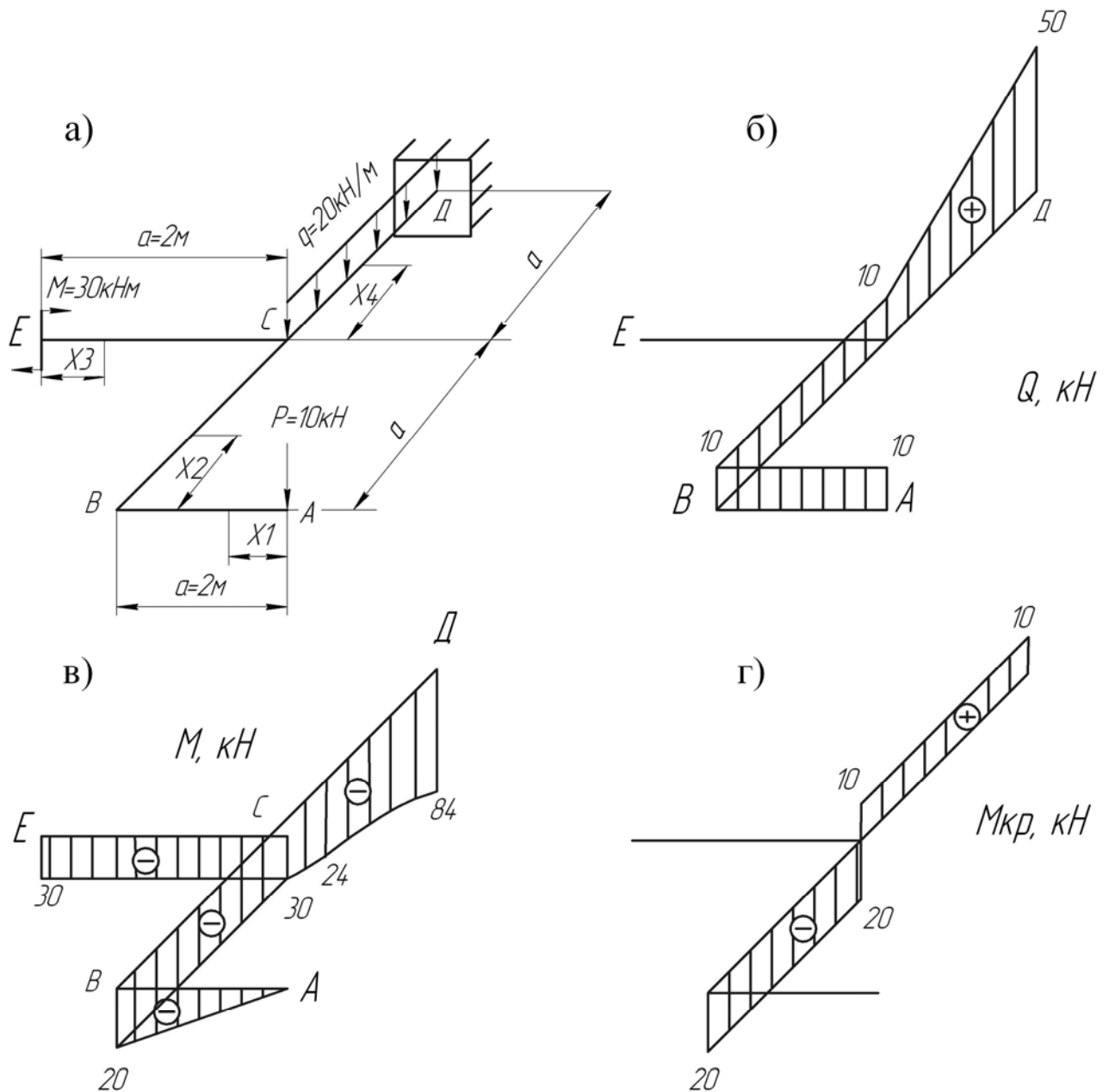


Рисунок 3.5 – Побудова епюр в плоских рамах

Розв'язання

Обчислюємо зусилля Q , M і $M_{кр}$ за ділянками

Ділянка AB $0 \leq x_1 \leq 2m$

$$Q_1 = P = 10kN;$$

$$M_1 = -P \cdot x_1 = -10x_1;$$

$$x_1 = 0 \rightarrow M_1 = 0;$$

$$x_1 = 2\text{ м} \rightarrow M_1 = -10 \cdot 2 = -20\text{ кНм}$$

$$M_{1\text{кр}} = 0.$$

Ділянка ВС $0 \leq x_2 \leq 2,4\text{ м}$

$$Q_2 = P = 10\text{ кН};$$

$$M_2 = -P \cdot x_2 = -10 \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0 \rightarrow M_2 = 0;$$

$$x_2 = 2,4\text{ м} \rightarrow M_2 = -10 \cdot 2,4 = -24\text{ кНм};$$

$$M_{2\text{кр}} = -P \cdot a = -10 \cdot 2 = -20\text{ кНм}.$$

Ділянка ЕС $0 \leq x_3 \leq 2\text{ м}$

$$Q_3 = 0;$$

$$M_3 = -M = -30\text{ кНм};$$

$$M_{3\text{кр}} = 0.$$

Ділянка СД $0 \leq x_4 \leq 2\text{ м}$

$$Q_4 = P + qx_4 = 10 + 20 \cdot x_4;$$

$$x_4 = 0 \rightarrow Q_4 = 10\text{ кН};$$

$$x_4 = 2\text{ м} \rightarrow Q_4 = 10 + 20 \cdot 2 = 50\text{ кН}$$

$$M_4 = -P \cdot (2,4 + x_4) - \frac{1}{2} qx_4^2 = -10(2,4 + x_4) - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot x_4^2 =$$

$$= -24 - 10x_4 - 10 \cdot x_4^2;$$

$$x_4 = 0 \rightarrow M_4 = -24\text{ кНм};$$

$$x_4 = 1\text{ м} \rightarrow M_4 = -24 - 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 = -44\text{ кНм};$$

$$x_4 = 2\text{ м} \rightarrow M_4 = -24 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 = -84\text{ кНм};$$

$$M_{4\text{кр}} = M - P \cdot a = 30 - 10 \cdot 2 = 19\text{ кНм}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюру поперечних сил Q (рис. 3.5. б), епюру згинальних моментів M (рис. 3.5 в), епюру крутних моментів $M_{\text{кр}}$ (рис. 3.5. г).

Задача № 2

Дано: $q=20$ кН/м, $M=30$ кНм, розрахункова схема – плоска рама (рис. 3.6).

Побудувати епюри N , Q , M .

Розв'язання

1. Визначаємо внутрішні реакції (рис. 3.7 а).

$$\sum M_a = 0; \quad -R_b \cdot 2a + \frac{1}{2} q \cdot (2a)^2 - M = 0;$$

$$R_b = \frac{1}{2} q 2a - \frac{1}{2a} \cdot M = qa - \frac{1}{2a} M = 20 \cdot 2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 30 = 32,5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0; \quad -Y_A \cdot 2a + \frac{1}{2} q (2a)^2 - M = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{2} q \cdot 2a - \frac{1}{2a} M = qa - \frac{1}{2a} M = 32,5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_a = 0; \quad x_A \cdot 2a - \frac{1}{2} q (2a)^2 - M - Y_A \cdot 4a = 0;$$

$$X_A = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2} q (2a)^2 + M + Y_A \cdot 2a \right) = qa + \frac{1}{2a} \cdot M + Y_A =$$

$$= 20 \cdot 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 30 + 32,5 = 80 \text{ кН}$$

Перевірка: $\sum x_i = 0; \quad x_A - q \cdot 2a = 0, 80 - 20 \cdot 2 \cdot 2 = 0, 80 - 80 = 0.$

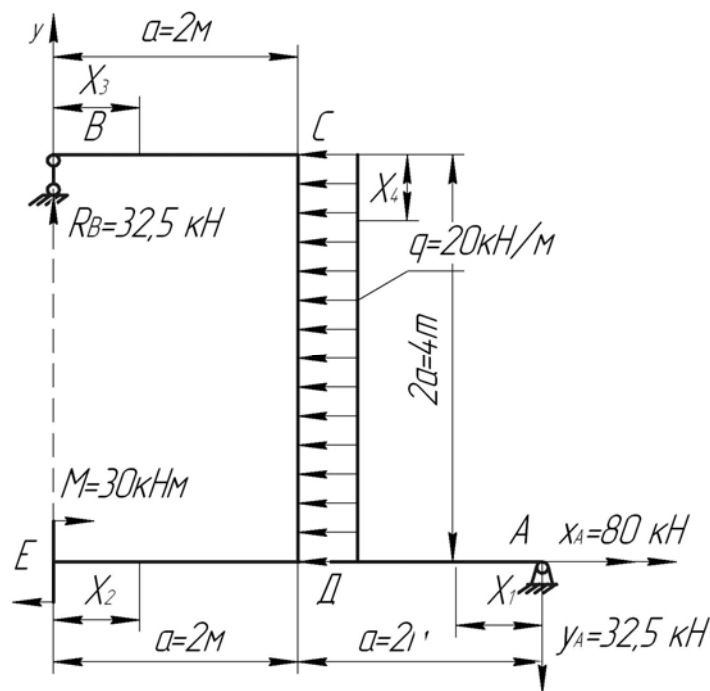


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема

За отриманими результатами реакцій визначимо епюри внутрішніх зусиль N , Q , M (рис. 3.6).

2. Визначаємо величину зусиль N, Q, M за ділянками.

Ділянка АД $0 \leq x_1 \leq 2m$.

$$\begin{aligned} N_1 &= x_A = 80 \text{кН}; \\ Q_1 &= Y_A = 32,5 \text{кН}; \\ M_1 &= -Y_A \cdot x_1 = -32,5x_1; \\ x_1 = 0 &\rightarrow M_1 = 0; \\ x_1 = 2m &\rightarrow M_1 = -32,5 \cdot 2 = -65 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка ЕД $0 \leq x_2 \leq 2m$.

$$\begin{aligned} N_2 &= 0; \\ Q_2 &= 0; \\ M_2 &= M = 30 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка ВС $0 \leq x_3 \leq 2m$.

$$\begin{aligned} N_3 &= 0; \\ Q_3 &= R_B = 32,5 \text{кН}; \\ M_3 &= R_B \cdot x_3 = 32,5x_3; \\ x_3 = 0 &\rightarrow M_3 = 0; \\ x_3 = 2m &\rightarrow M_3 = 32,5 \cdot 2 = 65 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка СД $0 \leq x_4 \leq 4m$.

$$\begin{aligned} N_4 &= R_B = 32,5 \text{кН}; \\ Q_4 &= -q \cdot x_4 = -20 \cdot x_4; \\ x_4 = 0 &\rightarrow Q_4 = 0; \\ x_4 = 4m &\rightarrow Q_4 = -20 \cdot 4 = 80 \text{кН} \\ M_4 &= R_B \cdot a - \frac{1}{2}qx_4^2 = 32,5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 20x_4^2 = 65 - 10x_4^2. \end{aligned}$$

Будуємо епюри N , Q , M плоскої рами (рис. 3.7)

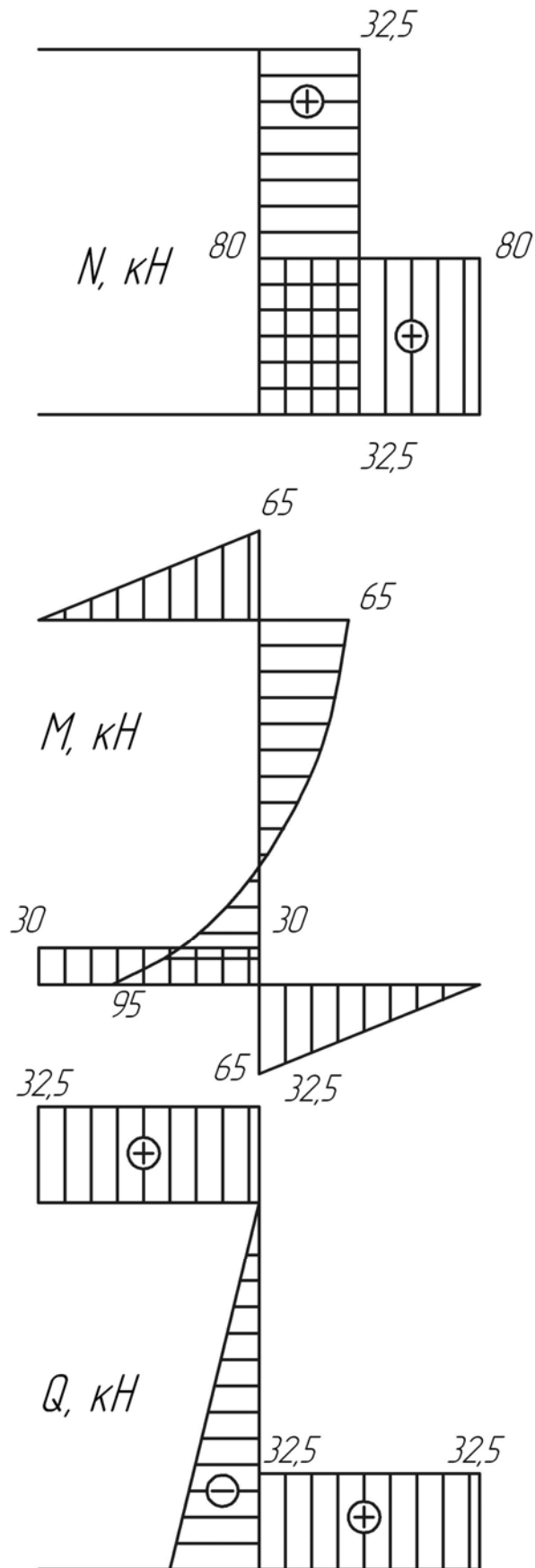


Рисунок 3.7 – Побудова епюр внутрішніх зусиль N , Q , M плоскої рами

$$x_4 = 0 \rightarrow M_4 = 65 \text{ кН};$$

$$x_4 = 2 \text{ м} \rightarrow M_4 = 65 - 10 \cdot 2^2 = 25 \text{ кН};$$

$$x_4 = 3 \text{ м} \rightarrow M_4 = 65 - 10 \cdot 3^2 = -25 \text{ кН};$$

$$x_4 = 4 \text{ м} \rightarrow M_4 = 65 - 10 \cdot 4^2 = -95 \text{ кН}.$$

Задача №3

Дано: $P=10 \text{ кН}$; $q=20 \text{ кН/м}$; $M=30 \text{ кНм}$, $a=2 \text{ м}$, розрахункова схема (рис. 3.8)

Побудувати епюри N , Q , M

Розв'язання

Задана система (рис. 3.8) має чотири ділянки. Обчислюємо значення зусиль N , Q і M на кожній ділянці.

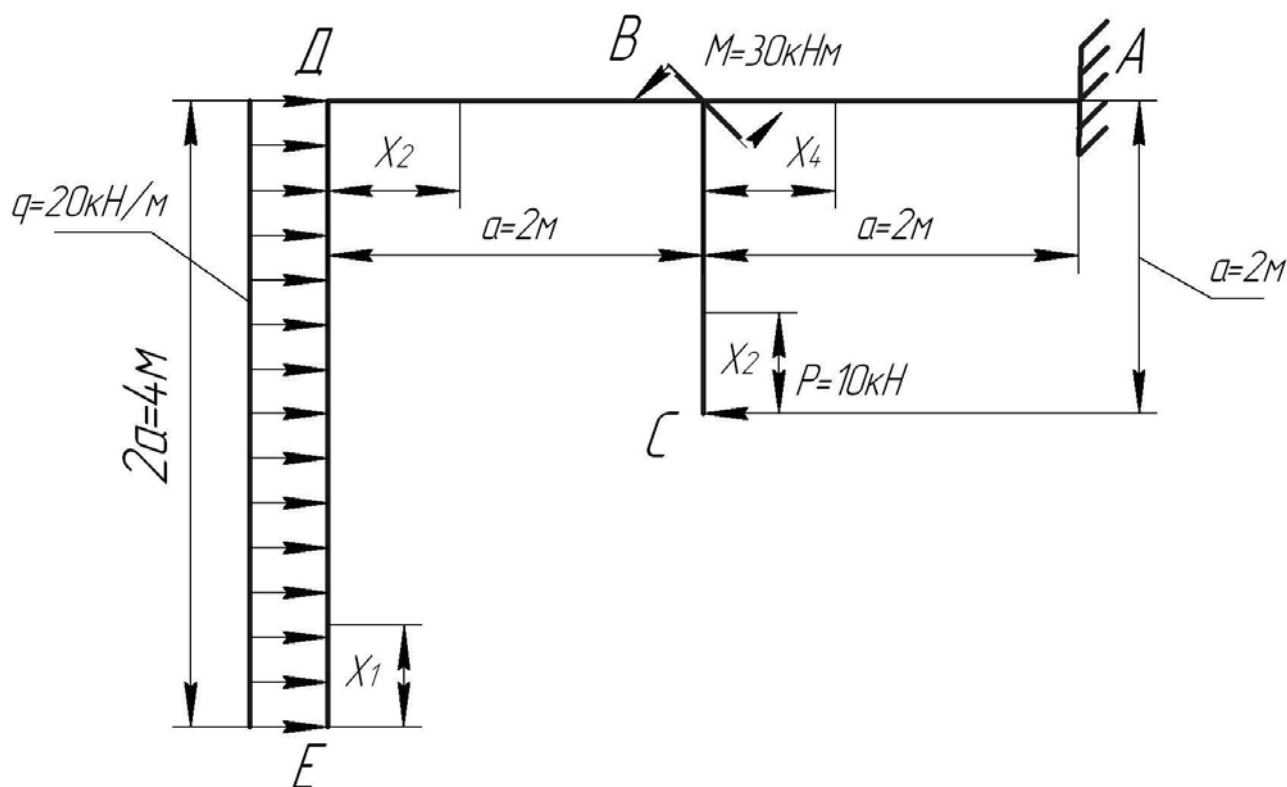


Рисунок 3.8 – Розрахункова схема плоскої консольної рами

Ділянка ЕД $0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м}$.

$$N_1 = 0$$

$$Q_1 = -qx = -20 \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0 \rightarrow Q_1 = 0;$$

$$x_1 = 4 \text{ м} \rightarrow Q_1 = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кН};$$

$$M_1 = -\frac{1}{2}qx_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot x_1^2 = -10x_1^2;$$

$$x_4 = 0 \rightarrow Q = 0;$$

$$x_4 = 2m = M_1 = -10 \cdot 2^2 = -40 \text{кНм};$$

$$x_4 = 4m = M_1 = -10 \cdot 4^2 = -160 \text{кНм}.$$

Ділянка ДВ $0 \leq x_2 \leq 2m$.

$$N_2 = -qa = -20 \cdot 4 = -80 \text{кН};$$

$$Q_2 = 0;$$

$$M_2 = -q \cdot 2a \cdot a = 2qa^2 = 160 \text{кНм}.$$

Ділянка СВ $0 \leq x_3 \leq 2m$.

$$N_3 = 0;$$

$$Q_3 = P = 10 \text{кН};$$

$$x_3 = P \cdot x_3 = 10x_3;$$

$$x_3 = 0 \rightarrow M_3 = 0;$$

$$x_3 = 2m \rightarrow M_3 = -10 \cdot 2 = 20 \text{кНм}.$$

Ділянка ВА $0 \leq x_4 \leq 2m$.

$$N_4 = -q \cdot 2a + P = -20 \cdot 2 \cdot 2 + 10 = -70 \text{кН};$$

$$Q_4 = 0;$$

$$M_4 = -q \cdot 2 \cdot 2 - M + P \cdot a = -20 \cdot 2 \cdot 2 - 30 + 10 \cdot 2 = -170 \text{кНм}.$$

За отриманими результатами будемо епюри внутрішніх зусиль N, Q, M (рис. 3.9)

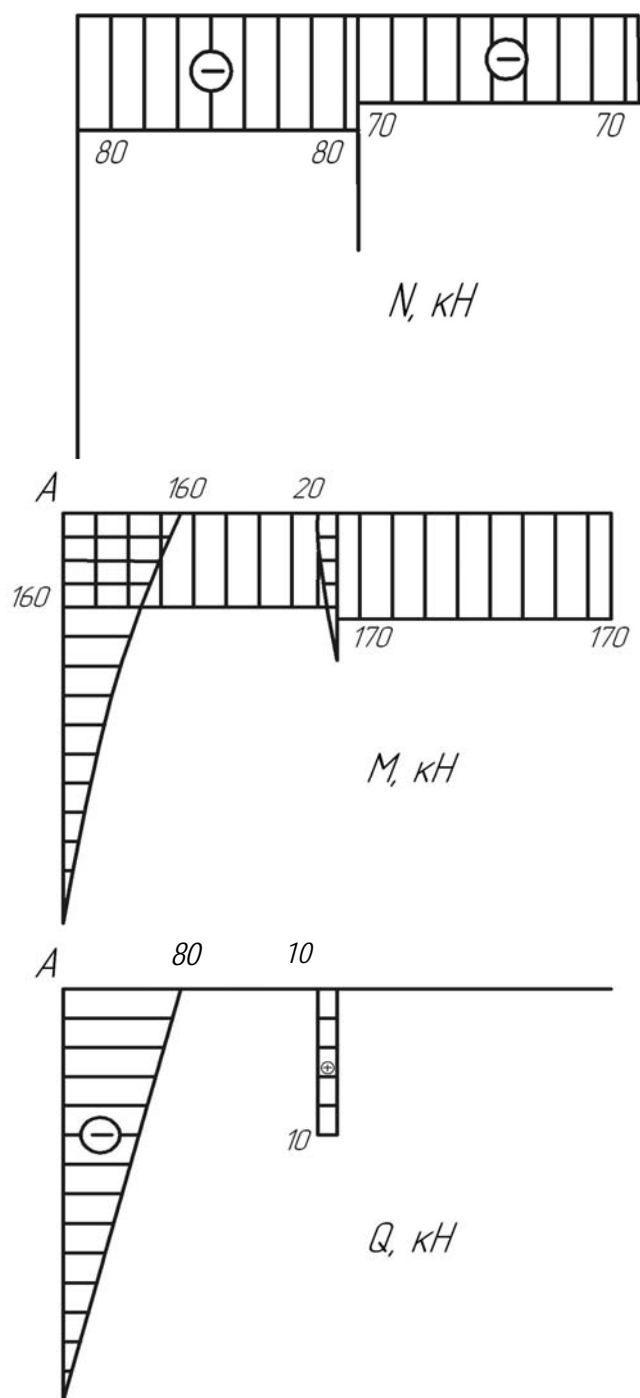


Рисунок 3.9 – Епюра внутрішніх зусиль N , Q і M плоскої консольної рами

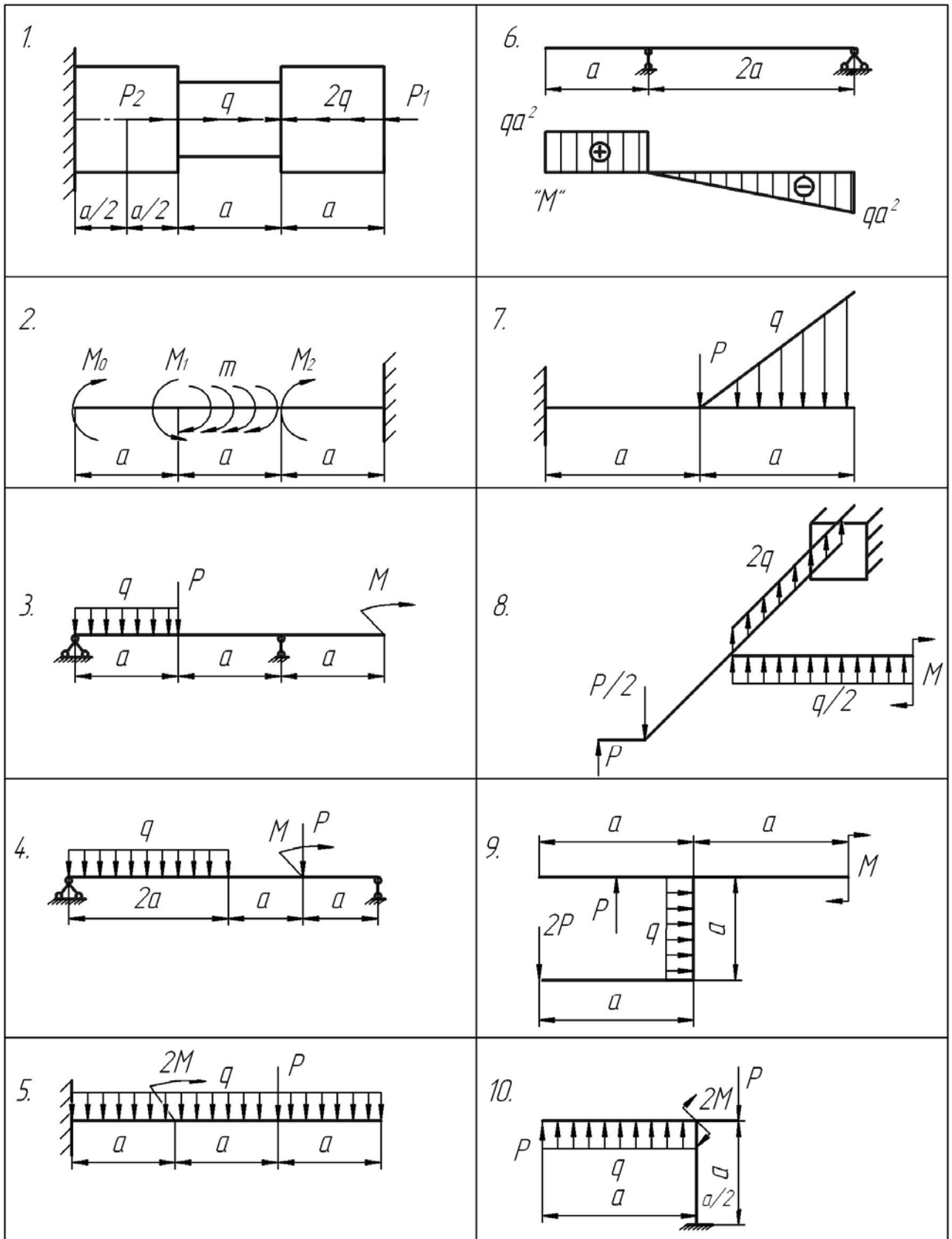
Статична перевірка. Для вирізанного вузла “А” потрібно:

$$\begin{aligned} \sum x &= 0 & 80 - 80 &= 0; \\ \sum y &= 0 & 0 &= 0; \\ \sum M_a &= 0 & 160 - 160 &= 0. \end{aligned}$$

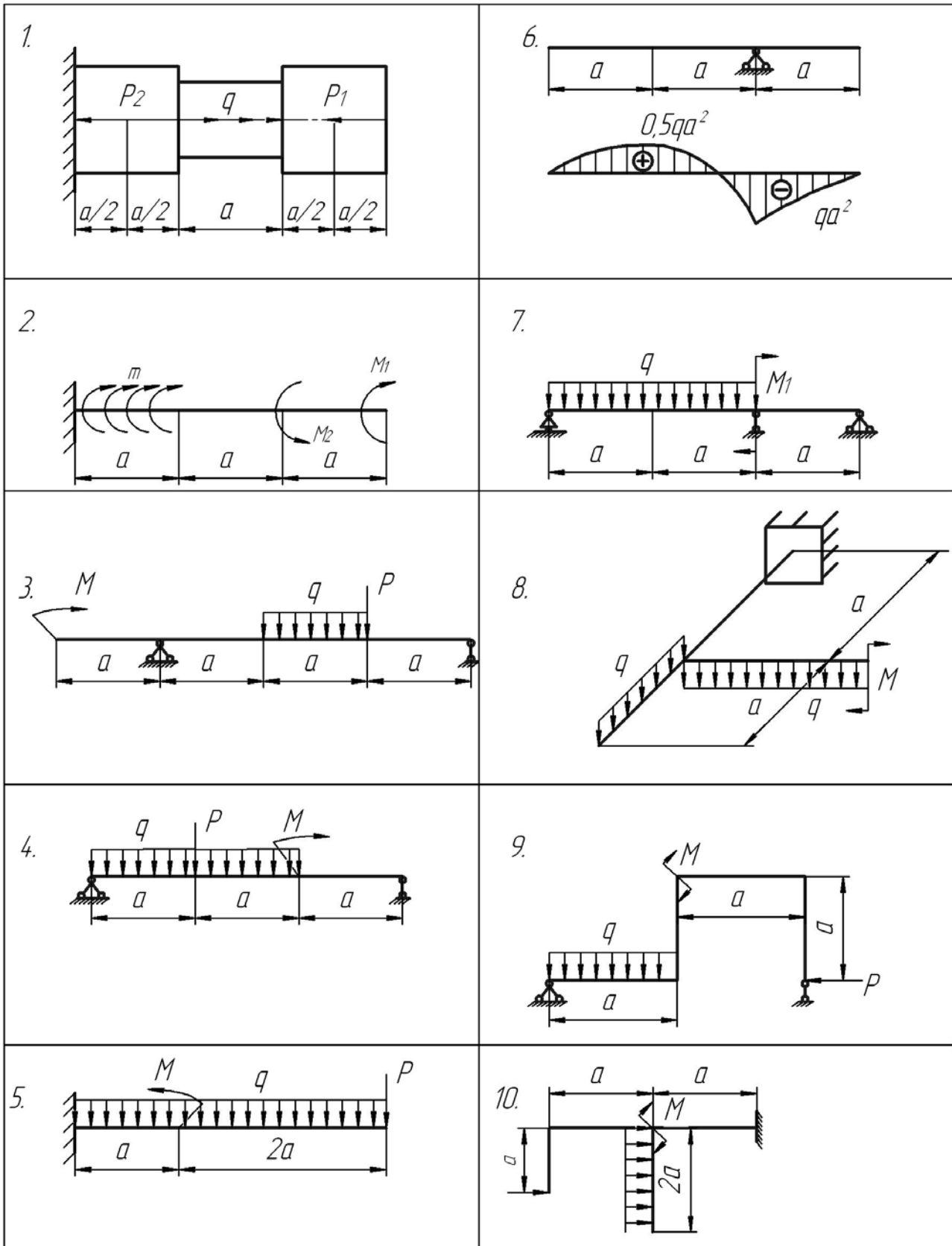
Варіанти індивідуальних завдань розрахунково-проектувальної роботи видаються студенту викладачем згідно з додатком А.

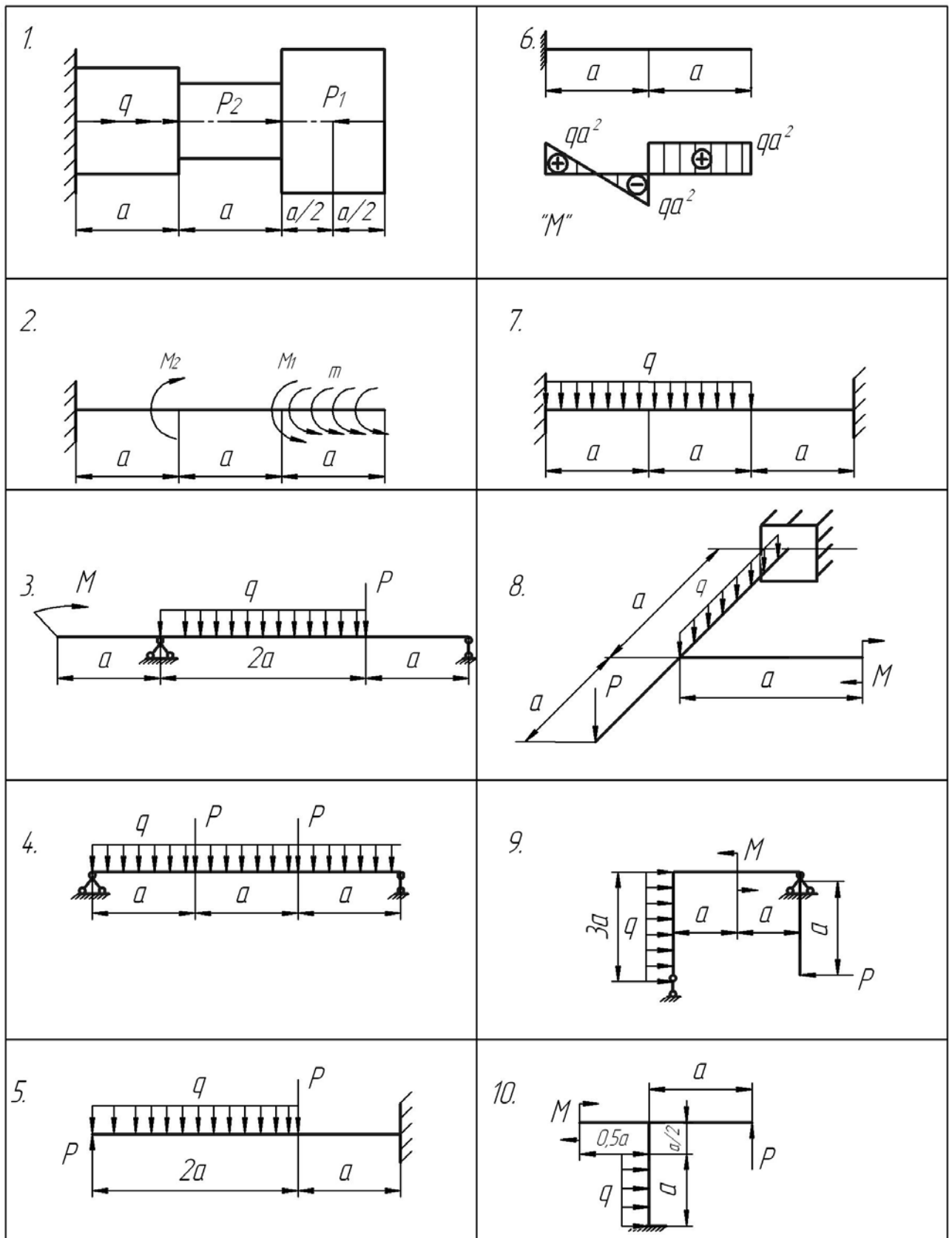
ДОДАТОК А

№1

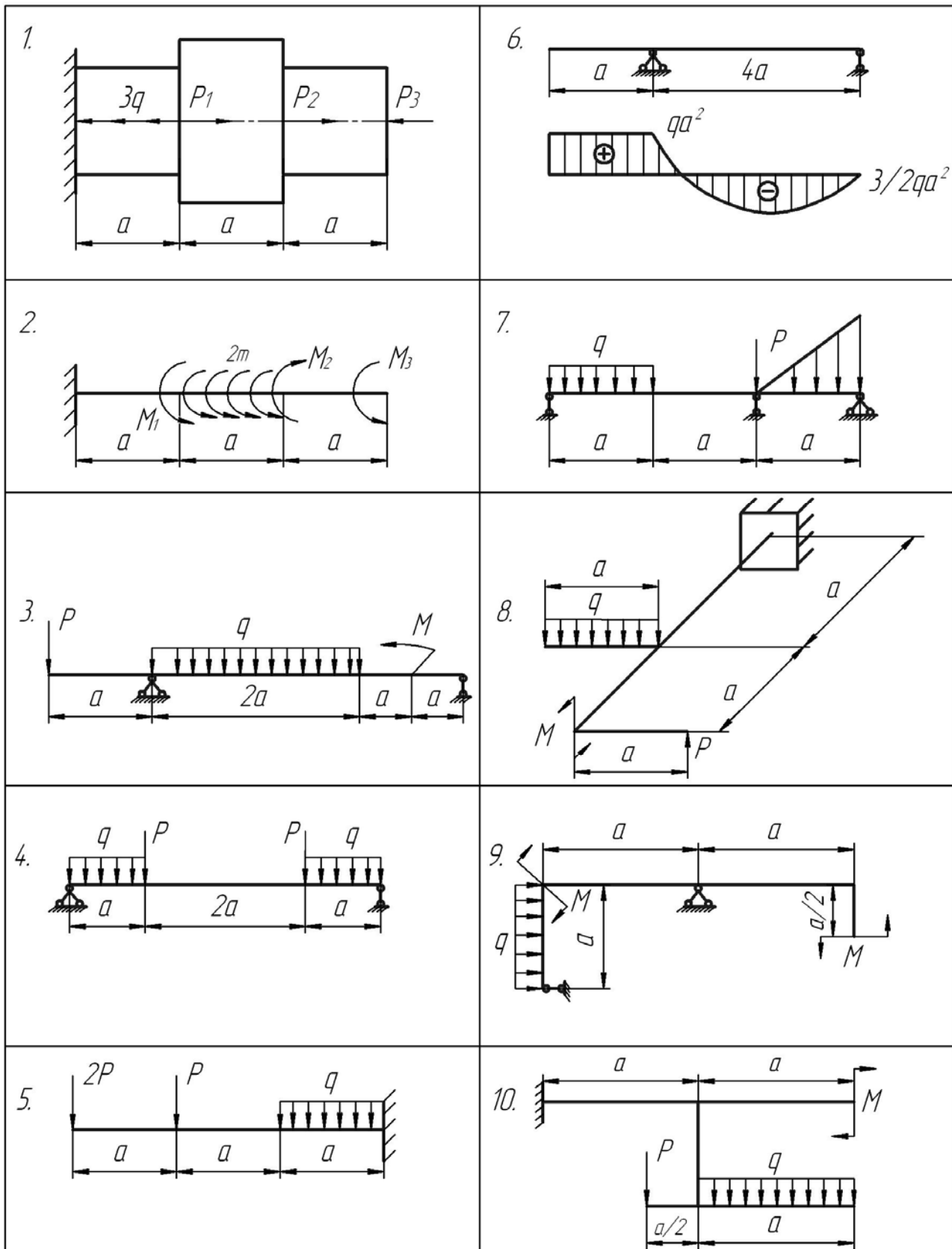


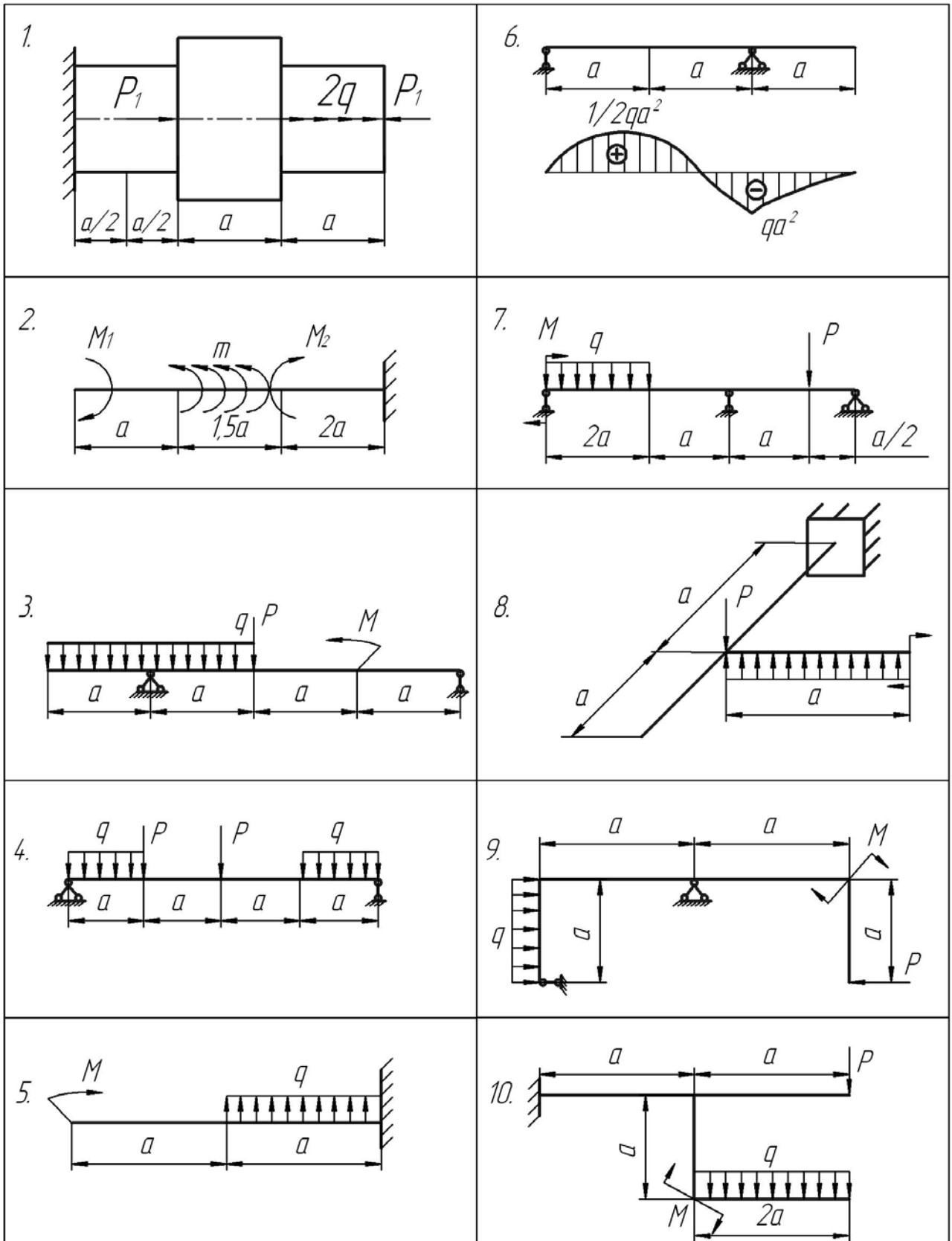
№2



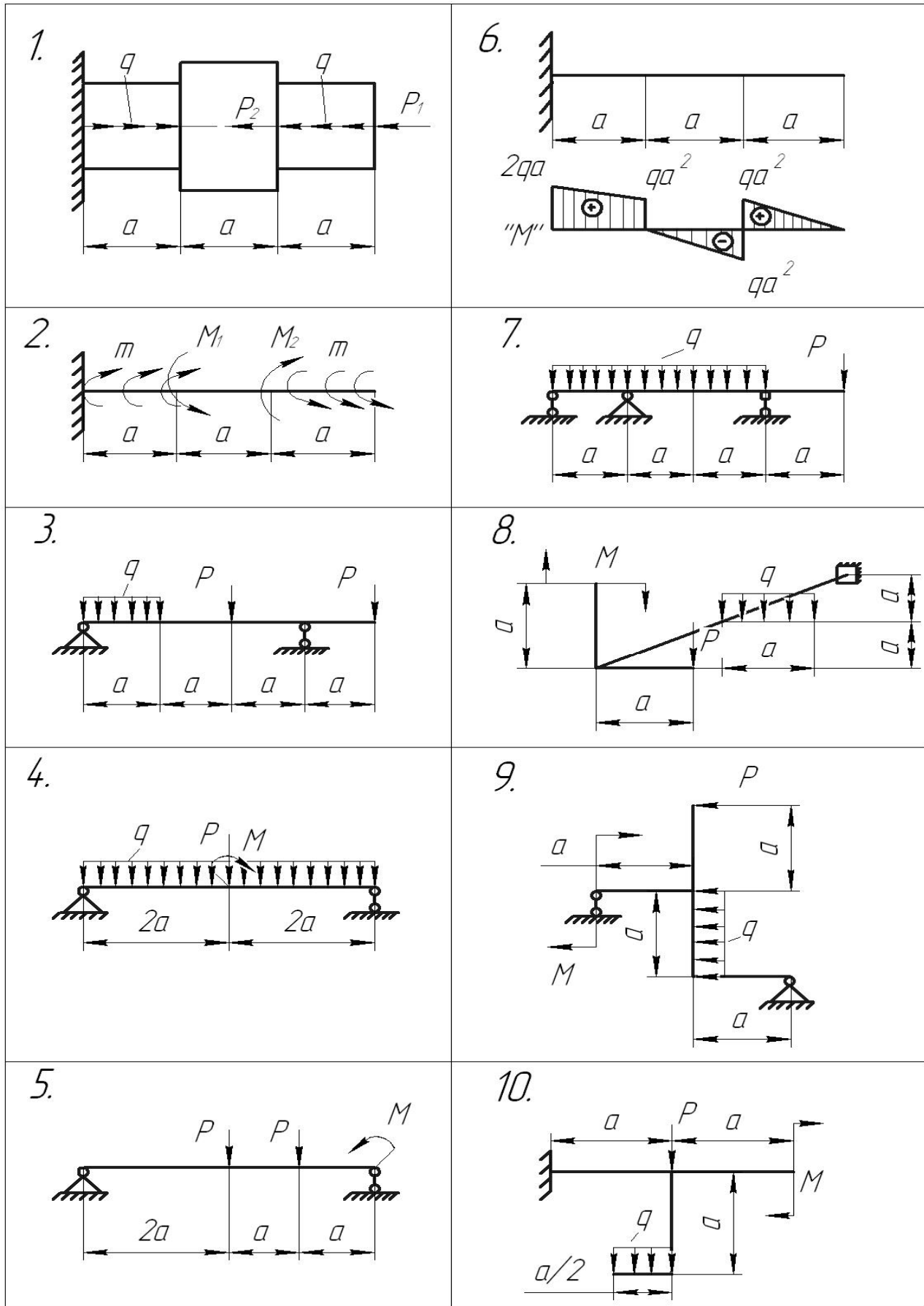


№4

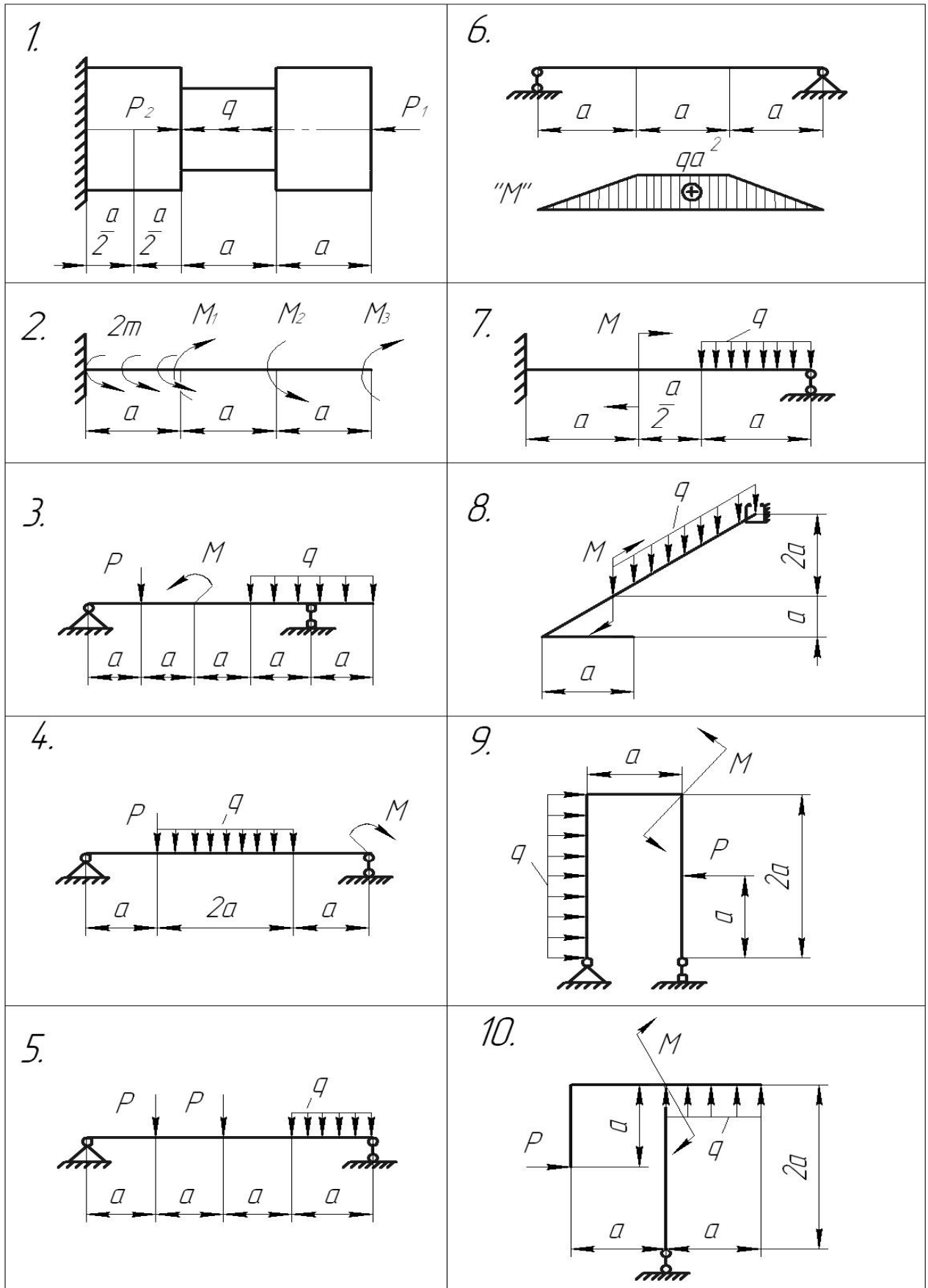




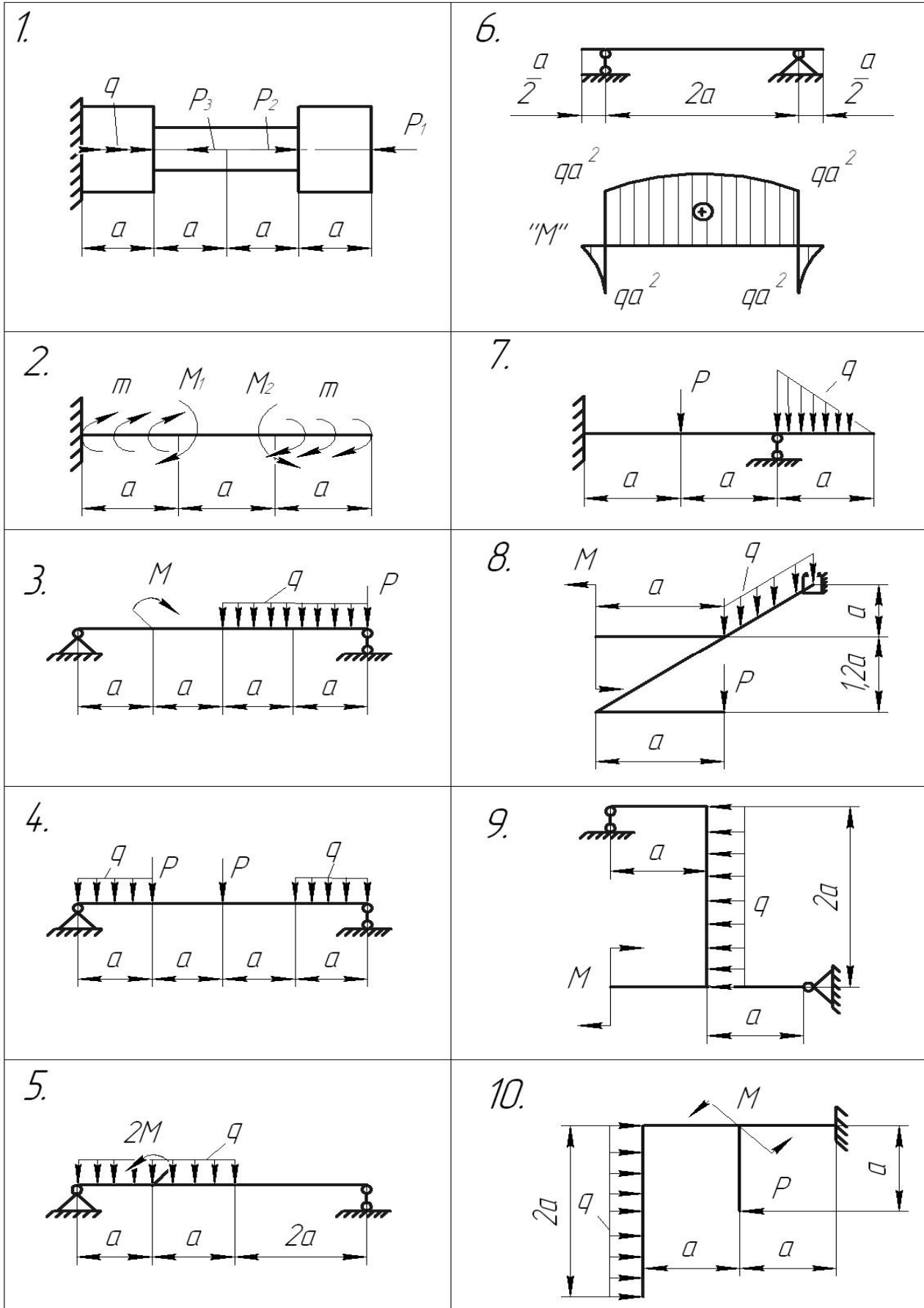
№6



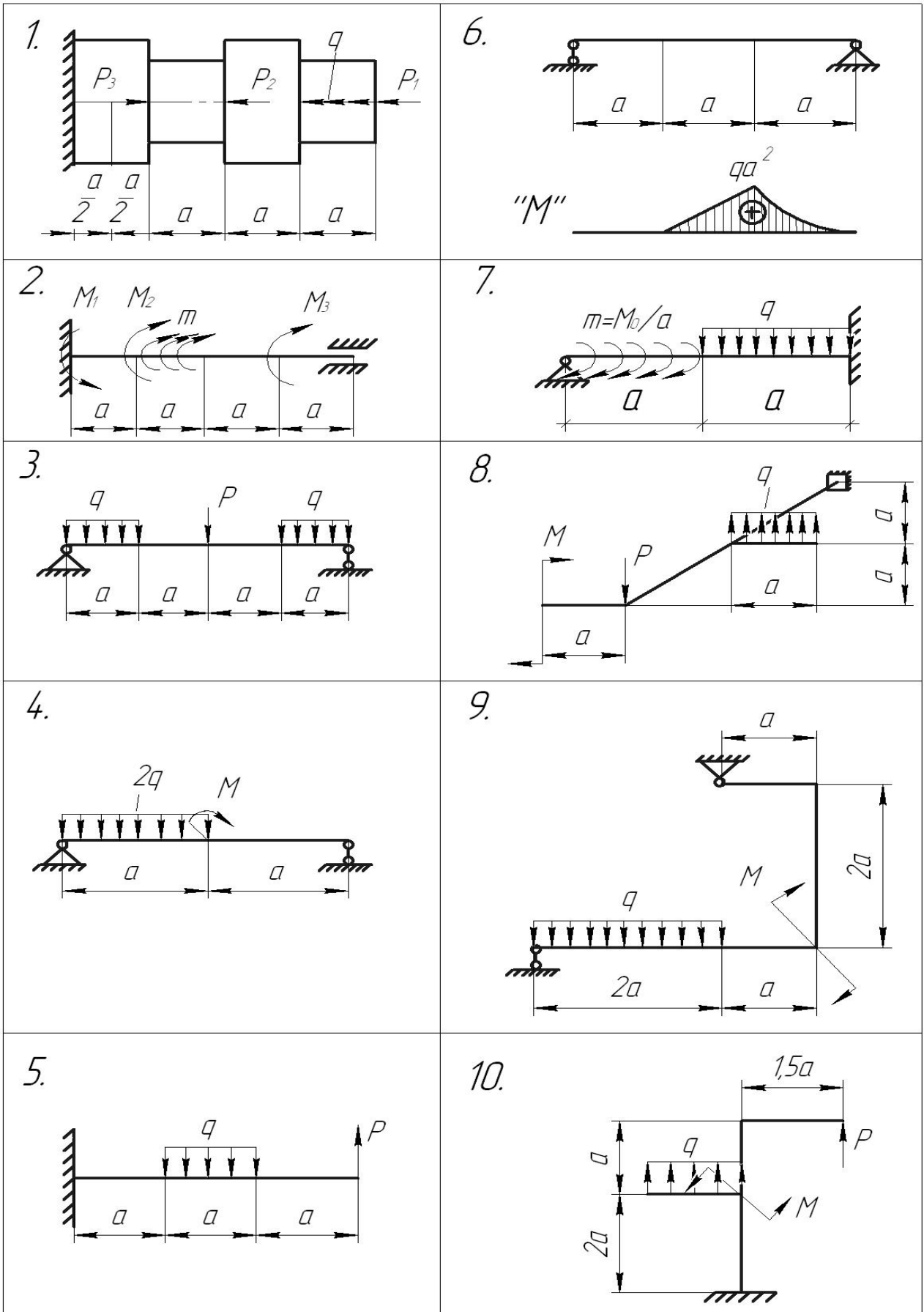
№7



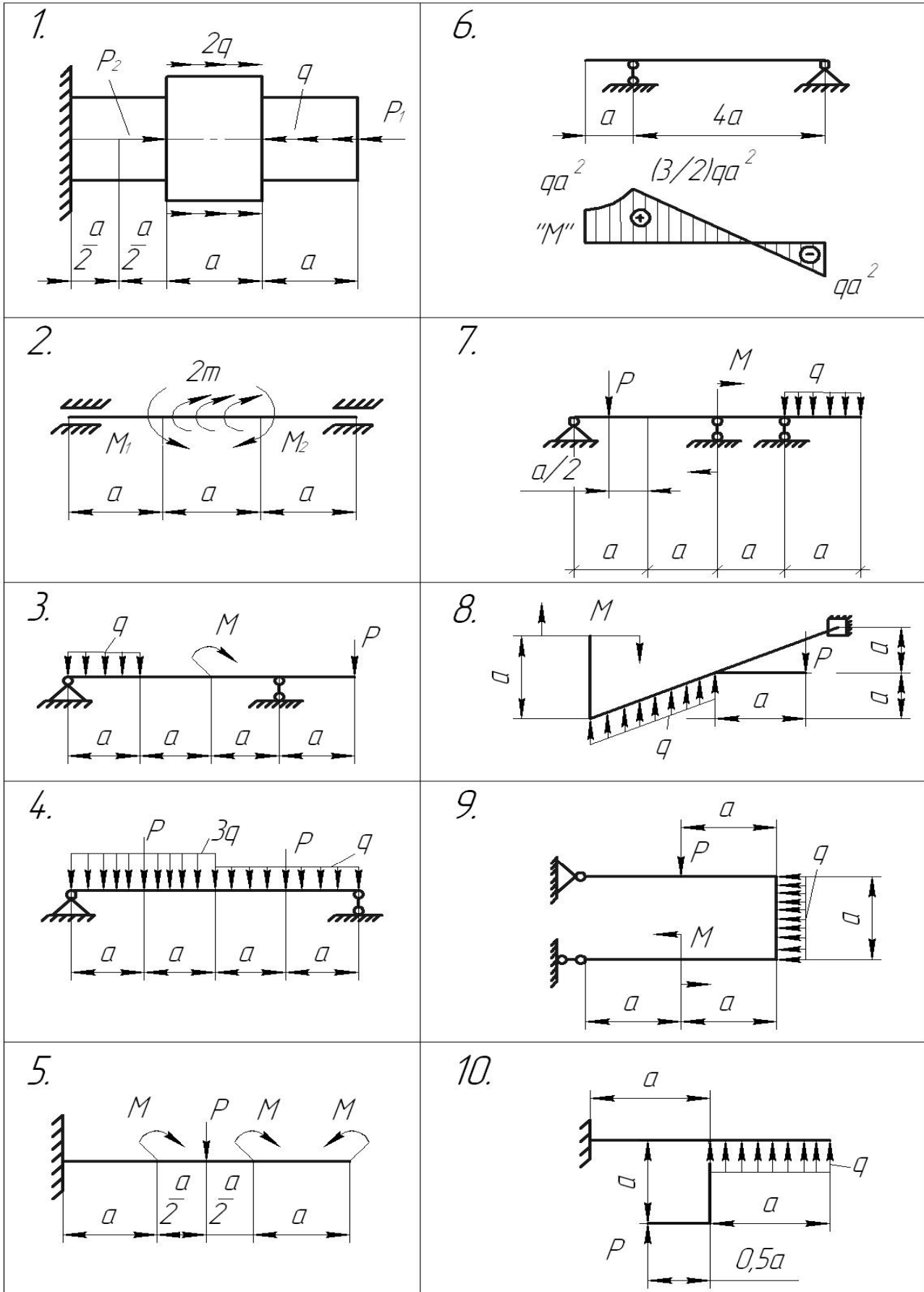
№8



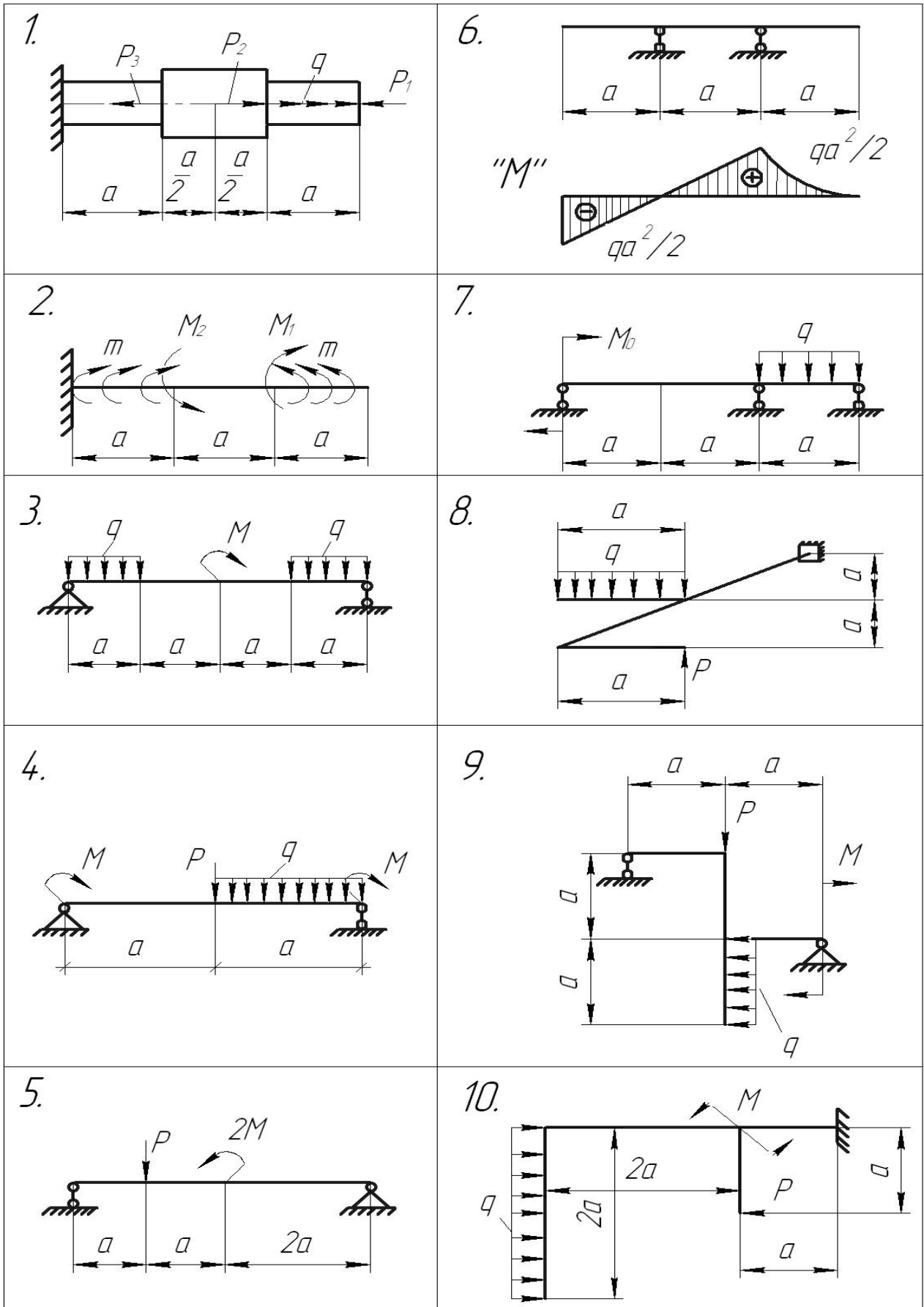
№9



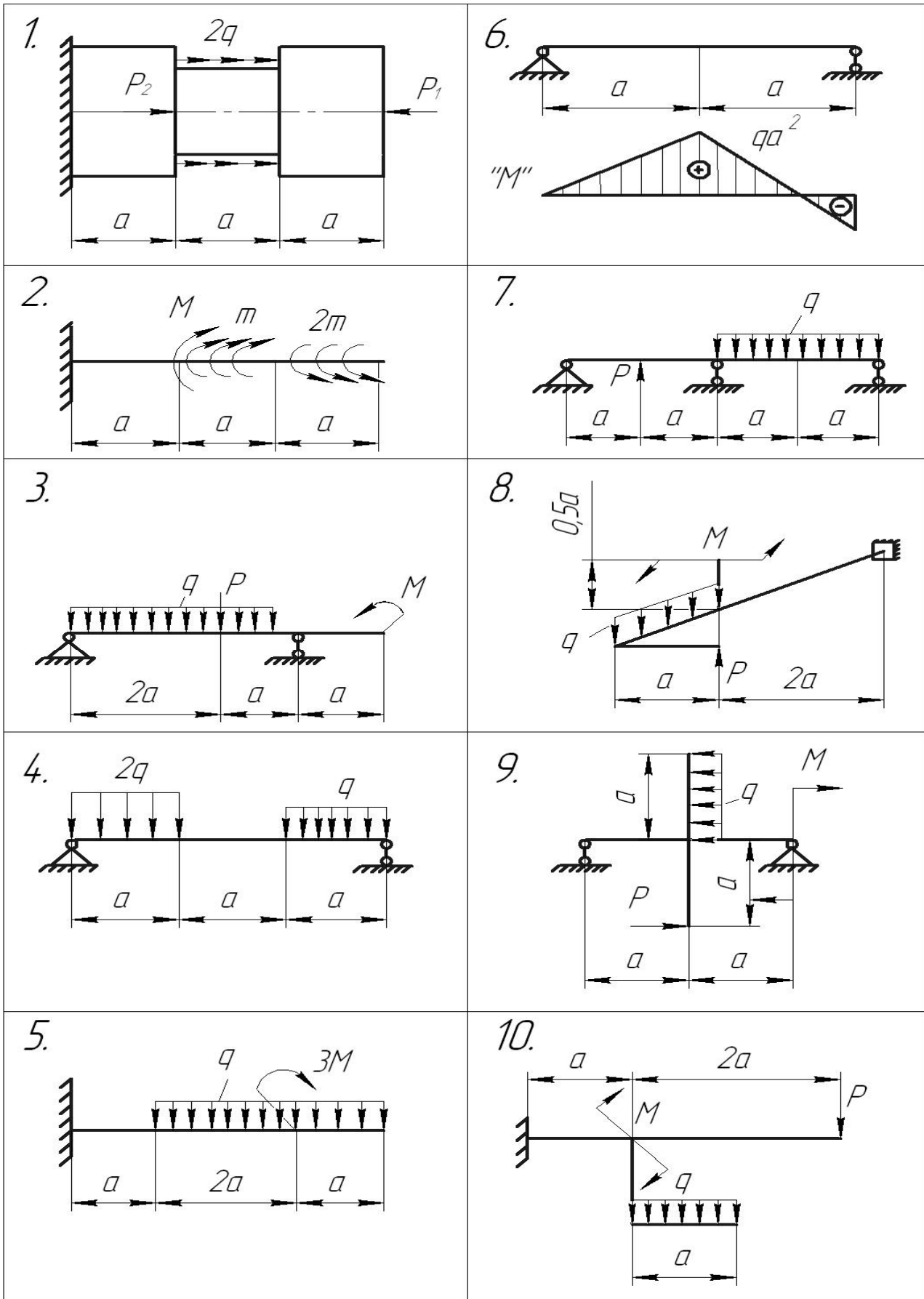
№10



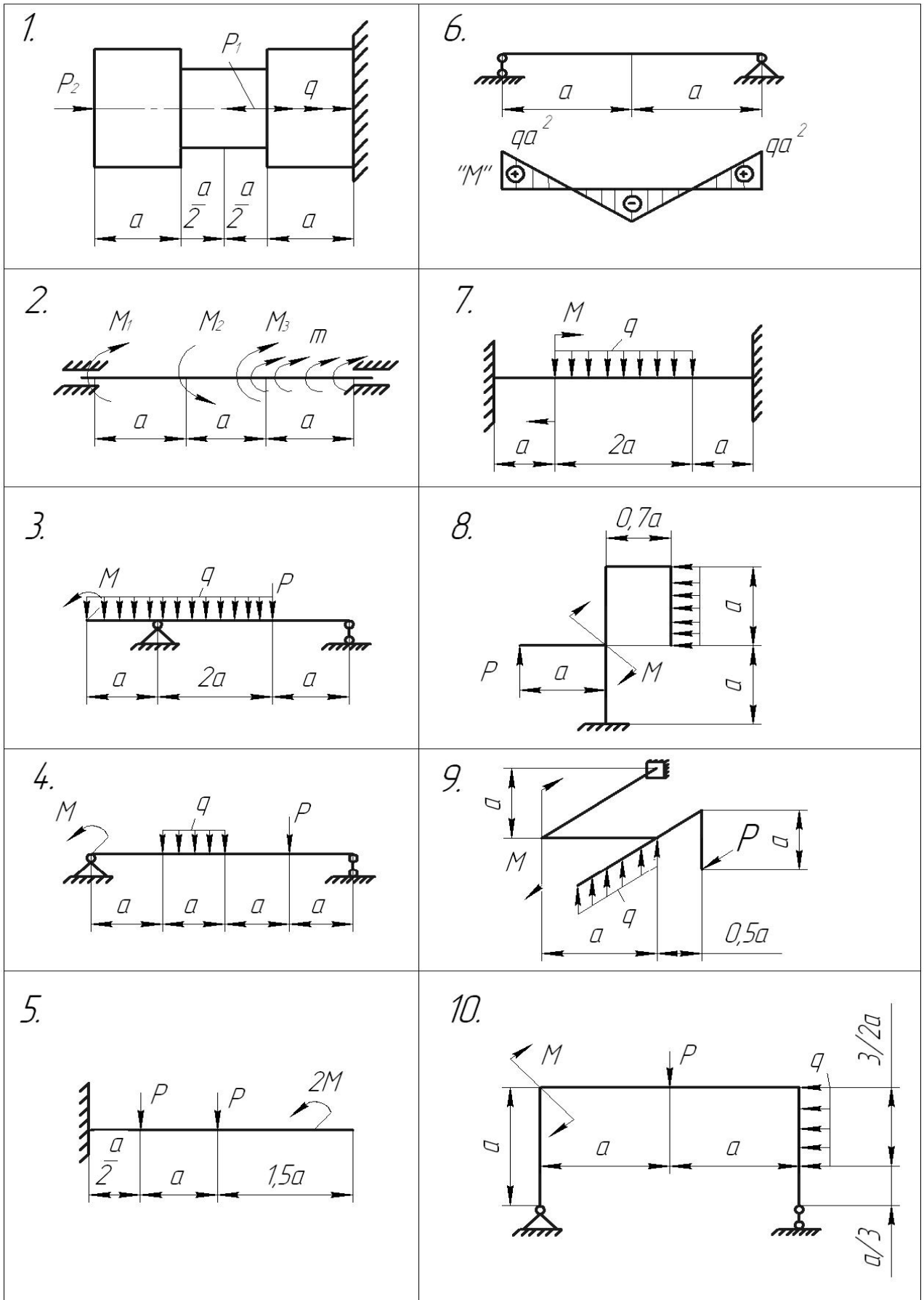
№11



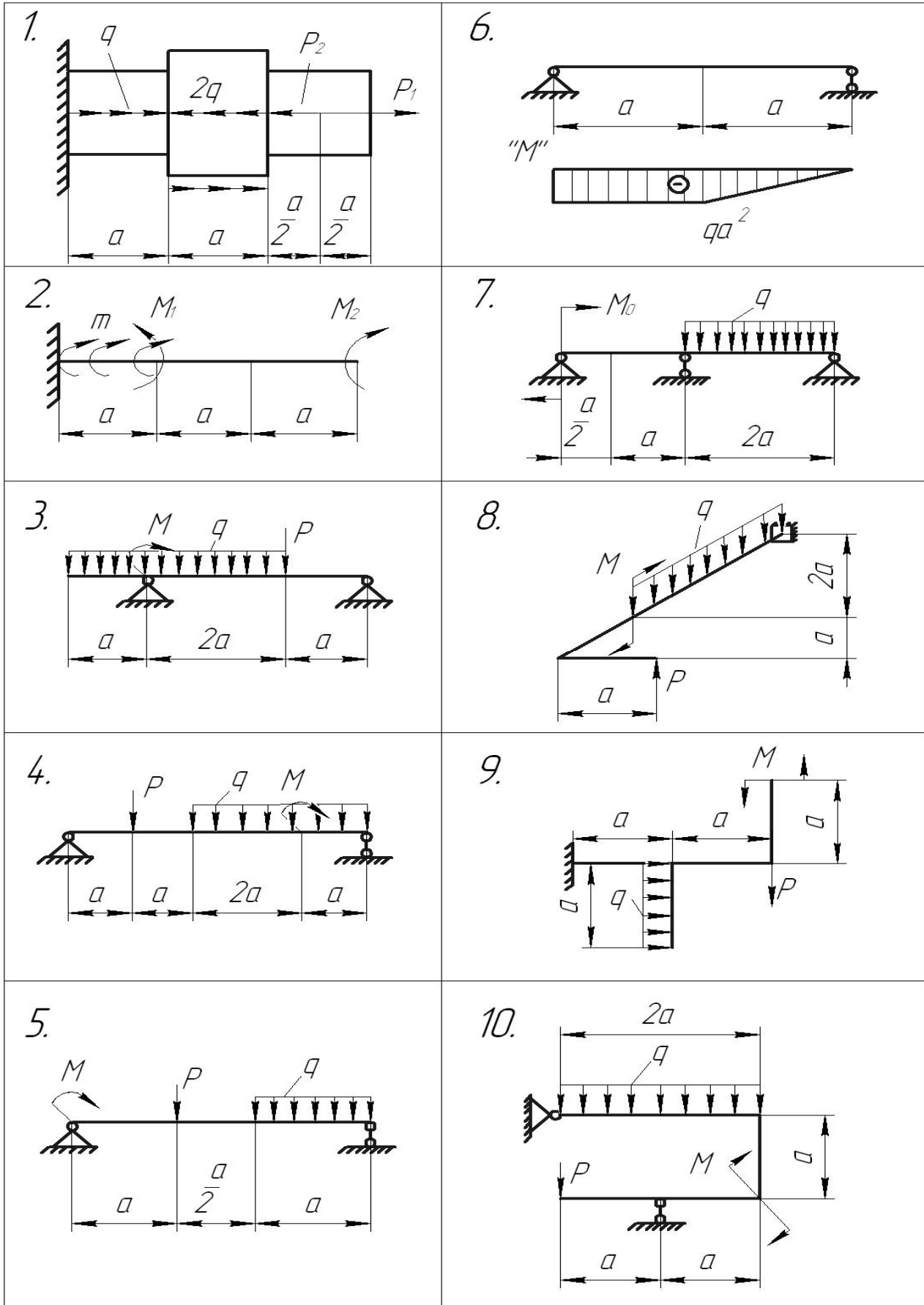
№12



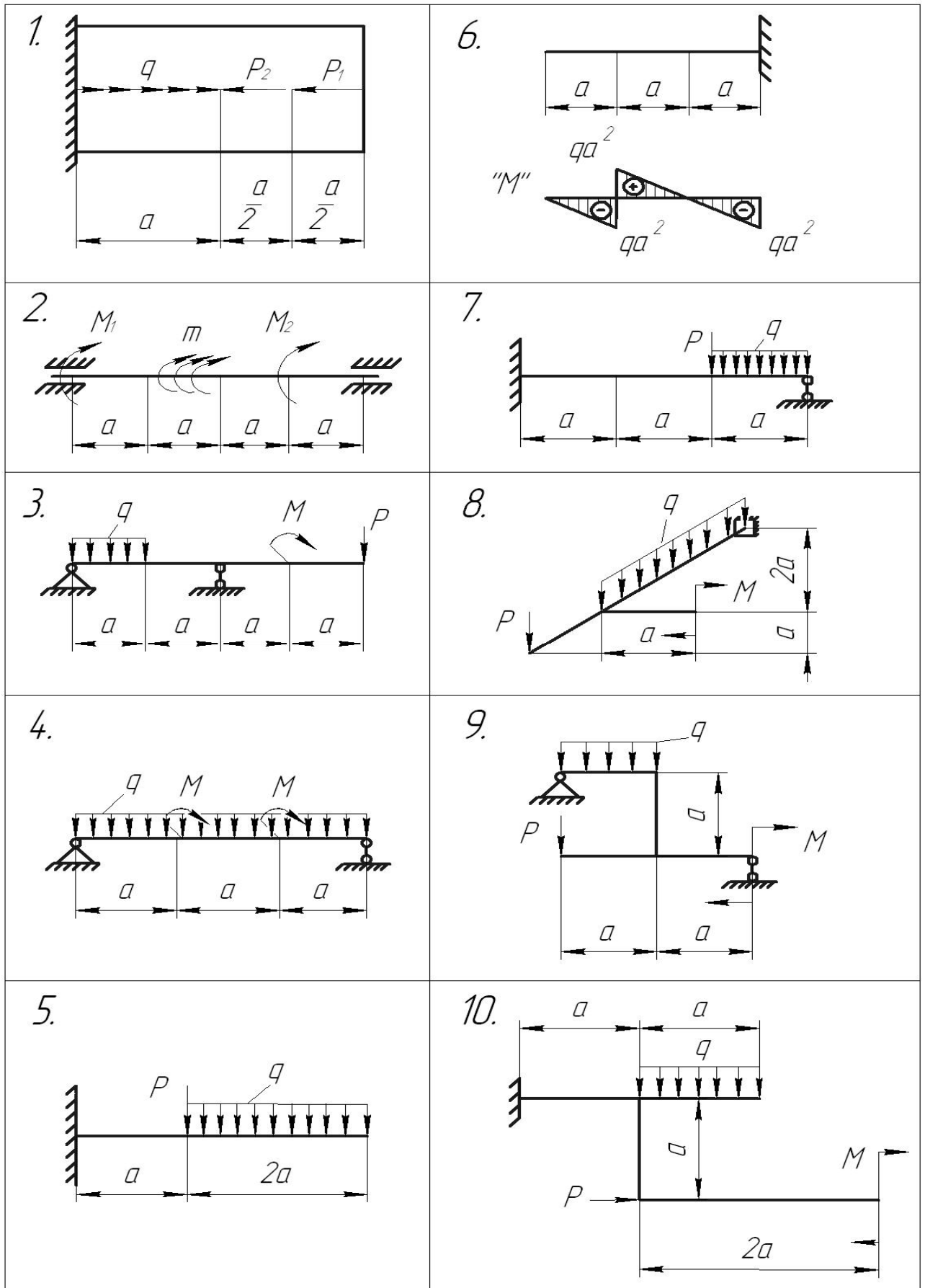
№13



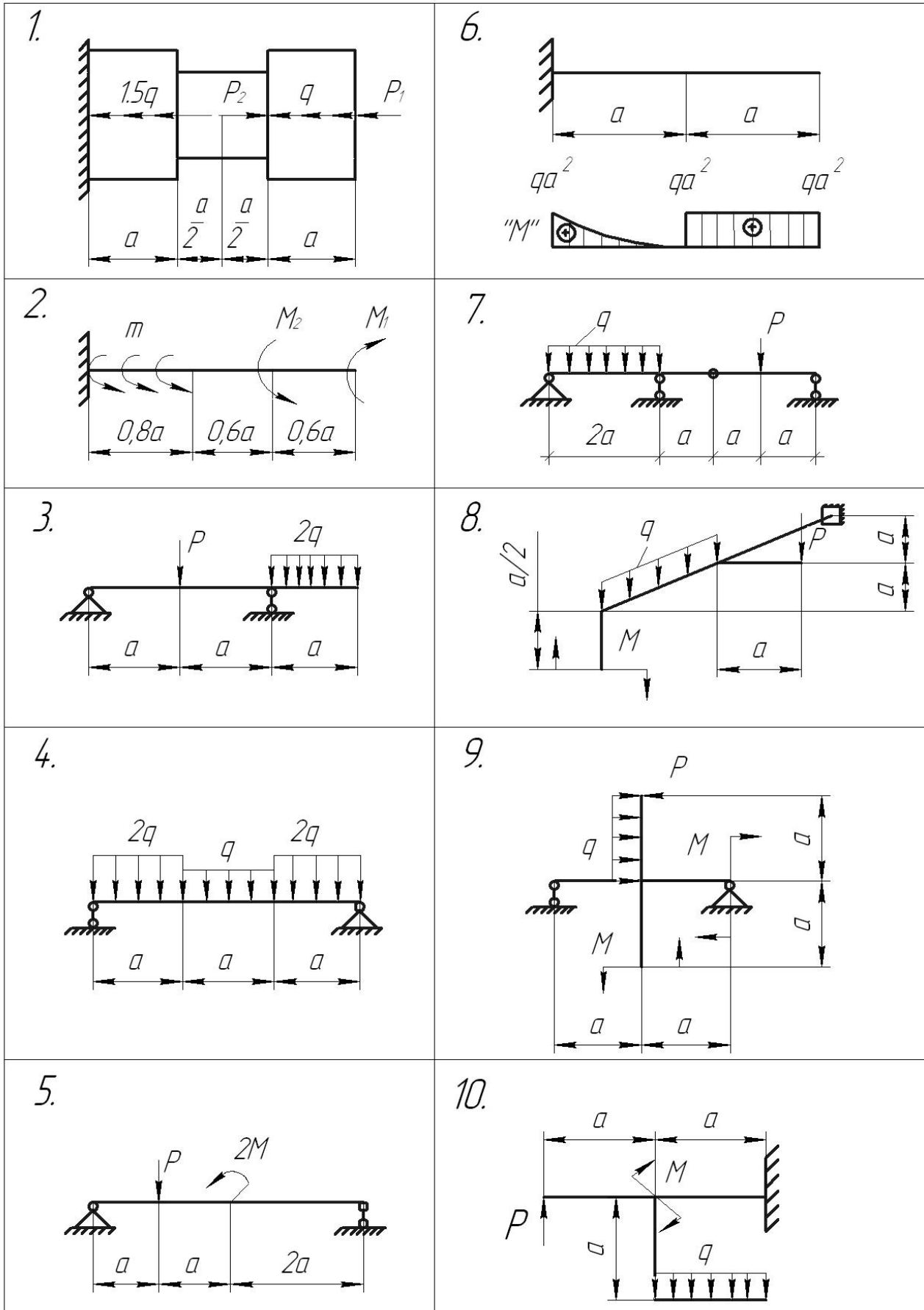
№14



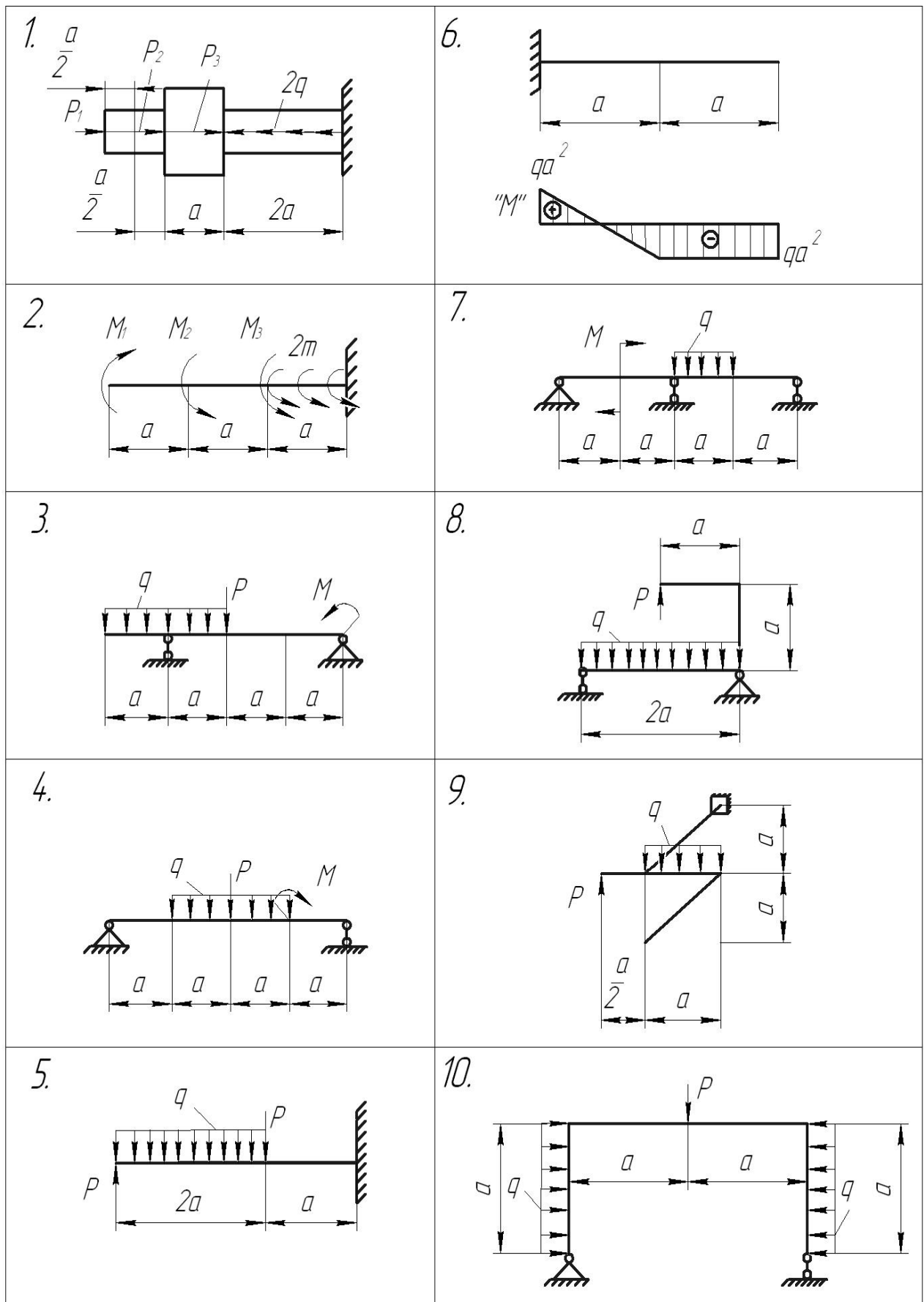
№15



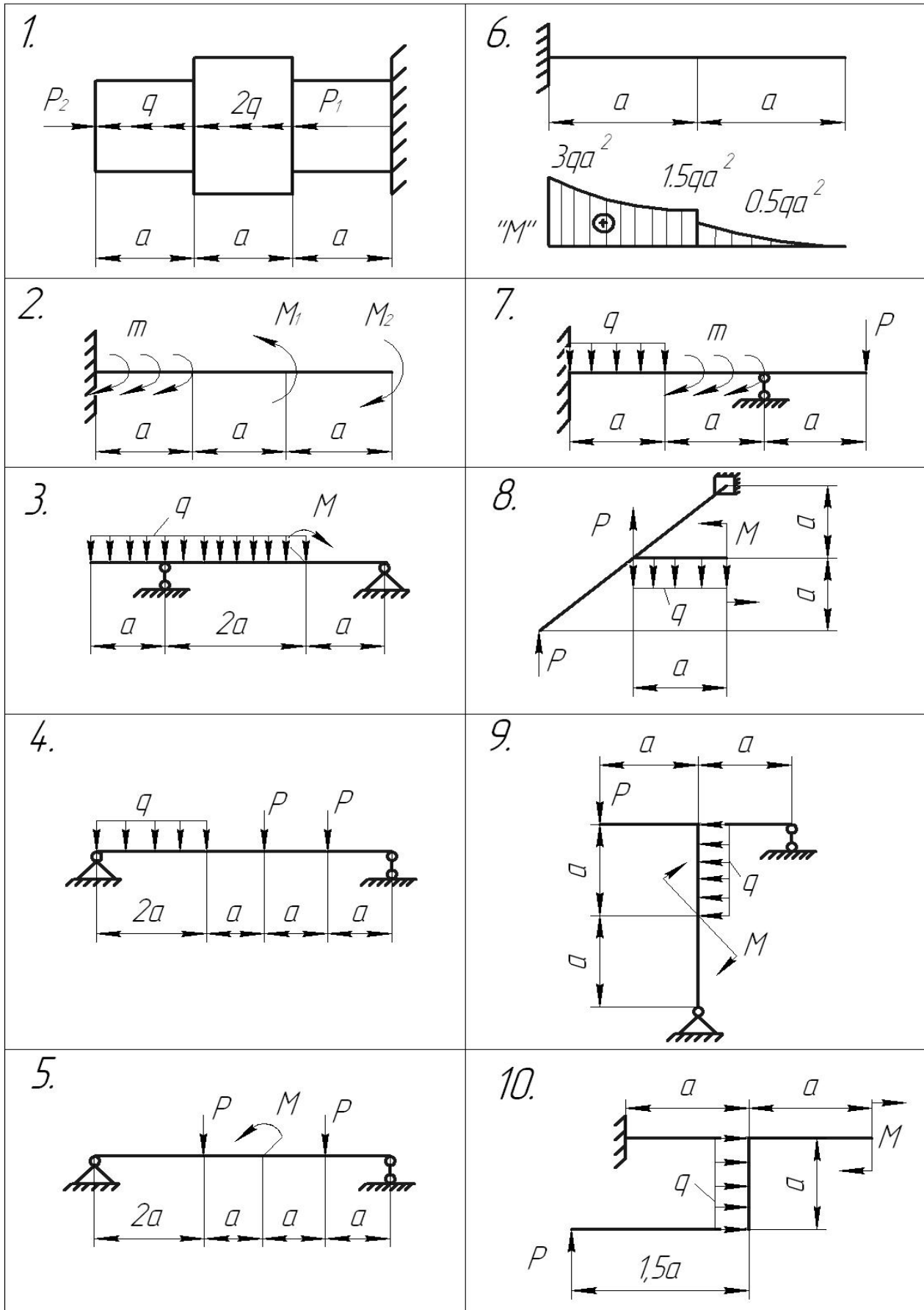
№16



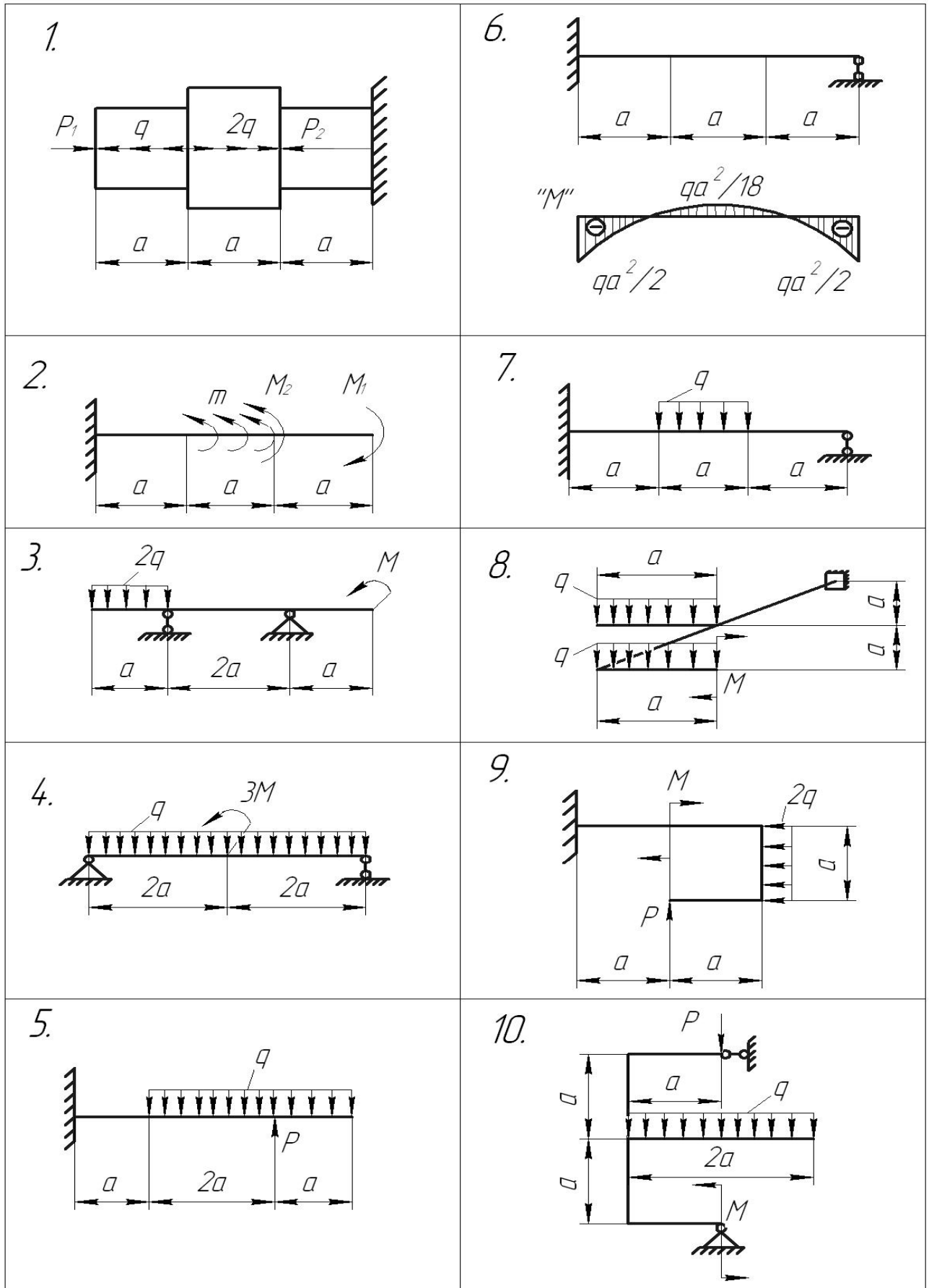
№17



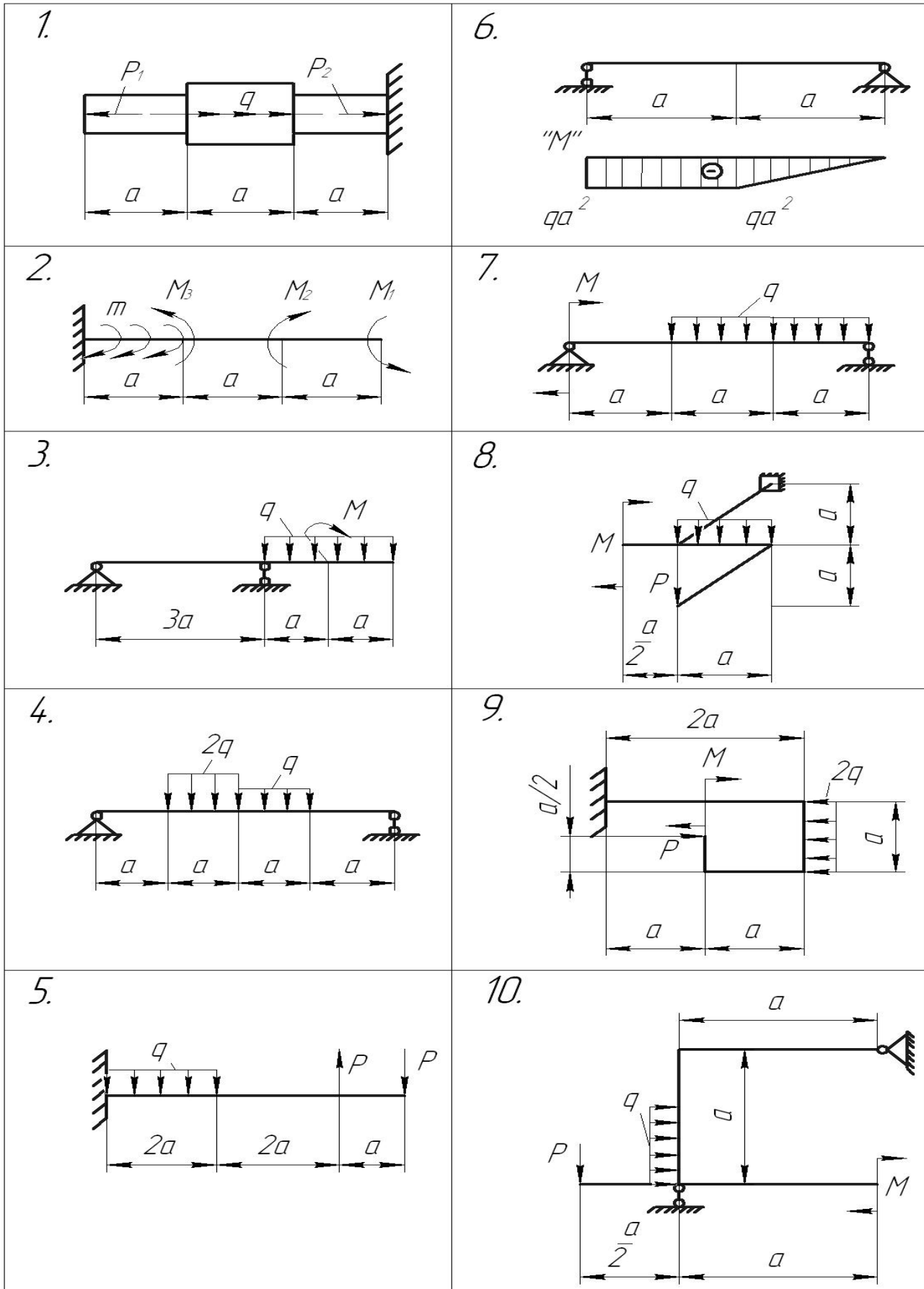
№18



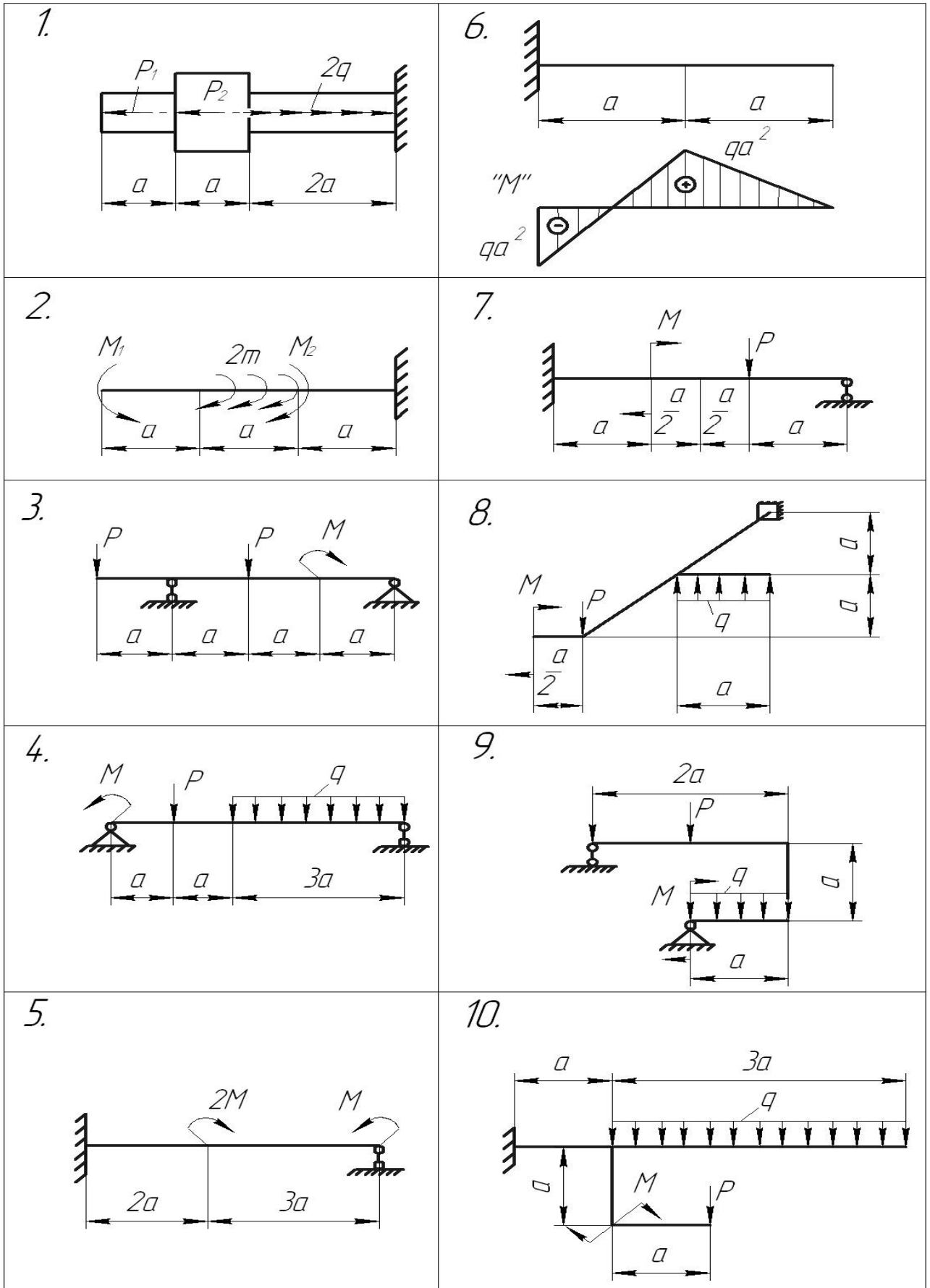
№19



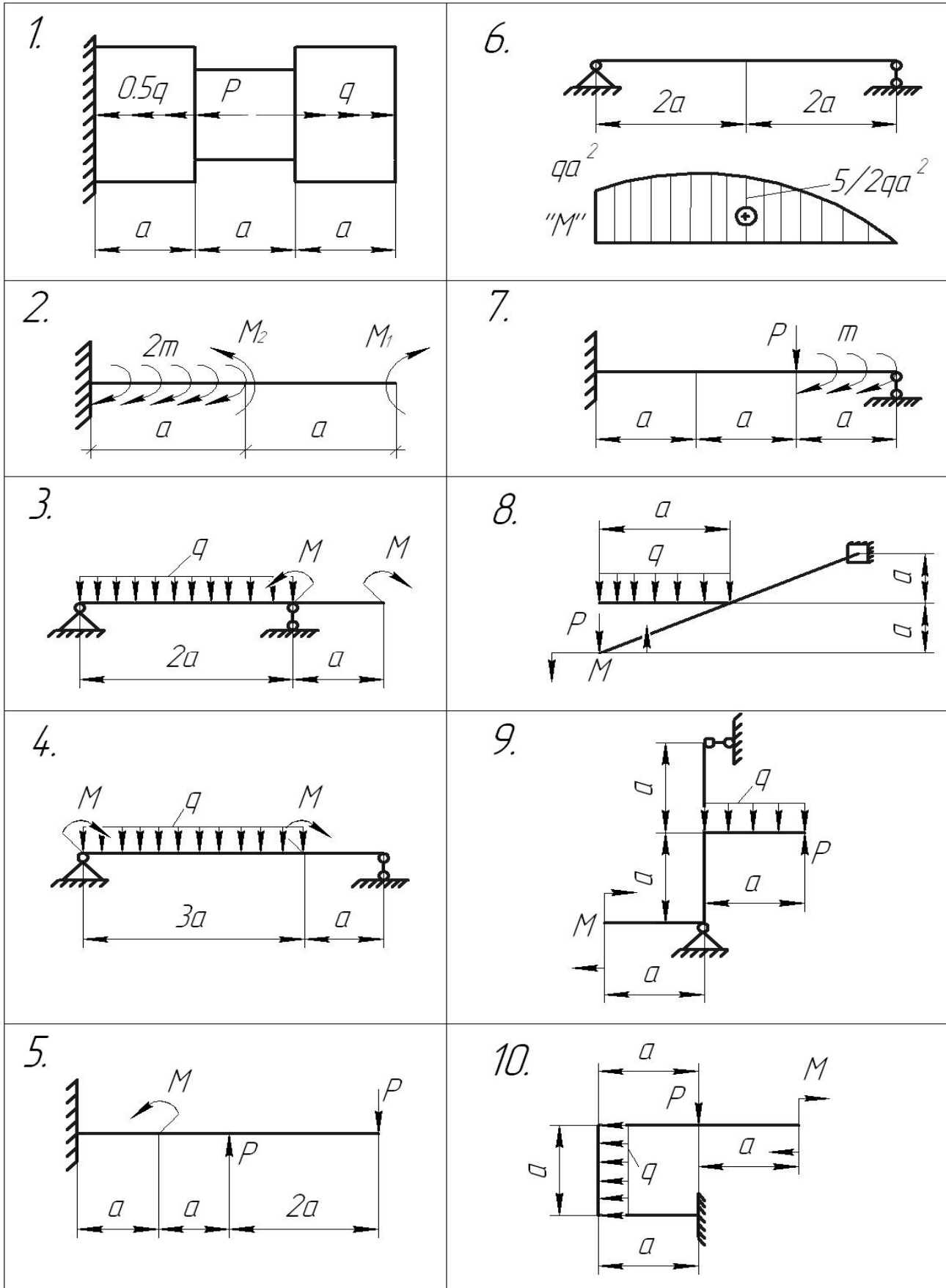
№20



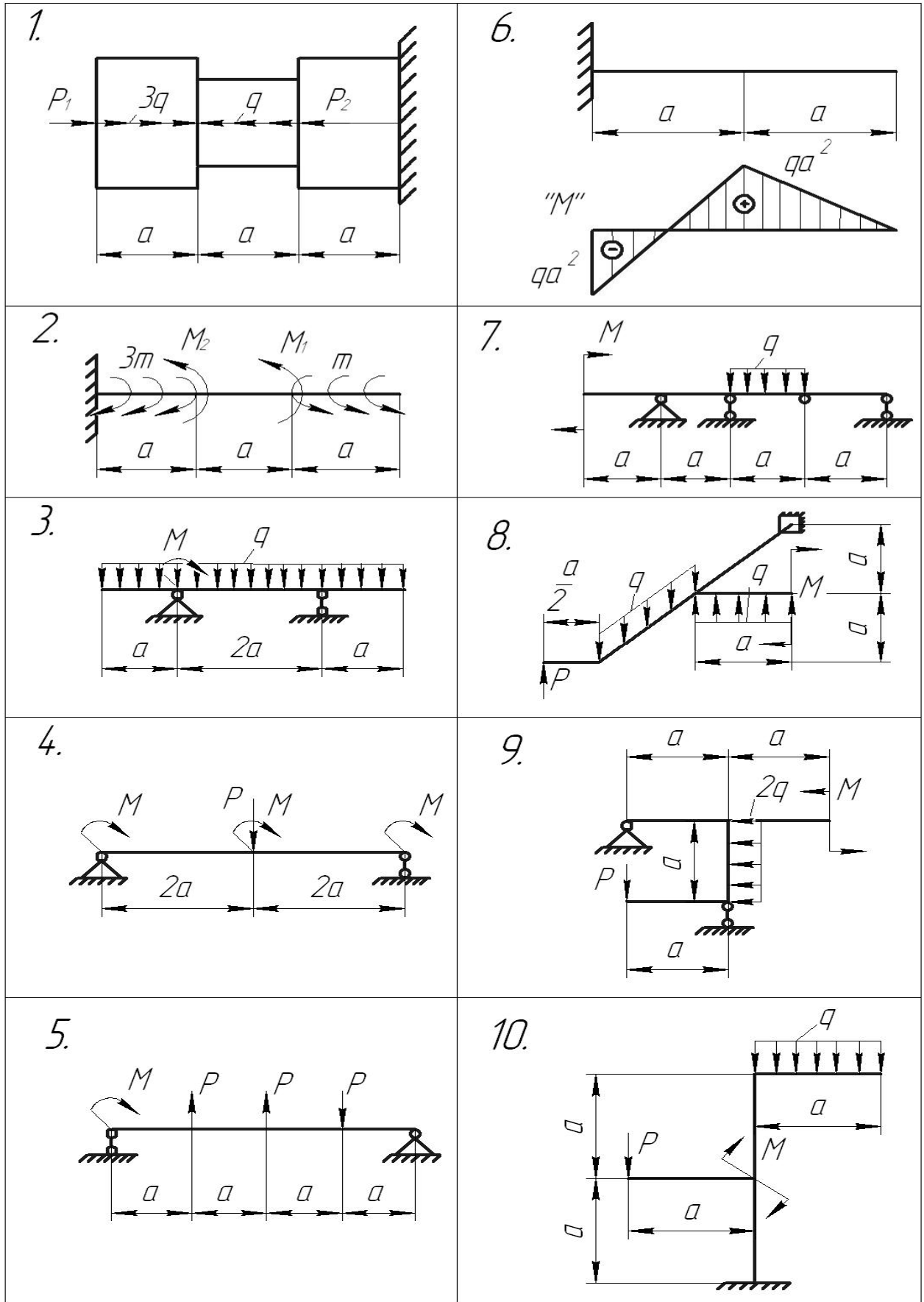
№21



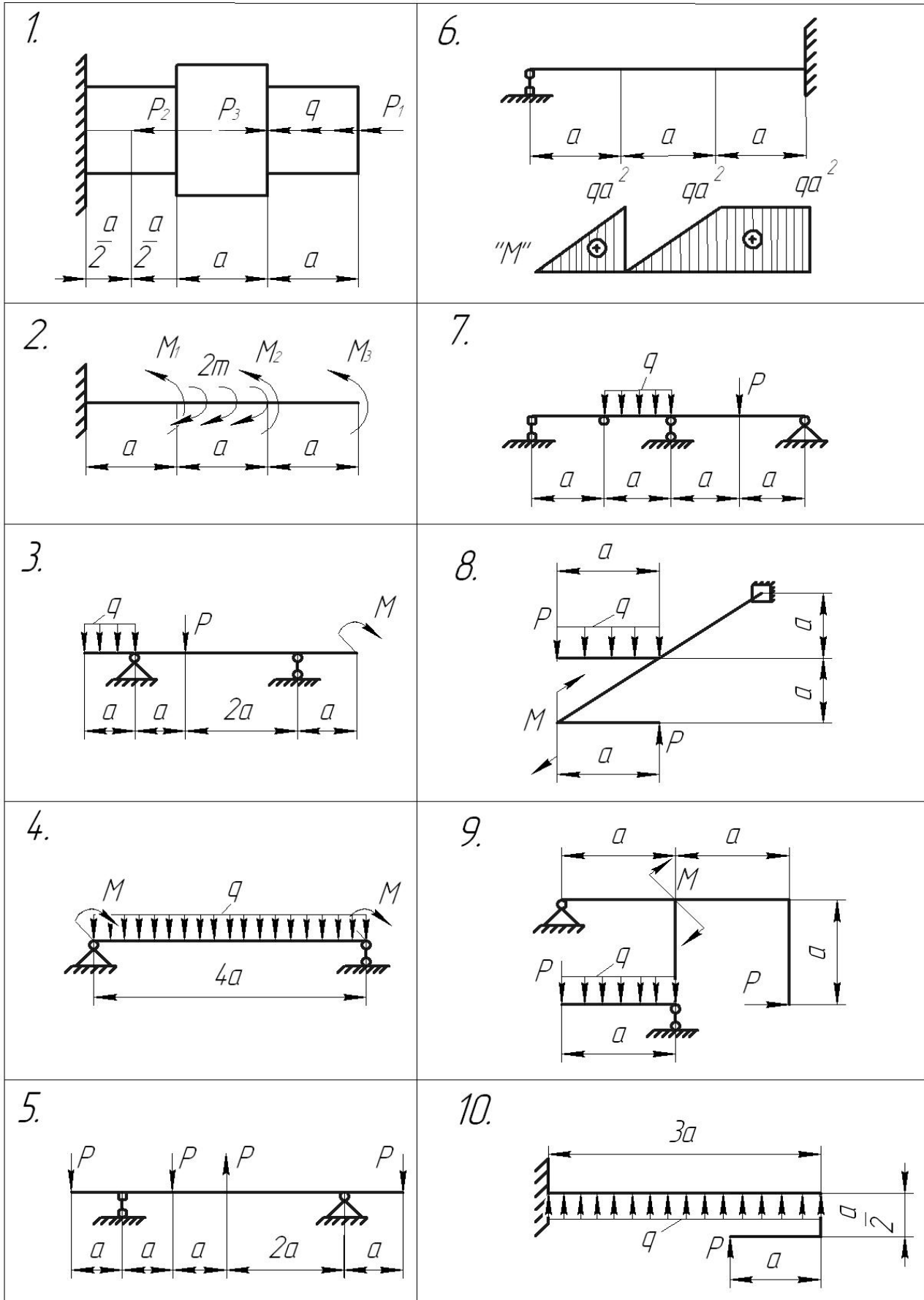
№22

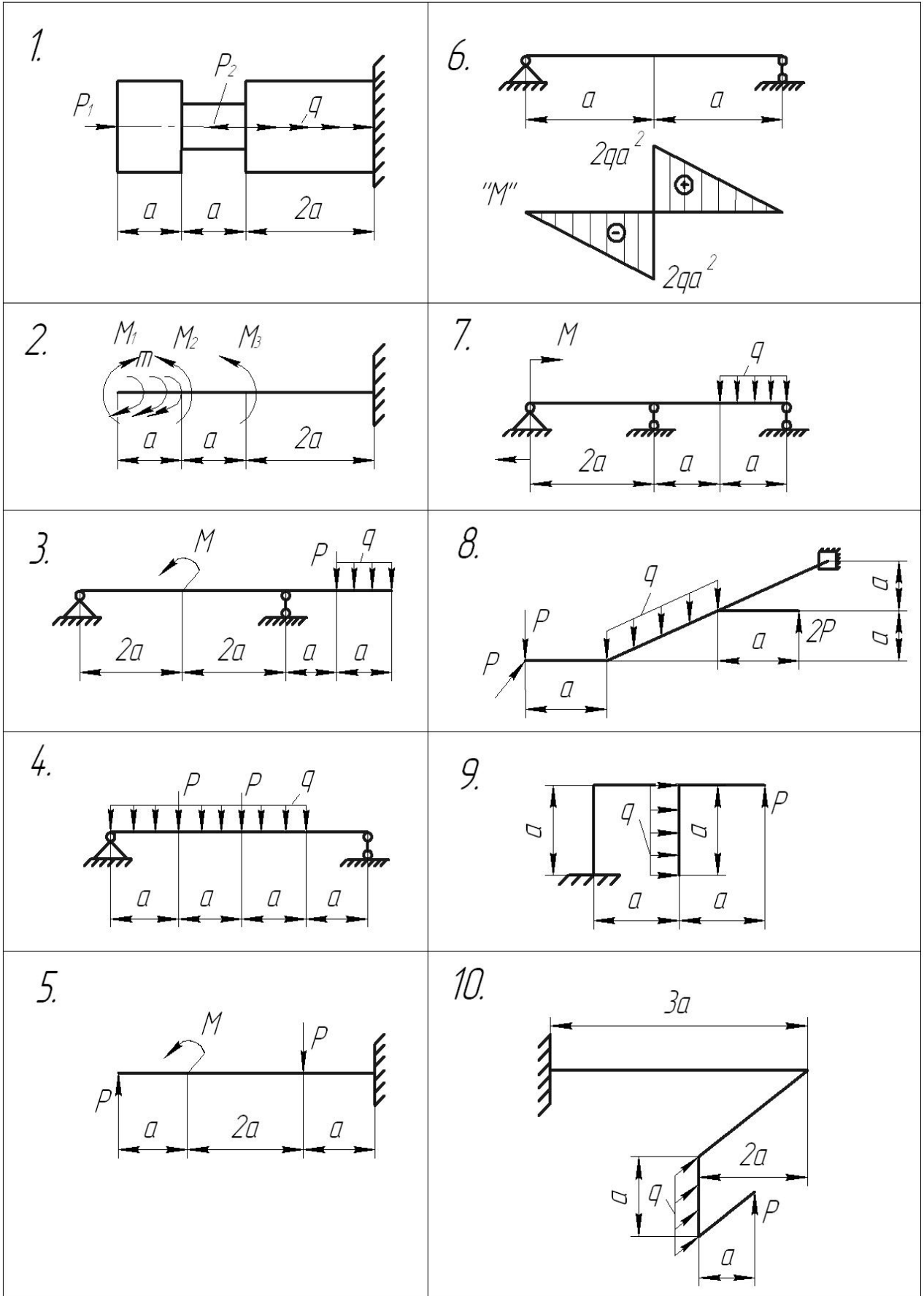


№23



№24





ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов/ Г.С. Писаренко – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО–МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Хникін Леонід Михайлович

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ
«РОЗРАХУНОК ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ І ПОБУДОВА ЇХ ЕПЮР»
З ДИСЦИПЛІНИ «ОПР МАТЕРІАЛІВ» (ДЛЯ
СТУДЕНТІВ НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ 6.070106, 6.060101
СПЕЦІАЛЬНОСТІ «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ», «АВ-
ТОМОБІЛЬНІ ДОРОГИ І АЕРОДРОМИ»)**

Підписано до випуску _____. _____.20__р. Гарнітура Times New.
Умов. друк. арк. 3,81. Зам. № _____.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно–дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E–mail: druknf@rambler.ru

Редакційно–видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів ви-
давничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.