

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ
М.М. Чальцев
23.03.2011

Кафедра «Опір матеріалів»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2
З КУРСУ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 7.090258
ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ)**

10/18-2011-03

Затверджено:
навчально-методична комісія
факультету «Автомобільний
транспорт»
Протокол № 6
від «3» 03. 2011 р.

Затверджено:
кафедра
«Опір матеріалів»
Протокол № 7
від «15» 03. 2011 р

УДК 539.3(07)

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи № 2 з курсу «Опір матеріалів» (для студентів спеціальності 7.090258 заочної форми навчання) / укладачі: М.М. Чальцев, Т.І. Алтухова, М.В. Неклюдов. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97-2000. – назва з титул. екрану.

Містить варіанти завдань і методичні рекомендації щодо виконання контрольної роботи, числові приклади. У методичних вказівках розглянуто прийоми і техніка виконання розрахунків. Призначено для студентів автотранспортних спеціальностей.

Укладачі:

Чальцев М.М., к.т.н, проф.
Алтухова Т.І.
Неклюдов М.В.

Відповідальний за випуск:

Чальцев М.М., к.т.н, проф.

Рецензент:

Хникін Л.П., к.т.н, доц.
«Опір матеріалів»

© Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут, 2011

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Задача 1. Розрахунок статично визначених балок на міцність та жорсткість	5
Задача 2. Складний (неплоский) згин	17
Задача 3. Позацентрове стискання та розтягання	25
Задача 4. Розрахунок на міцність при вигині з крутінням круглого вала..	35
Задача 5. Розрахунок пружних систем на динамічне навантаження.....	42
Перелік посилань	52
Додаток А	53
Додаток Б.....	54

ВСТУП

Сучасні вимоги до створення й удосконалення техніки передбачають уживання заходів по забезпеченню міцності та надійності машин і споруджень протягом усього терміну їхньої експлуатації.

Курс «Опір матеріалів» вивчає методи інженерних розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість основних елементів конструкцій. Одна з істотних особливостей курсу – його практична спрямованість на розв'язання практичних задач техніки. Під час вивчення курсу студентам необхідно розвинути навички самостійної роботи на всіх етапах: складання розрахункової моделі, використання відповідного математичного апарату, аналізу отриманих результатів.

ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

Кожен студент заочної форми навчання виконує контрольну роботу, що включає відповідні задачі.

Студент вибирає вихідні дані відповідно до номера (шифру) своєї залікової книжки і першим шістьом буквам російського алфавіту, що розташовуються під останніми шістьма цифрами шифру.

Наприклад: шифр – 09-123
літери – где

З кожного вертикального стовпця будь-якої таблиці, позначеного угорі визначеною буквою, треба взяти тільки одне число, номер рядка якого збігається з номером букви. Роботи, виконані не за своїм варіантом, не зараховуються.

До виконання контрольних робіт варто приступати відразу після вивчення відповідних розділів курсу і самостійного розв'язання рекомендованих задач.

У заголовку контрольної роботи повинні бути чітко зазначені: назва дисципліни, прізвище, ім'я і по батькові студента повністю, назва факультету і спеціальності, навчальний шифр, дата відправлення роботи, точна поштова адреса. Необхідно вказати рік видання методичних вказівок, за якими виконувалася контрольна робота.

Кожну контрольну роботу варто виконувати в повному обсязі на аркушах, зшитих у зошит стандартного формату, синім чорнилом чи пастою, чітким почерком, поле для зауважень залишати не менш 5 см.

Спочатку варто переписати повністю умову задачі з числовими даними, скласти акуратний ескіз у масштабі й вказати в ньому (у числах) усі величини, необхідні для розрахунку, а потім приступити до розв'язання.

Розв'язання задачі варто супроводжувати короткими, послідовними і грамотними (без скорочення слів) поясненнями і кресленнями, на яких усі величини, що увійшли в розрахунок, повинні бути показані в числах. Треба уникати багатослівних пояснень і переказу матеріалу підручника. Студент повинен засвоїти, що мова техніки – формула і креслення. При використанні формул чи даних, відсутніх у підручнику, необхідно коротко і точно вказати джерело (автор, назва книги, місце видання, рік видання, номер формули).

Необхідно вказувати одиниці усіх величин і підкреслювати кінцеві результати, що повинні відповідати передбаченій точності. Виправлення за зауваженнями викладача варто робити на окремих аркушах, що ушиваються додатково до тієї ж контрольної роботи.

ЗАДАЧА 1. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ БАЛОК НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ

Умова задачі

Сталева балка на двох опорах навантажена у вертикальній площині (рис. 1.3). Підібрати параметри двотаврового перетину балки за умови міцності й жорсткості. Дані взяти з таблиці 1.1 та з рисунка 1.1.

Таблиця 1.1 – Завдання

Номер рядка	Номер схеми	Зовнішні навантаження			а, м	[σ], Мпа	[у], см
		М, кНм	Р, кН	g, кН/м			
1	1	10	55	10	1	260	l/400
2	2	15	50	12	2	180	l/300
3	3	20	45	14	1	200	l/400
4	4	25	40	16	2	220	l/300
5	5	30	35	18	2	240	l/200
6	6	35	30	20	1	220	l/300
7	7	40	25	22	2	260	l/400
8	8	45	20	24	1	180	l/500
9	9	50	15	26	2	160	l/600
0	10	55	10	28	1	140	l/400
літера	е	г	д	е	г	д	е

1. Викреслити розрахункову схему відповідно до вихідних даних шифру.
2. Визначити опорні реакції. Побудувати епюру поперечних сил (Q) і моментів (M).
3. Підібрати двотавровий перетин балки за умови міцності.
4. Використовуючи метод початкових параметрів, визначити прогини в 3-4 перетинах у прольоті й на кінцях консолі.
5. Перевірити отриманий результат прогину балки для перерізу (т.К), використовуючи при цьому метод Мора з інтегруванням його за правилом Верещагіна.
6. Підібрати переріз балки за умови жорсткості.

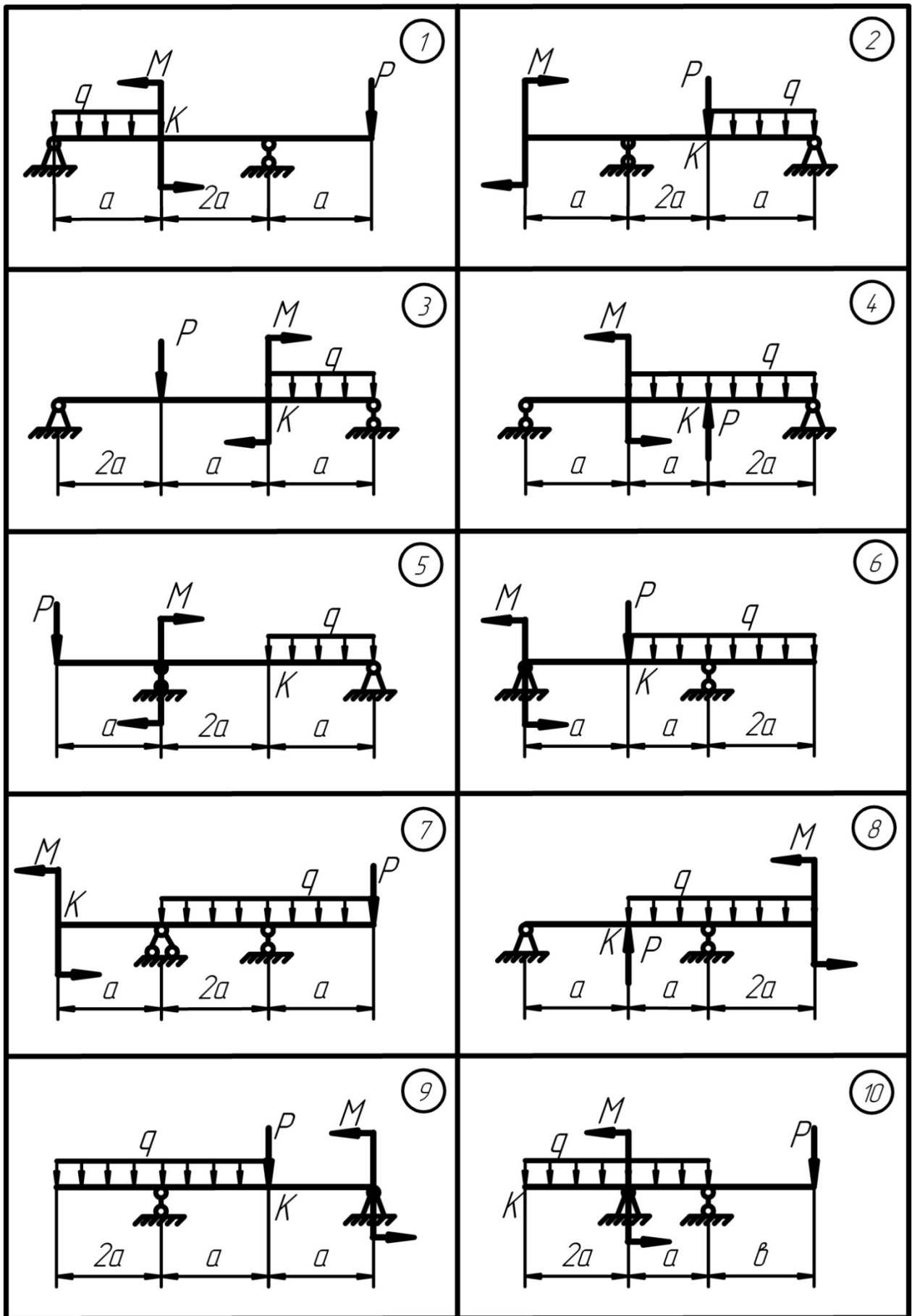


Рисунок 1.1 – Схеми для завдань

Методичні вказівки до виконання задачі № 1

1. Визначити реакції в опорах з обов'язковою перевіркою за допомогою рівнянь статки.

2. Використовуючи метод перерізів, знайти значення поперечних сил (Q) і згинальних моментів (M) на ділянках балки. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

3. За найбільшою величиною згинального моменту знайти небезпечний переріз балки. Записати умову міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_Z^{\max}|}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

де W_Z – момент опору, см^3 .

Визначити W_Z і, порівнявши його з найближчим більшим значенням із сортаментних таблиць, підібрати переріз двотаврового профілю.

4. Визначити прогини балки за допомогою універсального рівняння пружної лінії балки:

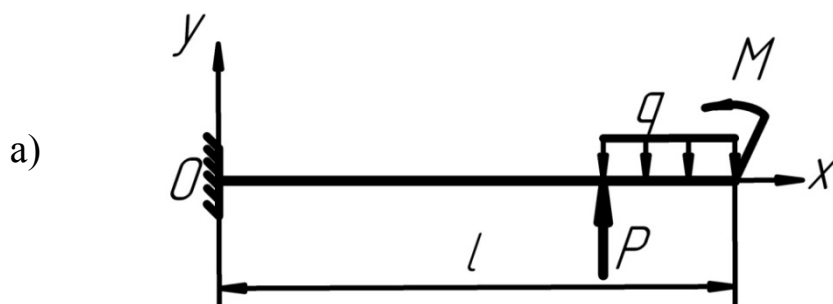
$$y_x EJ_Z = y_0 EJ_Z + \theta_0 x EJ_Z + \frac{\sum M(x - a_M)^2}{2} + \frac{\sum P(x - a_P)^3}{6} + \frac{\sum q(x - a_q)^4}{24}, \quad (1.2)$$

де y_0 і θ_0 – початкові параметри (прогин і кут повороту балки на початку координат), що приймаються тільки на кінці балки (рис. 1.2 а, в);

x – координата перетину, в якій визначається прогин балки;

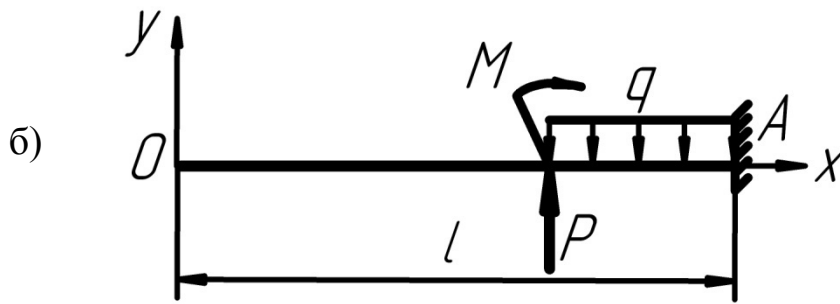
a_M і a_P – відстань від початку координат до початку дії зосереджених M та P ;

a_q – відстань від початку координат до початку дії розподіленого навантаження.

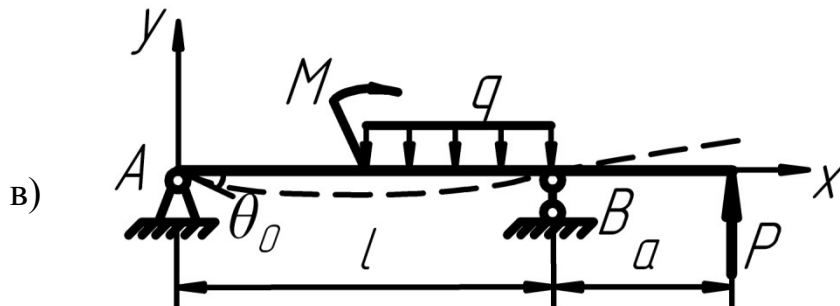


якщо $x = 0$;
 $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

Рисунок 1.2 – Граничні умови для переміщень θ_0 , y_0 при різних способах закріплення балки

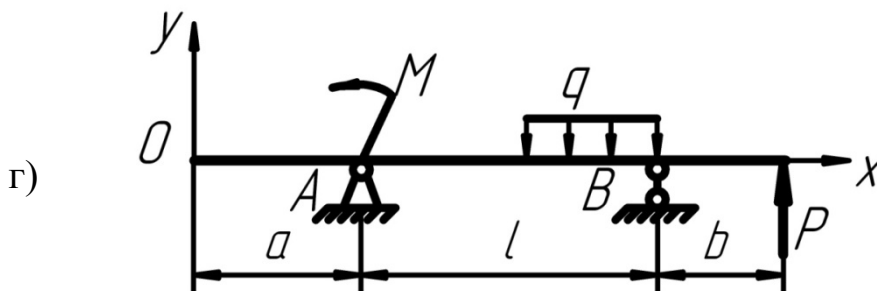


якщо $x = 0$;
 $y_0 \neq 0$; $\theta_0 \neq 0$.



якщо $x = 0$; \rightarrow
 т. А
 $y_0 = y_A = 0$;
 $\theta_A = \theta_0 \neq 0$.

Для визначення θ_0 складають рівняння при $x = L \rightarrow$ т.В. У точці В прогин дорівнює нулю, тобто: $y_B = 0$.



якщо $x = 0 \rightarrow$ т.О
 $y_0 \neq 0$; $\theta_0 \neq 0$.

Рисунок 1.2, сторінка 2

Якщо балка двоконсольна (рис. 1.2 г), або консольна (рис. 1.2 б), то визначення y_0 та θ_0 зводиться до рівняння системи двох алгебраїчних рівнянь, отриманих за умов закріплення балки.

5. Підставити знайдені значення y_0 та θ_0 в універсальне рівняння пружної лінії, задаючи значення $x = 1, 2, 3 \dots$ при відповідній навантаженості балки, знайти прогини в шуканих перерізах.

6. Використовуючи особливості побудови епюри прогинів і диференціальні залежності між навантаженням Q , M і переміщеннями y , побудувати епюру прогинів балки.

7. Перевірити прогини в т. К за методом Мора з інтегруванням за правилом Верещагіна в наступному порядку:

- прикласти силу $\bar{P} = 1$ у т. К в напрямку шуканого переміщення;
- побудувати епюру згинальних моментів \bar{M}_K від сили $\bar{P} = 1$;
- перемножити отриману епюру \bar{M}_K на епюру згинальних моментів

від заданого навантаження M_P (попередньо розбивши епюри на ділянки за точками зламу) за формулою:

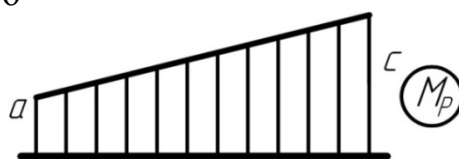
$$y_k = \bar{M}_k \cdot M_P = \frac{1}{EJ_Z} \cdot \sum W_i y_{ci}, \quad (1.3)$$

де W_i – площа епюри вантажного стану i -ї ділянки;

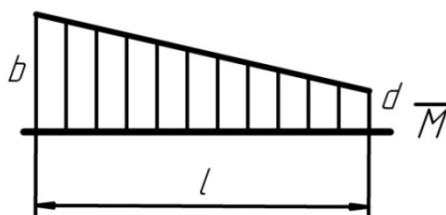
y_{ci} – координата одиничної епюри \bar{M}_k відповідної ділянки, яка взята під центром ваги вантажної епюри M_P .

Або за формулою:

$$\frac{l}{6}(2ab + 2cd + a \cdot d + bc). \quad (1.4)$$

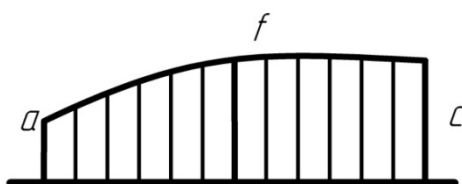


а)



А також за формулою

$$\frac{l}{6}(a \cdot b + 4f \cdot k + cd), \quad (1.5)$$



б)

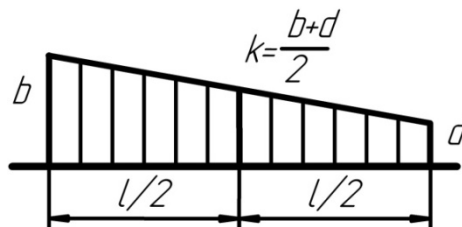


Рисунок 1.3 – Перемноження вантажної M_P та одиничної \bar{M} епюр за правилом Верещагіна

де знак «+», якщо епюри розташовані з однієї сторони від основної лінії (рис. 1.3 а, б).

8. Визначити найбільший прогин балки за епюрою вигинів (графічно). Підбір балки за умови жорсткості варто виконати за припустимим прогином $[y]$:

$$\frac{|y_{\max}|}{EJ_Z} \leq [y], \quad (1.6)$$

де $|y_{\max}|$ – найбільша координата епюри прогинів.

$$J_{ZTP} \geq \frac{|y_{\max}|}{[y]E}, \quad (1.7)$$

Для сталеві балки J_{ZTP} порівняти з найближчим більшим значенням із сортаментних таблиць і підібрати перетин двотавра, що задовольняє умові жорсткості.

Приклад 1

Задана двоопорна балка з консолями і зовнішнім навантаженням: $P=12$ кН; $q=20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $M=30$ кНм; $a=2$ м, (рис. 1.4 а). $[\sigma]=160$ МПа;

$$[y] = \frac{l}{300} (\text{см}); E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Розв'язання

1. У визначеному масштабі накреслюємо балку з чисельною вказівкою всіх сил і розмірів (рис. 1.5 а).

Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; M - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - M + P \cdot 6}{4} = \frac{20 \cdot 8 - 30 + 12 \cdot 6}{4} = \frac{160 - 30 + 72}{4} = 50,5 (\text{кН});$$

$$\sum M_B = 0: -P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 + M = 0;$$

$$R_A = \frac{-P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{4} = \frac{-12 \cdot 2 + 20 \cdot 8 + 30}{4} = \frac{-24 + 160 + 30}{4} = 41,5 (\text{кН}).$$

Перевірка: $\sum P(y) = 0:$

$$R_A - q \cdot 4 + R_B - P = 0;$$

$$41,5 - 20 \cdot 4 + 50,5 - 12 = 0;$$

$92 - 92 = 0$, тобто реакції знайдено вірно.

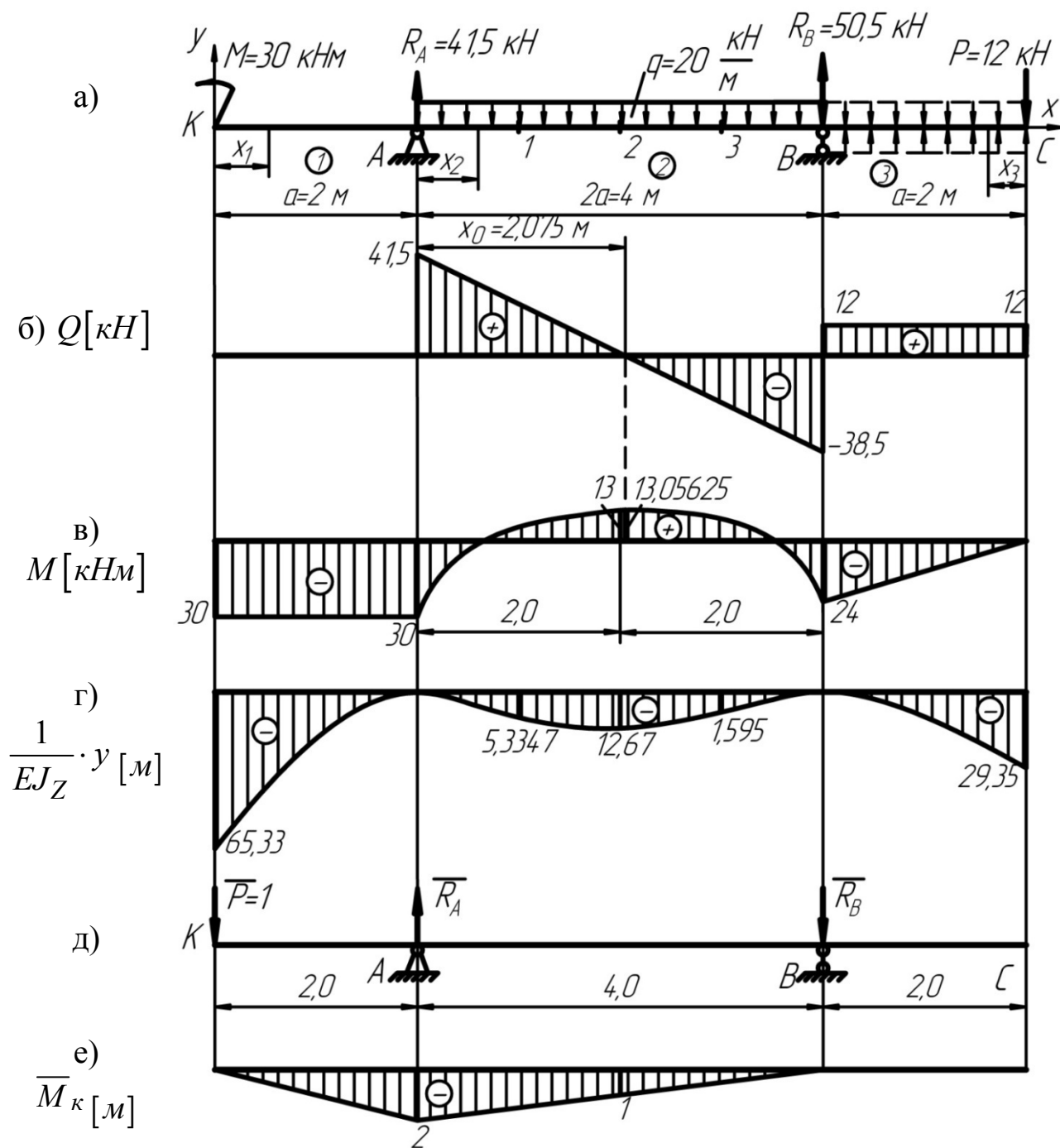


Рисунок 1.4 – До розрахунку внутрішніх зусиль та переміщень:
а – задана схема; б, в – епюри внутрішніх сил; г – епюра прогинів;
д – одиничний стан системи; е – одинична епюра моментів

2. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів. Розбиваємо балку на ділянки 1, 2, 3 і складаємо вираз Q та M для кожної ділянки (рис. 1.4 б, в):

1 ділянка: $0 \leq x_1 \leq 2$.

$$Q_1 = 0; M_1 = -M = -30(\text{кНм}).$$

2 ділянка: $0 \leq x_2 \leq 4$.

$$Q_2 = R_A - qx_2; \quad x_2 = 0; \quad Q_2 = R_A = 41,5 \text{ кН};$$

$$x_2 = 4 \text{ м}; \quad Q_2 = R_A - q \cdot 4 = 41,5 - 20 \cdot 4 = -38,5 \text{ кН};$$

$$M_2 = -M + R_A \cdot x_2 - \frac{qx_2^2}{2};$$

$$x_2 = 0; \quad M_2 = -M = -30 (\text{кНм});$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_2 = -M + R_A \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = -30 + 41,5 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} = \\ = -30 + 83 - 40 = 13 (\text{кНм});$$

$$x_2 = 4 \text{ м}; \quad M_2 = -M + R_A \cdot 4 - \frac{q \cdot 4^2}{2} = -30 + 41,5 \cdot 4 - \frac{20 \cdot 4^2}{2} = \\ = -30 + 166 - 160 = -24 (\text{кНм}).$$

Оскільки поперечна сила змінює знак на другій ділянці, то на епюрі M буде екстремум у перетині, де $Q_2 = 0$:

$$Q_2 = R_A - qx_0 = 0, \text{ тоді}$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{41,5}{20} = 2,075 \text{ м};$$

$$M_2^{\max} = -M + R_A \cdot x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = -30 + 41,5 \cdot 2,075 - \frac{20 \cdot 2,075^2}{2} = \\ = -30 + 86,1125 - 43,05625 = -13,05625 (\text{кНм}).$$

3 ділянка: $0 \leq x_3 \leq 2$ (праворуч).

$$Q_3 = P = 12 (\text{кН});$$

$$M_3 = -Px_3; \quad x_3 = 0; \quad M_3 = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}; \quad M_3 = -12 \cdot 2 = -24 (\text{кНм}).$$

Будуємо епюри Q і M за результатами обчислень (рис. 1.4 б, в).

3. За моментом $|M_{\max}| = 30 \text{ кНм}$, визначаємо двотавровий перетин:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_Z} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

$$W_Z \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,1875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 10^6 = 187,5 \text{ см}^3$$

за сортаментом приймаємо I N20^a с

$$W_Z^1 = 203 \text{ см}^3; J_Z = 2030 \text{ см}^4.$$

$$\sigma_{\max}^1 = \frac{|M_{\max}|}{W_Z^1} = \frac{30 \cdot 10^3}{203 \cdot 10^{-6}} = 0,1478 \cdot 10^9 \text{ Па} = 147,8 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умовні міцності виконуються.

4. Визначаємо прогини у характерних точках балки та будуємо опору прогинів (рис. 1.4 г).

Визначаємо початкові параметри y_0 і θ_0 .

Якщо $x=0$; $\rightarrow m.K$; $y_0 \neq 0$; $\theta_0 \neq 0$.

Якщо $x=2 \text{ м}$; $\rightarrow m.A$; $y_A = 0$.

$$EJ_Z y_A = y_0 EJ_Z + \theta_0 x EJ_Z - \frac{M(x-0)^2}{2} = 0.$$

$$EJ_Z y_A = y_0 EJ_Z + 2\theta_0 EJ_Z - \frac{M(2-0)^2}{2} = 0.$$

$$y_0 EJ_Z = \frac{M \cdot 2^2}{2} = \frac{30 \cdot 2^2}{2} = 60.$$

$$y_0 EJ_Z + 2\theta_0 \cdot EJ_Z = 60; \quad (1)$$

Якщо $x=6 \text{ м}$; $\rightarrow m.B$; $y_B = 0$.

$$y_B EJ_Z = y_0 EJ_Z + x\theta_0 EJ_Z - \frac{M(x-0)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} - \frac{q(x-2)^4}{24} = 0$$

$$y_B EJ_Z = y_0 EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z - \frac{M(6-0)^2}{2} + \frac{R_A(6-2)^3}{6} - \frac{q(6-2)^4}{24} = 0.$$

$$y_B EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z = \frac{M \cdot 6^2}{2} - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + \frac{q \cdot 4^4}{24} = \frac{30 \cdot 36}{2} - \frac{41,5 \cdot 64}{6} +$$

$$+ \frac{20 \cdot 256}{24} = 540 - 442,67 + 213,33 = 310,66.$$

$$y_0 EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z = 310,66 \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_0 EJ_Z + 2\theta_0 EJ_Z = 60; \\ y_0 EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z = 310,66. \end{cases} \rightarrow y_0 EJ_Z = 60 - 2\theta_0 EJ_Z.$$

$$60 - 2\theta_0 EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z = 310,66;$$

$$4\theta_0 EJ_Z = 310,66 - 60 = 250,66.$$

$$\theta_0 = \frac{250,66}{4EJ_Z} = \frac{62,665}{EJ_Z} \text{ (pag)}.$$

$$y_0 EJ_Z = 60 - 2 \cdot \frac{62,665}{EJ_Z} \cdot EJ_Z = 60 - 125,33 = -65,33.$$

$$y_0 = \frac{-65,33}{EJ_Z} \text{ (м)}.$$

Початкові параметри: $\begin{cases} y_0 = \frac{-65,33}{EJ_Z} \text{ (м)} \\ \theta_0 = \frac{62,665}{EJ_Z} \text{ (pag)}. \end{cases}$

$$x = 0 \rightarrow m.K \quad y_0 = \frac{-65,33}{EJ_Z} \text{ (м)};$$

$$x = 2 \text{ м} \rightarrow m.A \quad y_A EJ_Z = y_0 EJ_Z + \theta_0 \cdot 2EJ_Z - \frac{M \cdot (2-0)^2}{2} =$$

$$= -65,33 + 2 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 2^2}{2} = -65,33 + 125,33 - 60 = 0.$$

$$x = 3 \text{ м}; \rightarrow m.1$$

$$y_1 EJ_Z = y_0 EJ_Z + \theta_0 \cdot 3EJ_Z - \frac{M \cdot (3-0)^2}{2} + \frac{R_A(3-2)^3}{6} - \frac{q(3-2)^4}{24} =$$

$$= -65,33 + 3 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 9}{2} + \frac{41,5 \cdot 1^3}{6} + \frac{20 \cdot 1^4}{24} = -65,33 + 187,995 - 135 +$$

$$+ 6,917 + 0,0833 = -200,33 + 194,9953 = -5,3347.$$

$$y_1 = \frac{-5,3347}{EJ_Z} \text{ (м)}$$

$$x = 4 \text{ м} \rightarrow m.2$$

$$\begin{aligned}
 y_2 EJ_Z &= y_0 EJ_Z + 4\theta_0 EJ_Z - \frac{M \cdot (4-0)^2}{2} + \frac{R_A(4-2)^3}{6} - \frac{q(4-2)^4}{24} = \\
 &= -65,33 + 4 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 16}{2} + \frac{41,5(2)^3}{6} - \frac{20 \cdot 2^4}{24} = -65,33 + 250,66 - \\
 &- 240 + 55,33 - 13,33 = -318,66 + 305,99 = -12,67.
 \end{aligned}$$

$$y_2 = \frac{-12,67}{EJ_Z} (M)$$

$$x = 5 \text{ м} \rightarrow m.3$$

$$\begin{aligned}
 y_3 EJ_Z &= y_0 EJ_Z + 5\theta_0 EJ_Z - \frac{M \cdot (5-0)^2}{2} + \frac{R_A(5-2)^3}{6} - \frac{q(5-2)^4}{24} = \\
 &= -65,33 + 5 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 25}{2} + \frac{41,5 \cdot 3^3}{6} - \frac{20 \cdot 3^4}{24} = -65,33 + 313,325 - \\
 &- 375 + 62,25 - 67,5 = -377,17 + 375,575 = -1,595.
 \end{aligned}$$

$$y_3 = \frac{-1,595}{EJ_Z} (M).$$

$$x = 6 \text{ м} \rightarrow m.B$$

$$\begin{aligned}
 y_B EJ_Z &= y_0 EJ_Z + 6\theta_0 EJ_Z - \frac{M \cdot (6-0)^2}{2} + \frac{R_A(6-2)^3}{6} - \frac{q(6-2)^4}{24} = \\
 &= -65,33 + 6 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 36}{2} + \frac{41,5 \cdot 4^3}{6} - \frac{20 \cdot 4^4}{24} = -65,33 + 375,99 - 540 + \\
 &+ 442,67 - 213,33 = -818,66 + 818,66 = 0.
 \end{aligned}$$

$$y_B = 0.$$

$$x = 8 \text{ м} \rightarrow m.C$$

$$\begin{aligned}
 y_C EJ_Z &= y_0 EJ_Z + \theta_0 \cdot EJ_Z - \frac{M \cdot (8-0)^2}{2} + \frac{R_A(8-2)^3}{6} - \frac{q(8-2)^4}{24} + \\
 &+ \frac{q(8-6)^4}{24} + \frac{R_B(8-6)^3}{6} = -65,33 + 8 \cdot 62,665 - \frac{30 \cdot 64}{2} + \frac{41,5 \cdot 6^3}{6} - \\
 &- \frac{20 \cdot 6^4}{24} + \frac{20 \cdot 2^4}{24} + \frac{50,5 \cdot 2^3}{6} = -65,33 + 501,32 - 960 + 1494 - 1080 + \\
 &+ 13,33 + 67,33 = -2105,33 + 2075,98 = -29,35.
 \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{-29,35}{EJ_Z} (\text{м}).$$

5. Перевіряємо прогин у т. К за правилом Верещагіна.

Прикладаємо силу $P = 1$ у т. К (рис 1.4 д) і будуємо одиничну епюру M_K (рис. 1.4 е).

$$\begin{aligned} y_K &= \frac{1}{EJ_Z} \left[\frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 30 + 2 \cdot 30) + \frac{4}{6} (30 \cdot 2 - 4 \cdot 13 \cdot 1) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} [60 + 5,33] = \frac{65,33}{EJ_Z} (\text{м}) \end{aligned}$$

Тобто $y_K = \frac{65,33}{EJ_Z} (\text{м}).$

Результати збігаються.

6. Найбільший прогин балки є $|y_{\max}| = \frac{65,33}{EJ_Z}.$

Припустимий прогин

$$[y] = \frac{l}{300} = \frac{400}{300} = \frac{4}{3} = 1,33,$$

де $l = 4$ м або $l = 400$ см.

$$|y_{\max}| = \frac{65,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0161 \text{ м} \cdot 10^2 = 1,61 \text{ см}.$$

$$|y_{\max}| = 1,61 \text{ см} \geq [y] = 1,33 \text{ см}.$$

Умови жорсткості не виконуються. Підбираємо двотаврову балку за умови жорсткості:

$$\begin{aligned} J_{ZTP} &\geq \frac{|y_{\max}|}{[y] \cdot E} = \frac{65,33 \cdot 10^3}{1,61 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 20,28882 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 = \\ &= 20,28882 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 \cdot 10^8 = 2028,882 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

за сортаментом приймаємо I № 22 с $J_Z^I = 2550 \text{ см}^4.$

ЗАДАЧА 2. СКЛАДНИЙ (НЕПЛОСКИЙ) ЗГИН

Загальні теоретичні відомості

Складний, або непловкий згин виникає, коли сили, що діють на брус, проходять через центральну поздовжню вісь, але лежать в різних площинах. Зігнута вісь балки в цьому випадку є просторовою лінією.

Частковим випадком такого виду складного опору є *косий згин*, при якому всі зовнішні зусилля лежать в одній площині, що проходить через центральну поздовжню вісь, але не співпадає з жодною з головних площин інерції перерізу. Зігнута вісь балки в цьому випадку є плоскою лінією. Однак площина, що містить зігнуту вісь, не співпадає з площиною дії сил, а відхилена від неї на деякий кут, звідки й походить назва *косий згин*.

Під час розв'язання задач на косий згин або непловкий згин всі силові фактори розкладають на вертикальні й горизонтальні компоненти, тобто непловкий згин розглядають як суму двох плоских згинів – у вертикальній та горизонтальній площинах.

Напруження у найвіддаленіших точках перерізу визначають складанням відповідних напружень, отриманих при плоскому згині у вертикальній та горизонтальній площинах.

Приклад розрахунку

Для заданої схеми балки (рис. 2.1 а) необхідно:

1. Побудувати епюри поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_z у вертикальній площині.
2. Побудувати епюри поперечних сил Q_z та згинальних моментів M_y у горизонтальній площині.
3. Визначити небезпечний переріз, попередньо раціонально розташували прямокутний переріз балки з співвідношенням сторін $\frac{1}{2}$ відносно площин x_y та x_z .
4. За умови міцності підібрати розміри поперечного перерізу.
5. Побудувати просторову епюру нормальних напружень σ в небезпечному перерізі.
6. Визначити положення нульової лінії аналітично та порівняти результат з графічним (на епюрі σ).

Дано:

$$P = 20 \text{ кН}, q = 5 \text{ кН / м}, m = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}, a = 1 \text{ м}, [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Розв'язання

1. Побудова епюр внутрішніх зусиль у вертикальній площині.
Накреслюємо схему балки у площині x_y та завантажуюмо її лише вер-

тикальним навантаженням (рис. 2.1 б). Визначаємо опорні реакції та перевіряємо правильність їх визначення.

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; m - F \cdot 1 + R_{By} \cdot 4 = 0; R_{By} = \frac{F - m}{4} = \frac{20 - 5}{4} = 3,75 \text{ (кН)}.$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0; m + F \cdot 3 - R_{Ay} \cdot 4 = 0; R_{Ay} = \frac{3F + m}{4} = \frac{3 \cdot 20 + 5}{4} = 16,25 \text{ (кН)}.$$

$$\sum F_{kr} = 0; R_{Ay} + R_{By} - F = 0; 16,25 + 3,75 - 20 = 0.$$

Для побудови епюр Q_y та M_z розділяємо балку на ділянки.

Ділянка I. $0 \leq x_1 < 1 \text{ м}$.

$$Q_y = R_{Ay} = 16,25 \text{ кН}.$$

$$M_z = R_{Ay} \cdot x_1; M_{zx_1=0} = 0; M_{zx_1=1 \text{ м}} = 16,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II. $0 \leq x_2 < 2 \text{ м}$.

$$Q_y = R_{By} = 3,75 \text{ кН}.$$

$$M_z = R_{By} \cdot x_2; M_{zx_2=0} = 0; M_{zx_2=2 \text{ м}} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III. $2 \text{ м} \leq x_2 < 3 \text{ м}$.

$$Q_y = R_{By} = 3,75 \text{ кН}.$$

$$M_z = R_{By} \cdot x_3 + m; M_{zx_3=2 \text{ м}} = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{zx_3=3 \text{ м}} = 16,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюри Q_y та M_z представлені на рис. 2.1 в, г.

2. Побудова епюр внутрішніх зусиль у горизонтальній площині.

Накреслюємо схему балки у площині xz та завантажуюмо її лише горизонтальним навантаженням (рис. 2.1 д).

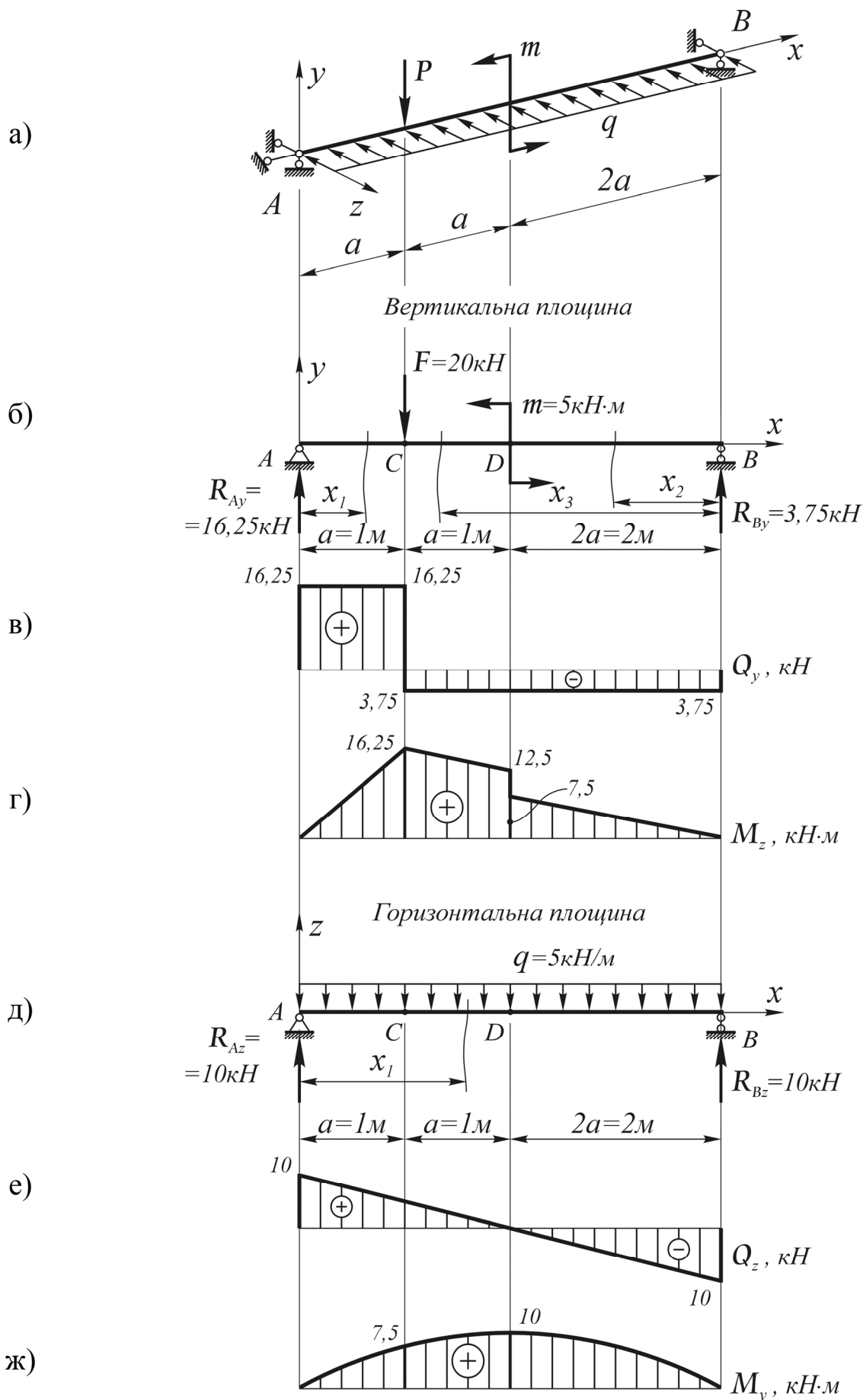


Рисунок 2.1 – Побудова епюр Q та M у вертикальних і горизонтальних площинах

Опорні реакції визначаємо за умов симетрії:

$$R_{Az} = R_{Bz} = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ кН.}$$

При побудові епюр Q_z та M_y маємо одну ділянку: $0 \leq x < 4 \text{ м}$.

$$Q_z = R_{Az} - q \cdot x; Q_{zx=0} = 10 \text{ кН}; Q_{zx=4 \text{ м}} = 10 \text{ кН}; Q_{zx=2 \text{ м}} = 0.$$

$$M_y = R_{Az} \cdot x - q \frac{x^2}{2}; M_{yx=0} = 0; M_{yx=2 \text{ м}} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{yx=4 \text{ м}} = 0.$$

Епюри Q_y та M_z представлені на рис. 2.1 е, ж

3. Визначення небезпечного перерізу.

Оскільки у вертикальній площині згинальні моменти більші, ніж у горизонтальній (це видно з епюр), переріз слід розташувати більшою стороною вертикально.

Небезпечним перерізом балки буде переріз у точці C , де $M_z = 16,25$ кН·м та $M_y = 7,5$ кН·м, або переріз у точці D , де $M_z = 12,5$ кН·м та $M_y = 10$ кН·м. Знайдемо екстремальні напруження в обох точках, скориставшись формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Оскільки осьові моменти опору W_z та W_y невідомі, зробимо наступне перетворення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{W_z}{M_z} \cdot \frac{M_y}{W_y} \right) = \frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{W_z}{W_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \right).$$

Знайдемо відношення $\frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2/6}{hb^2/6} = \frac{h}{b}$, тоді $\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{h}{b} \cdot \frac{M_y}{M_z} \right)$.

$$\text{Отже } \sigma_{\max}^C = \frac{16,25}{W_z} \left(1 + 2 \cdot \frac{7,5}{16,25} \right) = \frac{31,25}{W_z};$$

$$\sigma_{\max}^D = \frac{12,5}{W_z} \left(1 + 2 \cdot \frac{10}{12,5} \right) = \frac{32,5}{W_z}.$$

Таким чином, небезпечним є переріз у точці D .

4. Підбір розмірів поперечного перерізу.

За умови міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ знаходимо потрібний момент опору перерізу:

$$\sigma_{\max}^D = \frac{32,5}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z^{\text{потр}} \geq \frac{32,5}{[\sigma]};$$

$$W_z^{\text{потр}} = \frac{32,5 \cdot 10^{-3}}{10} = 32,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 3250 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 3250 \text{ см}^3.$$

Оскільки $W_z = \frac{bh^2}{6}$, а $\frac{h}{b} = 2$, тобто $h = 2b$, то $W_z = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$ і

$$\frac{2}{3}b^3 \geq W_z^{\text{потр}}, \text{ звідки знаходимо необхідну ширину перерізу: } b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z^{\text{потр}}}.$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 3250} = 16,96 \text{ (см)}. \text{ Приймаємо } b = 17 \text{ см}, h = 2b = 34 \text{ см}.$$

5. Побудова епюри нормальних напружень σ в небезпечному перерізі.

Використовуємо формулу для визначення нормальних напружень у найбільш віддалених точках перерізу:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

При цьому знак «+» або «-» береться в залежності від того, в якій зоні (розтягнутій чи стиснутій) знаходиться точка перерізу.

Для визначення приналежності точки перерізу до тієї чи іншої зони зручно користуватись допоміжною схемою, наведеною на рис. 2.2. Схема побудована виходячи з того, що згинальний момент в будь-якому перерізі додатній у випадку, коли він викликає стискання верхніх волокон балки, а епюра згинальних моментів побудована на стиснених волокнах.

Вертикальна площина

Горизонтальна площина

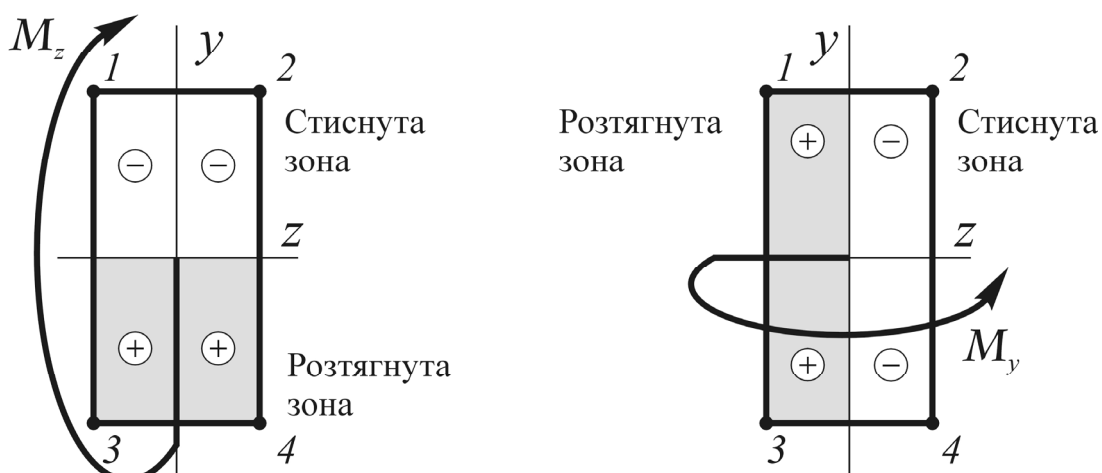


Рисунок 2.2 – Схема до визначення знаків напружень в кутових точках перерізу

Отже, при визначенні екстремальних напружень σ_{\max} за наведеною вище формулою, знак «+» перед додатком M_z / W_z беремо у точках 3 та 4; знак «+» перед додатком M_y / W_y беремо у точках 1 та 3.

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{17 \cdot 34^2}{6} = 3275,33 \text{ (см}^3\text{)}; W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{34 \cdot 17^2}{6} = 1637,67 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{12,5 \cdot 10^{-3}}{3275,33 \cdot 10^{-6}} \pm \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1637,67 \cdot 10^{-6}} = \pm 3,82 \pm 6,11 \text{ (МПа)}.$$

Обчислюємо напруження у кутових точках перерізу 1 – 4.

$$\sigma_1 = -3,82 + 6,11 = 2,29 \text{ (МПа)}.$$

$$\sigma_2 = -3,82 - 6,11 = -9,93 \text{ (МПа)}.$$

$$\sigma_3 = 3,82 + 6,11 = 9,93 \text{ (МПа)}.$$

$$\sigma_4 = 3,82 - 6,11 = -2,29 \text{ (МПа)}.$$

Епюра σ представлена на рис. 2.3.

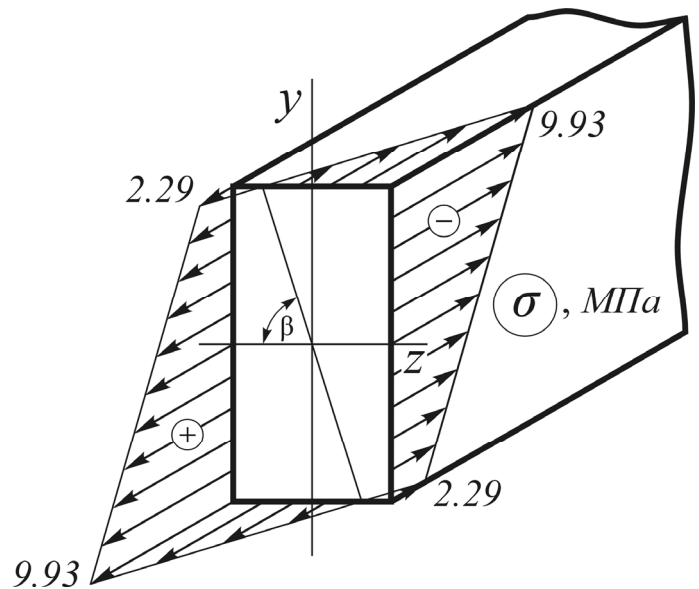


Рисунок 2.3 – Просторова епюра нормальних напружень σ в перерізі D

6. Аналітичне визначення положення нульової лінії

З рис. 2.3 видно, що, як і при плоскому згині, переріз поділений на розтягнуту та стиснуту зони так званою нульовою лінією – точки перерізу, що лежать на ній, не зазнають ані розтягання, ані стискання. Положення нульової лінії (кут β , див. рис. 2.3) можна визначити аналітично за формулою:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}.$$

Додатній кут β відкладають проти ходу годинникової стрілки. Знаходимо моменти інерції перерізу.

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{17 \cdot 34^3}{12} = 55680,67 \text{ (см}^3\text{)}; J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{34 \cdot 17^3}{12} = 13920,17 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\text{Тепер } \operatorname{tg}\beta = -\frac{55680,67}{13920,17} \cdot \frac{10}{12,5} = -3,2, \beta = \operatorname{arctg}(-3,2) = -80,72^\circ.$$

Тобто кут β слід відкладати за ходом годинникової стрілки (порівняти з рис. 2.3).

Дані для розрахунку взяти з таблиці 2.1 та рисунку 2.4

Таблиця 2.1 – Завдання

Номер рядка	Номер схеми	Зовнішнє навантаження			Відношення $\frac{h}{b}$	[σ], МПа	а, м
		М, кНм	Р, кН	q, кН/м			
1	1	30,0	40,0	10,0	1,2	160	1,2
2	2	40,0	35,0	12,0	1,6	180	1,3
3	3	10,0	60,0	14,0	1,8	200	1,4
4	4	25,0	65,0	16,0	2,0	220	1,6
5	5	15,0	20,0	18,0	2,2	240	1,8
6	6	35,0	25,0	20,0	2,4	260	2,0
7	7	45,0	50,0	22,0	2,6	280	2,1
8	8	80,0	55,0	24,0	2,8	160	2,2
9	9	55,0	45,0	26,0	3,0	180	2,3
10	10	60,0	15,0	28,0	3,2	200	2,5
Літера	е	г	д	е	г	д	е

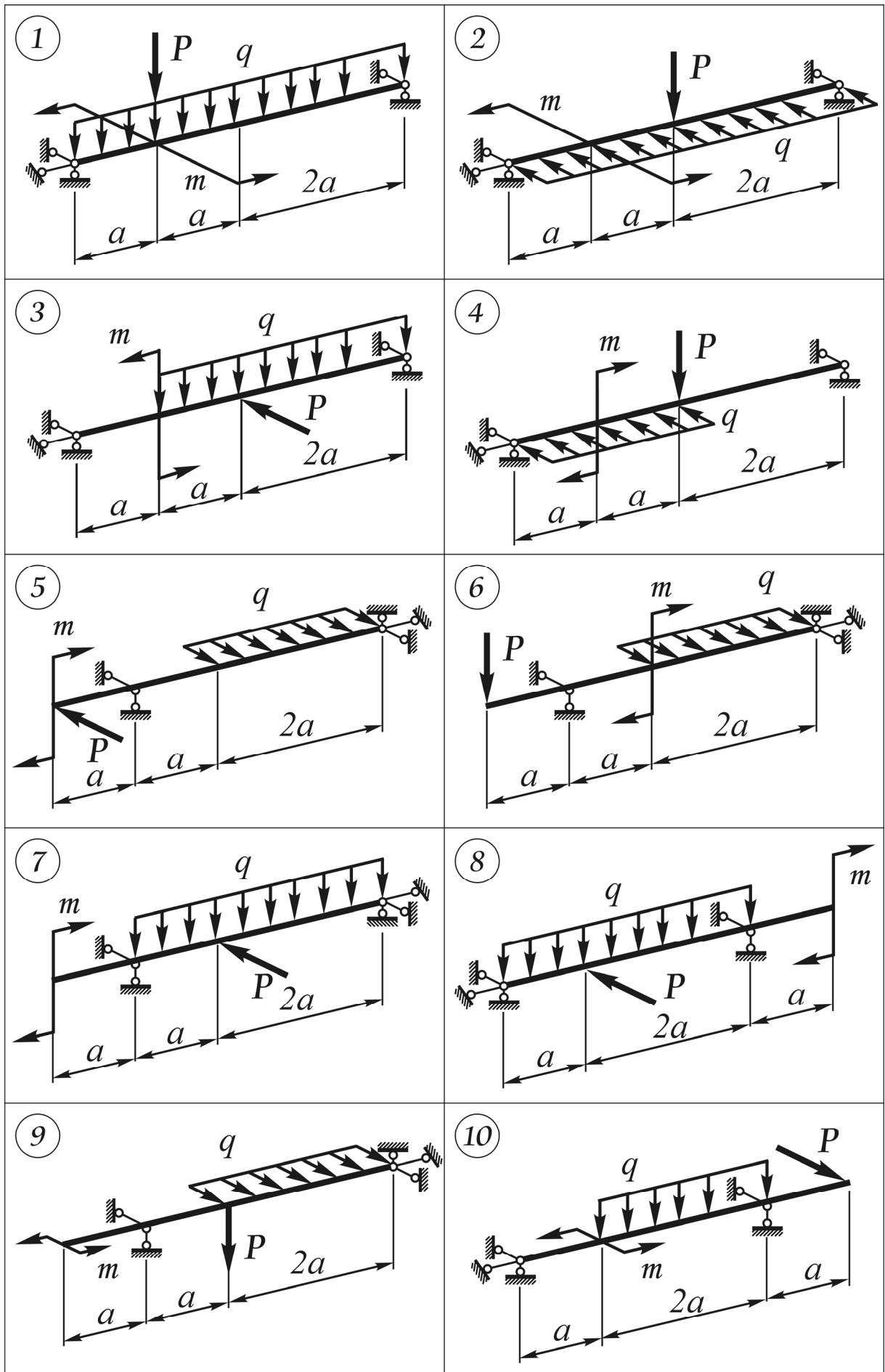


Рисунок 2.4 – Розрахункові схеми

ЗАДАЧА 3. ПОЗАЦЕНТРОВЕ СТИСКАННЯ ТА РОЗТЯГАННЯ

Теоретичні положення

Позацентрове стискання або розтягання – це окремий випадок складного згинання з розтяганням (стисканням), при якому лінія дії не збігається з віссю стержня.

Загальним будемо вважати випадок позацентрального стискання, коли точка прикладання сили не лежить на жодній з головних осей інерції поперечного перерізу.

У поперечних перерізах довільної форми максимальні напруження виникають у точках, найбільш віддалених від нейтральної осі.

Для поперечних перерізів умову міцності краще використовувати у такому вигляді:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{A} \left(1 + \frac{Z_P \cdot Z}{i_{y_c}^2} + \frac{y_P \cdot y}{i_{z_c}^2} \right) \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

де P – стискальна сила;

Z_P ; y_P – координати стискальної сили;

Z ; y – координати точки, в якій визначають напруження;

$i_{y_c}^2$; $i_{z_c}^2$ – квадрати радіусів інерції поперечного перерізу.

Квадрати радіусів інерції поперечного перерізу визначають за формулами:

$$i_{z_c}^2 = \frac{I_{z_c}}{A}; \quad i_{y_c}^2 = \frac{I_{y_c}}{A}, \quad (3.2)$$

де I_{z_c} ; I_{y_c} – моменти інерції відносно осей z_c і y_c ;

A – площа перерізу.

Нейтральною віссю називають геометричне місце точок, в яких нормальні напруження дорівнюють нулю. Виходячи з цього визначення, рівняння нейтральної осі отримуємо з формули (3.1):

$$1 + \frac{Z_P \cdot Z_0}{i_{y_c}^2} + \frac{y_P \cdot y_0}{i_{z_c}^2} = 0, \quad (3.3)$$

де y_0 і Z_0 – координати точок нейтральної осі.

Або положення нейтральної осі можна визначити у відрізках, які відсікаються на осях z_c і y_c за формулами:

$$a_z = -\frac{i_{y_c}^2}{Z_P}; a_y = -\frac{i_{z_c}^2}{y_P}. \quad (3.4)$$

Ядром перерізу називається зона навколо центра ваги поперечного перерізу, яка має таку властивість: якщо поздовжня сила прикладена в зоні ядра, то нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу будуть одного знака.

Координати точок на контурі ядра перерізу визначимо за формулами:

$$Z_{я} = -\frac{i_{y_c}^2}{a_z}; y_{я} = -\frac{i_{z_c}^2}{a_y}, \quad (3.5)$$

де a_z і a_y – відрізки, які відсікаються нейтральною віссю на осях координат так, що вона є лише дотичною до поперечного перерізу.

Задача 3. Позацентрове стискання (розтягання) бруса

На міцно закріпленій нижнім кінцем короткій стояк діє сила P . Визначити найбільше допустиме навантаження, якщо допустиме напруження на стискання $[\sigma]_c$, а на розтягання $[\sigma]_p$. Побудувати ядро перерізу для поперечного перерізу стояка.

Порядок розрахунку

1. Накреслити заданий переріз у масштабі.
2. Знайти положення координат центра ваги перерізу ($z_c; y_c$). Визначити площу перерізу A і моменти інерції $I_{z_c}; I_{y_c}$ (рис. 3.1).
3. Обчислити відстань $z_A; y_A$ від точки A прикладення сили P до головних осей $z_c; y_c$.
4. Визначити положення нейтральної осі у відрізка за формулами (3.4) і побудувати її.
5. За умов міцності за стискальним напруженням для точки A з координатами $z_A; y_A$ визначити допустиме навантаження.
6. За умов міцності за розтягальними напруженнями для точки B з координатами $z_B; y_B$ визначити допустиме навантаження.
7. Побудувати ядро перерізів за формулами (3.5).

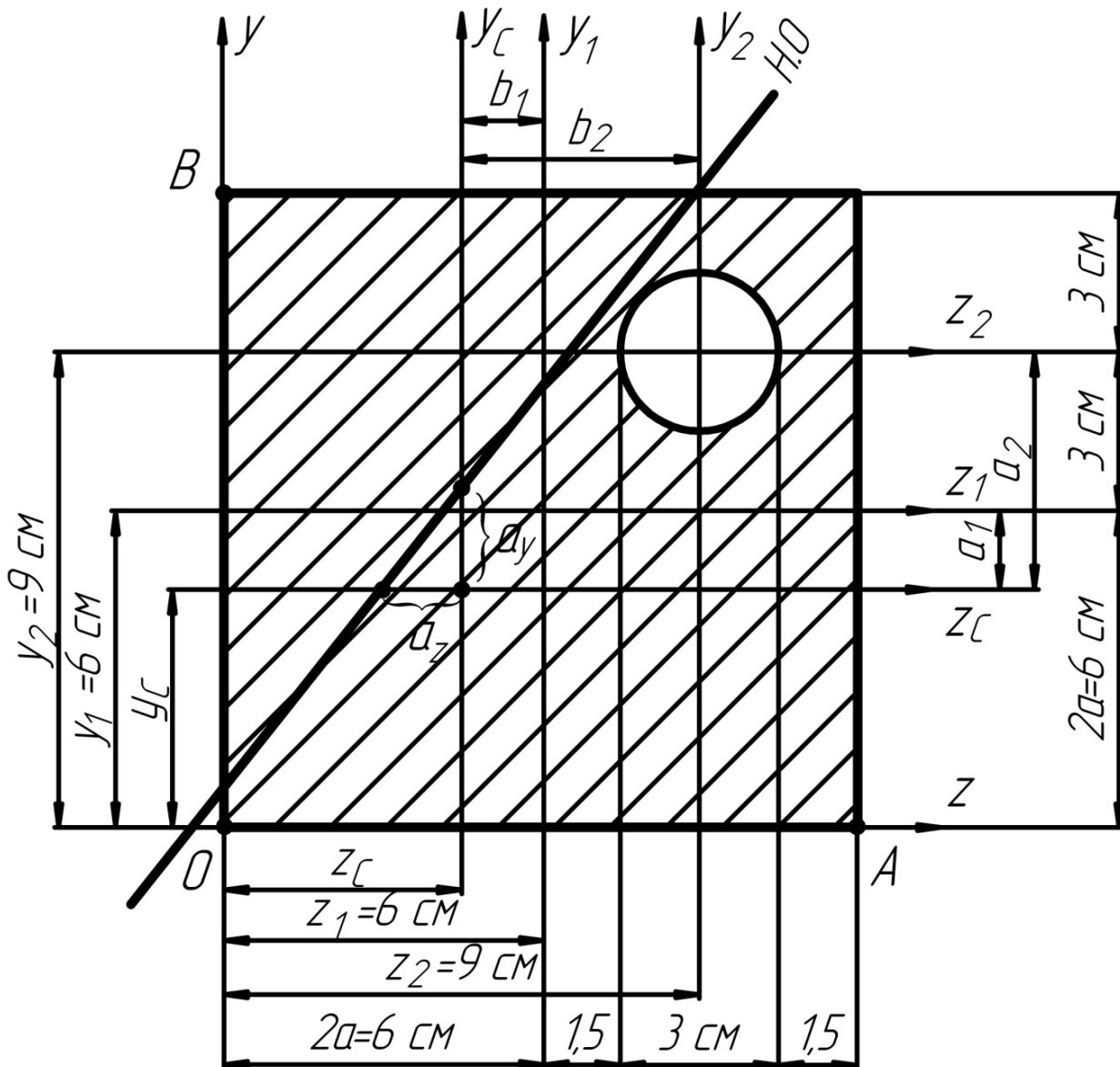


Рисунок 3.1 – Визначення координат центра ваги

Розрахунок

Дано: $a = 3$ см; $[\sigma]_c = 100$ МПа; $[\sigma]_p = 40$ МПа.

Спочатку знайдемо положення центра ваги перерізу. Переріз поділимо на два елементи. Проведемо допоміжні осі oz і oy . Координати центра ваги обчислюємо за формулами:

$$Z_c = \frac{\Sigma(A_i Z_i)}{\Sigma A_i}; Y_c = \frac{\Sigma(A_i Y_i)}{\Sigma A_i}.$$

Для елемента 1. (рис 3.2)

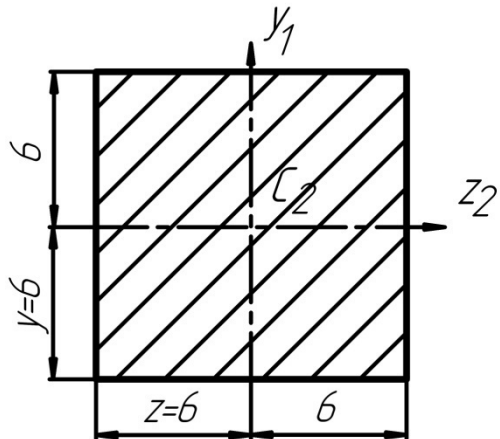


Рисунок 3.2 – Елемент перерізу

Координати центра ваги першого елемента відносно допоміжних осей:

$$Z_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см};$$

$$Y_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см}.$$

Для елемента 2. (рис. 3.3)

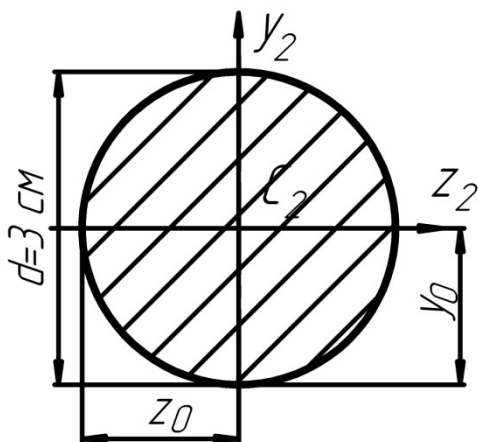


Рисунок 3.3 – Елемент 2 перерізу

Координати центра ваги другого елемента відносно допоміжних осей:

$$Z_2 = 6 + 3 = 9 \text{ см};$$

$$Y_2 = 6 + 3 = 9 \text{ см}.$$

Величини Z_0 ; Y_0 ; I_Z ; I_Y і A треба взяти з таблиці 3.2.

$$Z_c = \frac{A_1 \cdot Z_1 - A_2 \cdot Z_2}{A_1 - A_2} = \frac{144 \cdot 6 - 7,065 \cdot 9}{144 - 7,065} = \frac{864 - 63,585}{136,935} = 5,85 \text{ см},$$

де $A = A_1 - A_2 = 144 - 7,065 = 136,935 \text{ см}^2$ – площа всього перерізу.

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{144 \cdot 6 - 7,065 \cdot 9}{144 - 7,065} = \frac{864 - 65,585}{136,935} = 5,85 \text{ см.}$$

Далі знайдемо моменти інерції I_{Z_c} ; I_{Y_c} :

$$\begin{aligned} I_{Z_c} &= [I_{Z_1} + A_1 a_1^2] - [I_{Z_2} + A_2 a_2^2] = \\ &= [1728 + 144 \cdot 0,15^2] - [3,974 + 7,065 \cdot 3,15^2] = \\ &= 1731,24 - 74,076 = 1657,164 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

де $a_1 = y_c - y_1 = 5,85 - 6 = -0,15 \text{ см}$;

$a_2 = y_c - y_2 = 5,85 - 9 = -3,15 \text{ см}$.

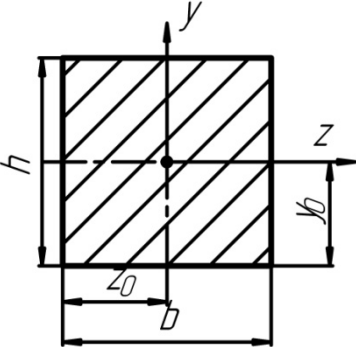
$$\begin{aligned} I_{Y_c} &= [I_{Y_1} + A_1 \cdot b_1^2] - [I_{Y_2} + A_2 \cdot b_2^2] = \\ &= [1728 + 144 \cdot 0,15^2] - [3,974 + 7,065 \cdot 3,15^2] = \\ &= 1731,24 - 74,076 = 1657,164 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

де $b_1 = Z_c - Z_1 = 5,85 - 6 = -0,15 \text{ см}$;

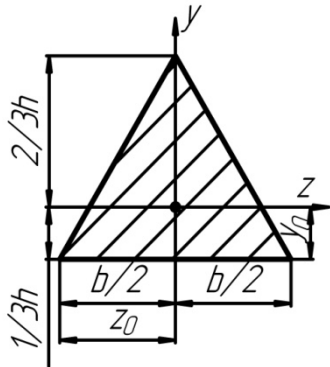
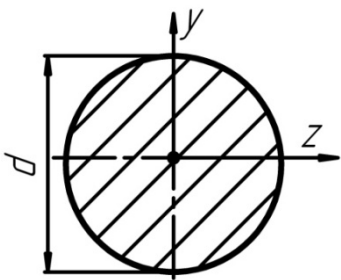
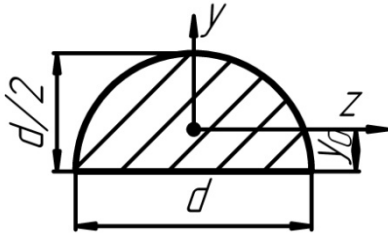
$b_2 = Z_c - Z_2 = 5,85 - 9 = -3,15 \text{ см}$.

Дані взяти з таблиці 3.1

Таблиця 3.1 – Геометричні характеристики плоского перерізу

Переріз	Координати центра ваги переріза		Площа	Осьові моменти інерції	
	Z_0	Y_0		I_z	I_y
1	2	3	4	5	6
	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$b \cdot h$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$

Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5	6
	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{2}h \cdot b$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$
	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$
	$\frac{d}{2}$	$\frac{4r}{3\pi} = 0,424r$	$\frac{\pi d^2}{8}$	$0,11r^4 = 0,00686d^4$	$\frac{\pi d^4}{128} = 0,025d^4$

Знайдемо квадрати радіусів інерції:

$$i_{Z_c}^2 = \frac{I_{Z_c}}{A} = \frac{1657,164}{136,935} = 12,1 \text{ см}^2;$$

$$i_{Y_c}^2 = \frac{I_{Y_c}}{A} = \frac{1657,164}{136,936} = 12,1 \text{ см}^2.$$

Щоб обчислити найнапруженіші точки, потрібно знайти положення нейтральної осі. Визначаємо відрізки, що відсікає нейтральна вісь на осях координат за формулами:

$$a_z = -\frac{i_{Y_c}^2}{Z_P} = -\frac{12,1}{6,15} = -1,97 \text{ см};$$

$$a_Y = -\frac{i_{z_c}^2}{Y_P} = -\frac{12,1}{-5,85} = 2,07 \text{ см.}$$

де Z_P і Y_P – координати точки A , де прикладена сила P , відносно осей z_c y_c .

Т. A (6,15; -5,85).

Найнапруженішою у зоні стиска буде т. A .

Запишемо умову міцності за стискальним напруженням для т. A з координатами

$$Z_A = Z_P = 6,15 \text{ см}; Y_A = Y_P = -5,85 \text{ см.}$$

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{Z_A \cdot Z_P}{i_{y_c}^2} + \frac{Y_A \cdot Y_P}{i_{z_c}^2} \right) \leq [\sigma]_c.$$

$$-\frac{P}{136,935 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[1 + \frac{6,15 \cdot 6,15}{12,1} + \frac{(-5,85) \cdot (-5,85)}{12,1} \right] = -100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\frac{10^4 \cdot P}{136,935} \cdot [1 + 3,126 + 2,828] = 100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\frac{6,954 \cdot 10^4 P}{136,935} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}; 0,0508 P = 100 \cdot 10^2 \text{ Па};$$

$$[P] = \frac{100 \cdot 10^2}{0,0508} = 1968,5 \cdot 10^2 \text{ Н} = 196,85 \text{ кН.}$$

Запишемо умову міцності за розтягальними напруженнями для т. B з координатами $Z_B = -5,85$ см; $Y_B = 6,15$ см.

Т. B (-5,85; 6,15);

Т. A (6,15; -5,85);

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{Z_B \cdot Z_P}{i_{y_c}^2} + \frac{Y_B \cdot Y_P}{i_{z_c}^2} \right) \leq [\sigma]_p.$$

$$-\frac{P}{136,935 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[1 + \frac{(-5,85) \cdot 6,15}{12,1} + \frac{6,15 \cdot (-5,85)}{12,1} \right] \leq 40 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$-\frac{P \cdot 10^4}{136,935} \cdot [1 - 2,973 - 2,973] = 40 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$-\frac{P \cdot 10^4}{136,935} \cdot [-4,946] = 40 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$0,0361 \cdot P = 40 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$[P] = \frac{40 \cdot 10^2}{0,0361} = 1108,03 \cdot 10^2 \text{ Н} = 110,803 \text{ кН}.$$

Отже, допустимим навантаженням для стояка буде менше значення, тобто

$$[P] = 110,803 \text{ кН}.$$

Тепер побудуємо ядро перерізу (рис. 3.4).

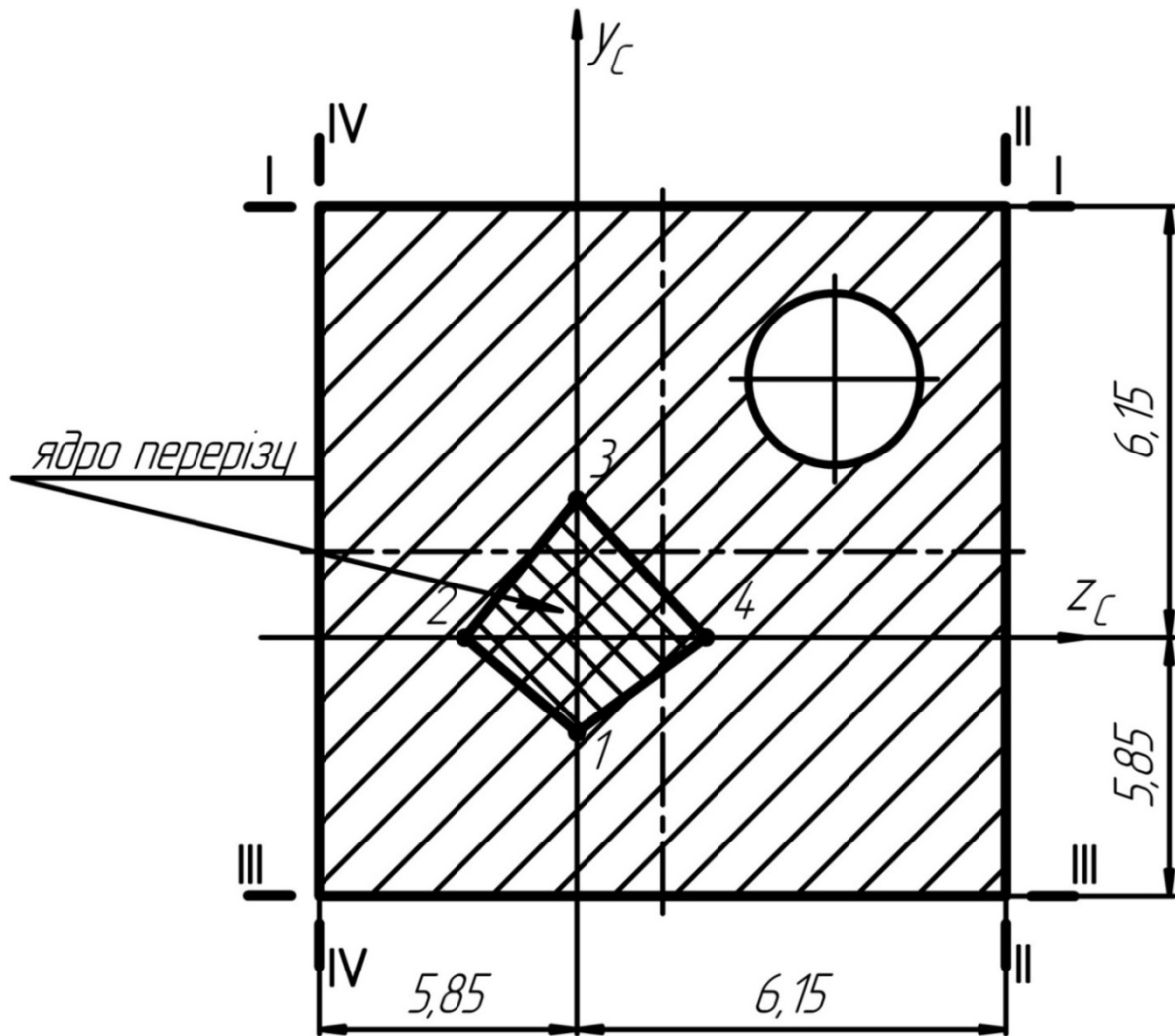


Рисунок 3.4 – Ядро перерізу

Його координати знайдемо за формулами (3.5):

При положенні I-I нейтральна вісь має координати ($a_Z = \infty$; $a_Y = 6,15 \text{ см}$)

$$Z_{я} = -\frac{i_{y_c}^2}{a_Z} = -\frac{12,1}{\infty} = 0;$$

$$Y_{я} = -\frac{i_{z_c}^2}{a_Y} = -\frac{12,1}{6,15} = -1,97 \text{ см}.$$

T.1 (0;-1,97) – це точка ядра перерізу.

Положення II-II (6,15; ∞);

$$\begin{cases} Z_{я} = -\frac{12,1}{6,15} = -1,97\text{см}; \\ Y_{я} = -\frac{12,1}{\infty} = 0. \end{cases} \quad \text{T. 2 (-1,97; 0)}$$

Положення III-III (∞; -5,85);

$$\begin{cases} Z_{я} = -\frac{12,1}{\infty} = 0; \\ Y_{я} = -\frac{12,1}{-5,85} = 2,07\text{см}. \end{cases} \quad \text{T. 3 (0; 2,07)}$$

Положення IV-IV (-5,85; ∞);

$$\begin{cases} Z_{я} = -\frac{12,1}{-5,85} = 2,07\text{см}; \\ Y_{я} = -\frac{12,1}{\infty} = 0. \end{cases} \quad \text{T. 4 (2,07; 0)}$$

Дані для розрахунку наведені у табл. 3.2 та на рисунку 3.5.

Таблиця 3.2 – Завдання

літера	Е	Г	Д	Е
Номер рядка	Номер схеми	a см	$[\sigma]_c$ МПа	$[\sigma]_p$ МПа
1	1	6	90	25
2	2	4	120	20
3	3	3	140	30
4	4	5	160	35
5	5	4	80	40
6	6	3	110	35
7	7	6	150	15
8	8	5	70	25
9	9	4,5	130	20
10	10	5,5	100	30

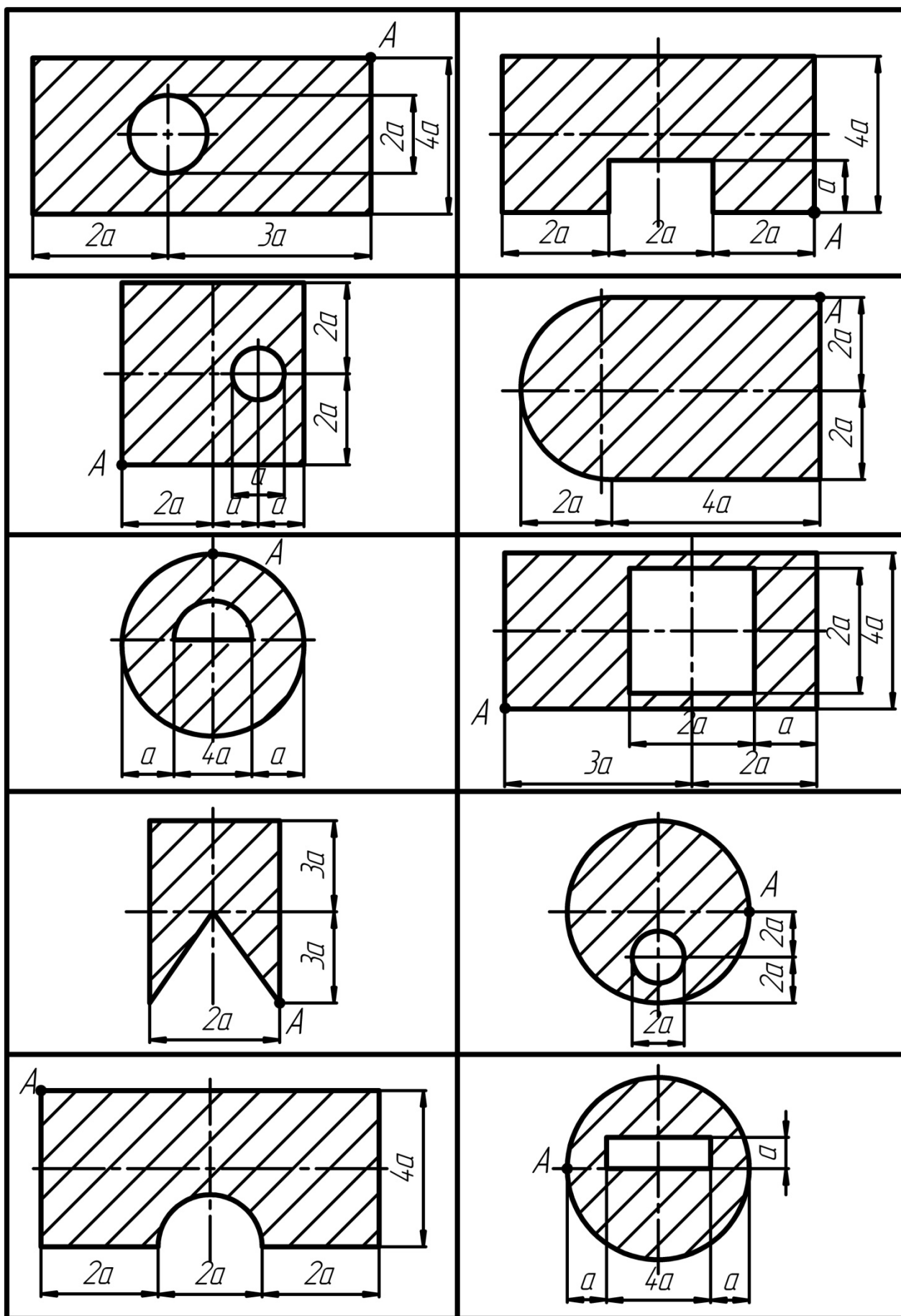


Рисунок 3.5 – Схеми для розрахунку

ЗАДАЧА 4. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ВИГІНІ З КРУТІННЯМ КРУГЛОГО ВАЛА

Умова задачі

Визначити діаметр небезпечного перерізу вала за III теорією за даними табл.4.1, і схемі рис. 4.1, де N – потужність передана валом; n – частота його обертання; T_1 і T_2 – сили натягування шківів пасової передачі; D_1 і D_2 – діаметри шківів; α_1 α_2 – кути нахилу ременів; l a , b – довжина вала і його ділянок.

Таблиця 4.1 – Завдання

Літери	Г	Д	Е	Е	Е	Е	Г	Д	Е	Д
Номер рядка	$[\sigma]$, МПа	N , кВт	n , об/м	l , мм	a , мм	b , мм	D_1 , мм	D_2 , мм	α_1 , мм	α_2 , мм
1	50	8	1500	900	300	400	150	210	15	70
2	60	10	1200	1000	400	300	140	190	30	50
3	80	12	1000	1100	500	200	160	220	45	40
4	100	14	900	1200	550	150	170	250	60	20
5	120	16	850	1300	600	250	180	300	75	10
6	140	18	800	1400	650	350	200	320	10	75
7	150	20	750	1500	700	450	220	350	20	60
8	160	22	700	1600	800	500	240	400	40	45
9	180	24	600	1800	750	550	250	450	50	30
10	200	30	500	2000	850	650	300	500	70	15

Порядок розрахунку

1. Накреслити розрахункову схему вала в двох проекціях із усіма числовими даними.
2. Скласти план навантажень і розрахувати їхні величини.
3. Побудувати епюри згинальних моментів у двох взаємно перпендикулярних площинах і епюри моментів, що крутять.
4. Побудувати сумарну епюру згинаючого моменту і визначити наведений момент за III теорією міцності.
5. Визначити діаметр вала й округлити його до стандартного значення.

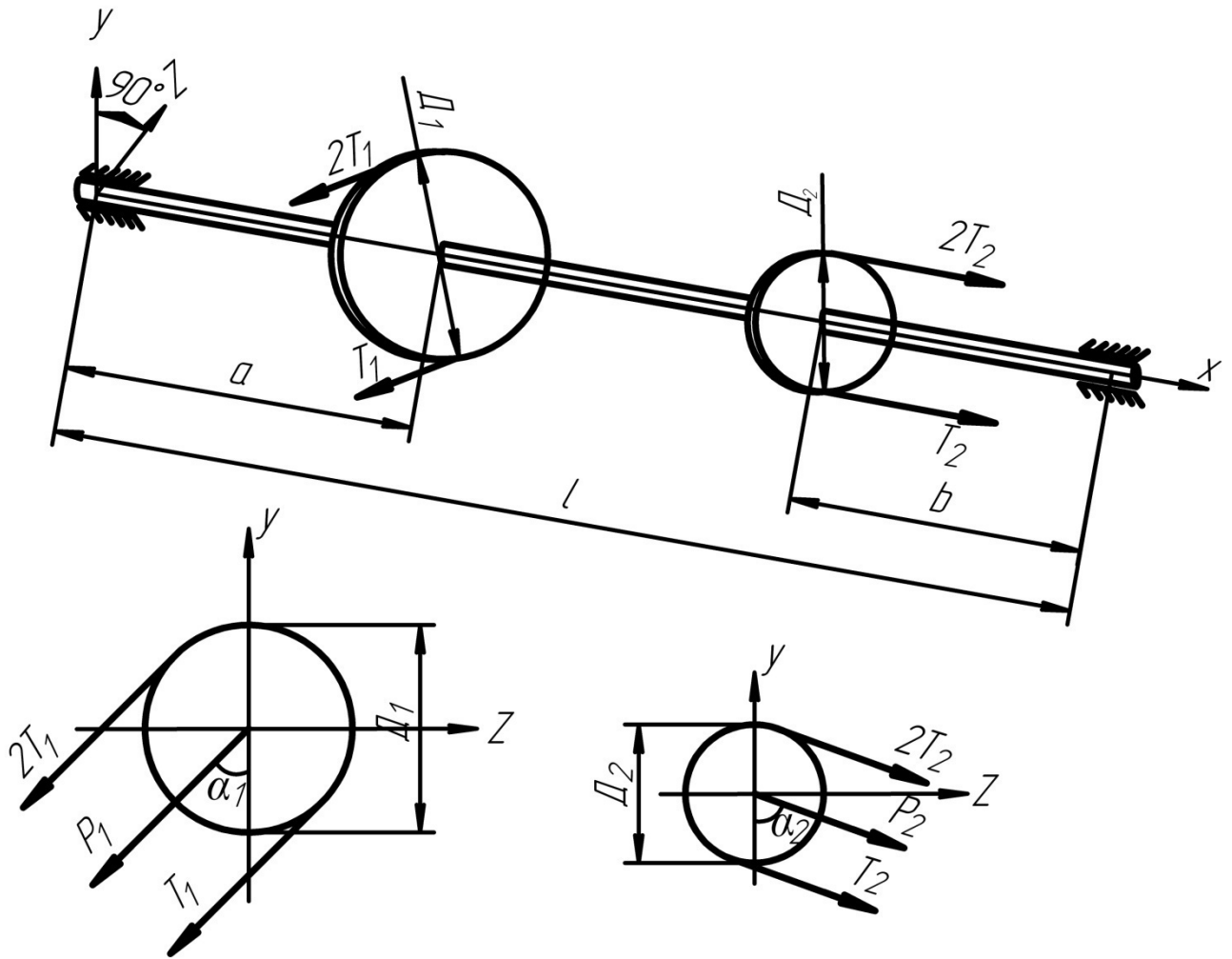


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема

Вказівки

1. До розв'язання задачі варто приступати після вивчення теми «Сумісна для згину та кручення».

2. Визначити обертаючий момент, переданий шківом за формулою:

$$M = \frac{N}{\omega}, \quad (4.1)$$

де N – задана величина потужності, кВт;

ω – кутова швидкість вала, с^{-1} ;

($\omega = \frac{\pi n}{30}$, де n – частота обертання вала, об/хв).

Разом з тим момент, що обертає вал, залежить від сил натягування:

$$M = (2T - T) \cdot \frac{D}{2}. \quad (4.2)$$

Сили натягування ременів T приводять до поперечного навантаження ва-

лу $P=3T$ у перерізі, де встановлені шківів, що діють під кутом α до вертикалі.

3. Накреслити вертикальні й горизонтальні складові сил P в місцях установки шківів.

4. Накреслити розрахункову схему навантажень вала у вертикальній площині й визначити опорні реакції в цьому випадку. Визначити згинальні моменти M_Z на ділянках вала і побудувати епюру M_Z під розрахунковою схемою.

5. Накреслити розрахункову схему навантажень вала у горизонтальній площині й визначити опорні реакції для цього випадку. Визначити згинальні моменти M_Y на ділянках вала і побудувати епюру M_Y під розрахунковою схемою.

6. Накреслити розрахункову схему вала з моментними навантаженнями, визначити моменти, що крутять, на ділянках вала і накреслити епюру M_{KP} під розрахунковою схемою (рис. 4.2, б).

7. Обчислити значення сумарних згинальних моментів на ділянках вала за формулою

$$M^{\Sigma} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2} \quad (4.3)$$

і побудувати епюру M^{Σ} під епюрою M_{KP} .

8. Визначити значення наведеного моменту за III теорією міцності

$$M_{np}^{III} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + M_K^2} \quad (4.4)$$

і знайти небезпечний переріз, де $M_{np}^{III} = \max$.

9. Визначити діаметр вала в небезпечному перерізі за формулою:

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{32 \cdot M_{np}^{III}}{\pi \cdot [\sigma]}} \quad (4.5)$$

Значення d округлити до стандартного значення (остання цифра закінчується 0, 5, 2 чи 8).

Дано: $[\sigma]=180$ МПа; $N=24$ кВт; $n=800$ об/хв;

$l_1=1200$ мм=1,2 м; $a=400$ мм=0,4 м; $b=500$ мм=0,5 м;

$D_1=300$ мм=0,3 м; $D_2=400$ мм=0,4 м; $\alpha_1=30^\circ$; $\alpha_2=45^\circ$.

Розв'язання

1. Накреслюємо розрахункову схему вала (рис.4.2, а).

2. Визначаємо обертаючий момент, переданий шківом за формулою (4.1):

$$M = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{24 \cdot 30}{3,14 \cdot 800} = 0,286 \text{ кНм},$$

де $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ – частота обертання вала.

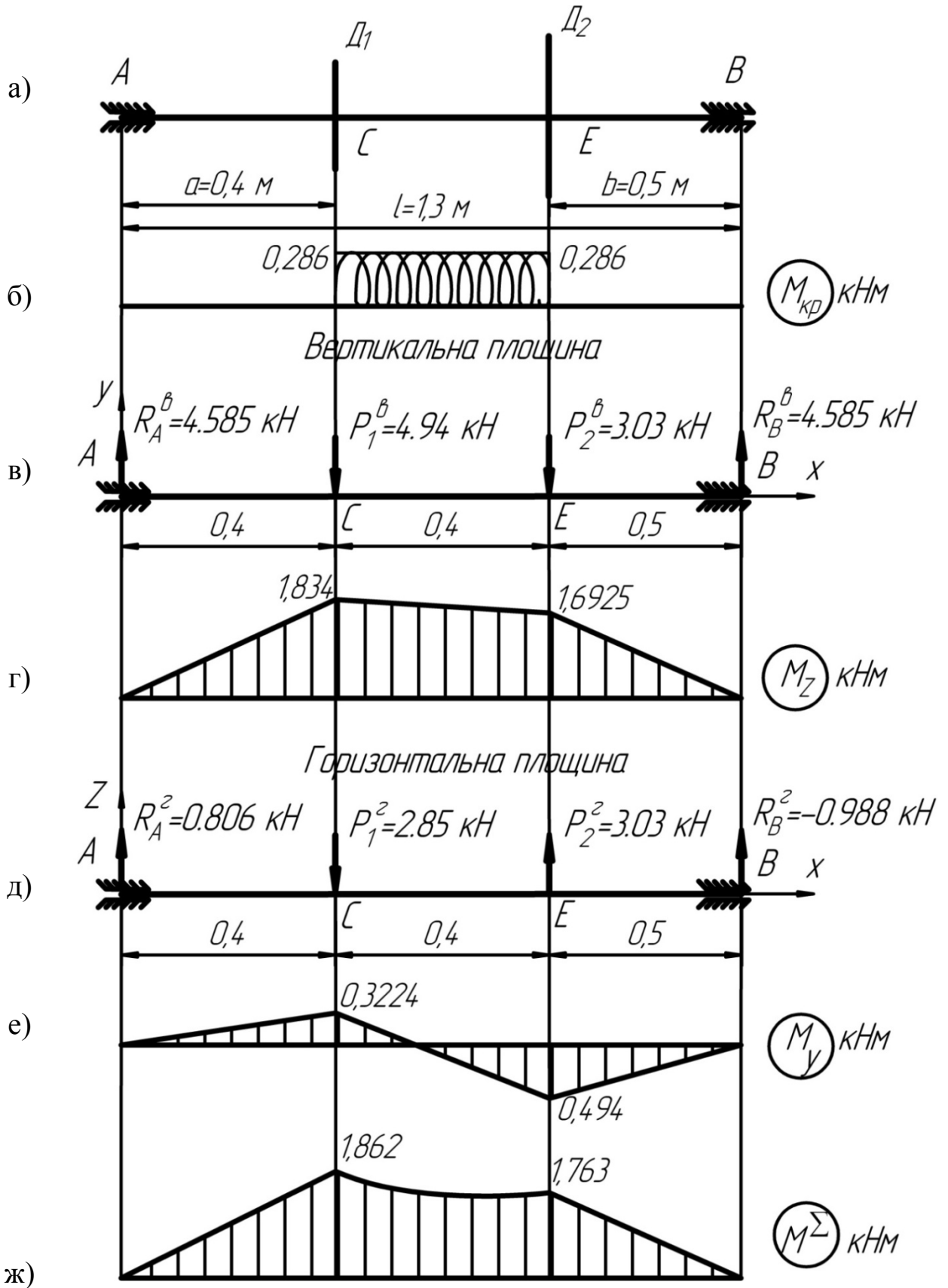


Рисунок 4.2 Епюри внутрішніх силових факторів

Разом з тим момент, що обертає вал, залежить від сил натягування.

$$\text{Якщо } M = (2T - T) \cdot \frac{D}{2}, \text{ тоді } T = \frac{2M}{D};$$

$$T_1 = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,286}{0,3} = 1,9 \text{ кН};$$

$$T_2 = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,286}{0,4} = 1,43 \text{ кН}.$$

Визначаємо тиск на вал з боку шківів:

$$P_1 = 3T_1 = 3 \cdot 1,9 = 5,7 \text{ кН};$$

$$P_2 = 3T_2 = 3 \cdot 1,43 = 4,29 \text{ кН}.$$

Розкладаємо сили P_1, P_2 на складові у вертикальній площині й горизонтальній.

$$\begin{cases} P_1^g = P_1 \cos \alpha_1 = P_1 \cos 30^\circ = 5,7 \cdot 0,866 = 4,94 \text{ кН}; \\ P_1^z = P_1 \sin \alpha_1 = P_1 \sin 30^\circ = 5,7 \cdot 0,5 = 2,85 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2^g = P_2 \cos \alpha_2 = P_2 \cos 45^\circ = 4,29 \cdot 0,707 = 3,03 \text{ кН}; \\ P_2^z = P_2 \sin \alpha_2 = P_2 \sin 45^\circ = 4,29 \cdot 0,707 = 3,03 \text{ кН}. \end{cases}$$

Розглянемо розрахункову схему навантажень вала у вертикальній площині (рис. 4.2, в), визначимо опорні реакції і побудуємо епюру M_z .

$$\Sigma M_A^g = 0: -P_1^g \cdot 0,4 - P_2^g \cdot 0,8 + R_B^g \cdot 1,3 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_B^g &= \frac{P_1^g \cdot 0,4 + P_2^g \cdot 0,8}{1,3} = \frac{4,94 \cdot 0,4 + 3,03 \cdot 0,8}{1,3} = \\ &= \frac{1,976 + 2,424}{1,3} = \frac{4,4}{1,3} = 3,385 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\Sigma M_B^g = 0: P_2^g \cdot 0,5 + P_1^g \cdot 0,9 - R_A^g \cdot 1,3 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_A^g &= \frac{P_2^g \cdot 0,5 + P_1^g \cdot 0,9}{1,3} = \frac{3,03 \cdot 0,5 + 4,94 \cdot 0,9}{1,3} = \\ &= \frac{1,515 + 4,446}{1,3} = \frac{5,961}{1,3} = 4,585 \text{ кН} \end{aligned}$$

Перевірка: $\Sigma P(Y) = 0$

$$R_A^e - P_1^e - P_2^e + R_B^e = 0;$$

$$4,585 - 4,94 - 3,03 + 3,385 = 0;$$

$$7,97 - 7,97 = 0.$$

Згинальні моменти M_Z у характерних точках вала.

$$M_A^e = 0; M_C^e = R_A^e \cdot 0,4 = 4,585 \cdot 0,4 = 1,834 \text{ кНм};$$

$$M_B^e = 0; M_E^e = R_B^e \cdot 0,5 = 3,385 \cdot 0,5 = 1,6925 \text{ кНм}.$$

За цими даними будуюмо епюру M_Z (рис.4.2 г).

Горизонтальна площина (рис. 4.2, д)

Опорні реакції.

$$\Sigma M_A^z = 0: -P_1^z \cdot 0,4 + P_2^z \cdot 0,8 + R_B^z \cdot 1,3 = 0;$$

$$R_B^z = \frac{P_1^z \cdot 0,4 - P_2^z \cdot 0,8}{1,3} = \frac{2,85 \cdot 0,4 - 3,03 \cdot 0,8}{1,3} =$$

$$= \frac{1,14 - 2,424}{1,3} = \frac{-1,284}{1,3} = -0,988 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_B^z = 0: -P_2^z \cdot 0,5 + P_1^z \cdot 0,9 - R_A^z \cdot 1,3 = 0;$$

$$R_A^z = \frac{-P_2^z \cdot 0,5 + P_1^z \cdot 0,9}{1,3} = \frac{-3,03 \cdot 0,5 + 2,85 \cdot 0,9}{1,3} =$$

$$= \frac{-1,515 + 2,565}{1,3} = 0,806 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\Sigma P(Z) = 0$

$$R_A^z - P_1^z + P_2^z + R_B^z = 0;$$

$$0,806 - 2,85 + 3,03 - 0,988 = 0.$$

$$3,836 - 3,838 \approx 0.$$

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках і будуюмо епюру M_Y (рис. 4.2, е).

$$M_A^z = 0; M_C^z = R_A^z \cdot 0,4 = 0,806 \cdot 0,4 = 0,3224 \text{ кНм};$$

$$M_B^z = 0; M_E^z = R_B^z \cdot 0,5 = -0,988 \cdot 0,5 = -0,494 \text{ кНм}.$$

Обчислюємо значення сумарних згинальних моментів за формулою (рис. 4.2, ж):

$$M_A^\Sigma = \sqrt{(M_A^e)^2 + (M_A^z)^2} = \sqrt{0+0} = 0.$$

$$M_C^\Sigma = \sqrt{(M_C^e)^2 + (M_C^z)^2} = \sqrt{1,834^2 + 0,3224^2} = \\ = \sqrt{3,36356 + 0,10394} = 1,862 \text{ кНм};$$

$$M_E^\Sigma = \sqrt{(M_E^e)^2 + (M_E^z)^2} = \sqrt{1,6925^2 + 0,494^2} = \\ = \sqrt{2,8646 + 0,2440} = 1,763 \text{ кНм}.$$

$$M_B^\Sigma = \sqrt{(M_B^e)^2 + (M_B^z)^2} = \sqrt{0 + 0} = 0.$$

Епюра крутних моментів (рис. 4.2, а).

$$M_{кр} = 0,286 \text{ кНм}.$$

Значення приведенного моменту за III теорією міцності визначаємо для небезпечного перерізу за формулою (4.4):

$$M_{np}^{III} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_\Sigma^2} = \sqrt{0,286^2 + 1,862^2} = \\ = \sqrt{0,0818 + 3,4670} = 1,884 \text{ кНм}.$$

Діаметр вала визначаємо за умови міцності при крученні за формулою (4.5):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{III}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,884 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 180 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{0,10666 \cdot 10^{-3}} = \\ = 0,474 \cdot 10^{-1} \text{ м} \cdot 10^3 = 47,4 \text{ мм}.$$

Приймаємо $d=50$ мм.

Відповідь: $d=50$ мм.

ЗАДАЧА 5. РОЗРАХУНОК ПРУЖНИХ СИСТЕМ НА ДИНАМІЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Теоретичні положення

У статично невизначених системах кількість невідомих більше трьох, тому їх не можна розраховувати тільки за допомогою рівнянь рівноваги. Одним з найбільш відомих методів розрахунку є метод сил, в якому за невідомі зусилля приймають зусилля в додаткових чи зайвих зв'язках. Хід розрахунку балок, чи рам наступний (дані взяті з рис. 5.1 та табл. 5.1):

- визначаємо ступінь статичної невизначеності, тобто обчислюємо кількість зайвих невідомих $x_1; x_2 \dots x_n$;
- відкидаємо зайві зв'язки і заміняємо їх невідомими (вийде так звана основна система);
- складаємо канонічні рівняння методами сил, для обчислення невідомих;
- будуємо в основній системі епюру від заданого навантаження M_P і одиничну епюру від $x_1 = 1$;
- обчислюємо коефіцієнти канонічних рівнянь за формулами Верещагіна;
- визначаємо невідомі сили;
- будуємо остаточні епюри M, Q, N .

Далі розрахунок ведемо як для статично визначених систем на динамічне навантаження (знаходимо статичні максимальні навантаження, коефіцієнт динамічності), а потім динамічні напруги та переміщення за формулами:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} \quad (5.1)$$

$$\Delta_{дин} = \Delta_{ст} \cdot K_{дин} \quad (5.2)$$

Напруження і деформації під час ударів.

У наближеній теорії удару динамічний коефіцієнт без обліку маси конструкції:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}}, \quad (5.3)$$

де H – висота падіння вантажу;

$\Delta_{ст}$ – деформація вантажу, але прикладеного статично.

Розрахункові рівняння міцності та жорсткості під час удару:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} = \frac{M}{W_Z} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} \right) \leq [\sigma]; \quad (5.4)$$

$$\Delta_{дин} = \Delta_{ст} \cdot K_{дин} = \Delta_{ст} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} \right) \leq [\Delta]; \quad (5.5)$$

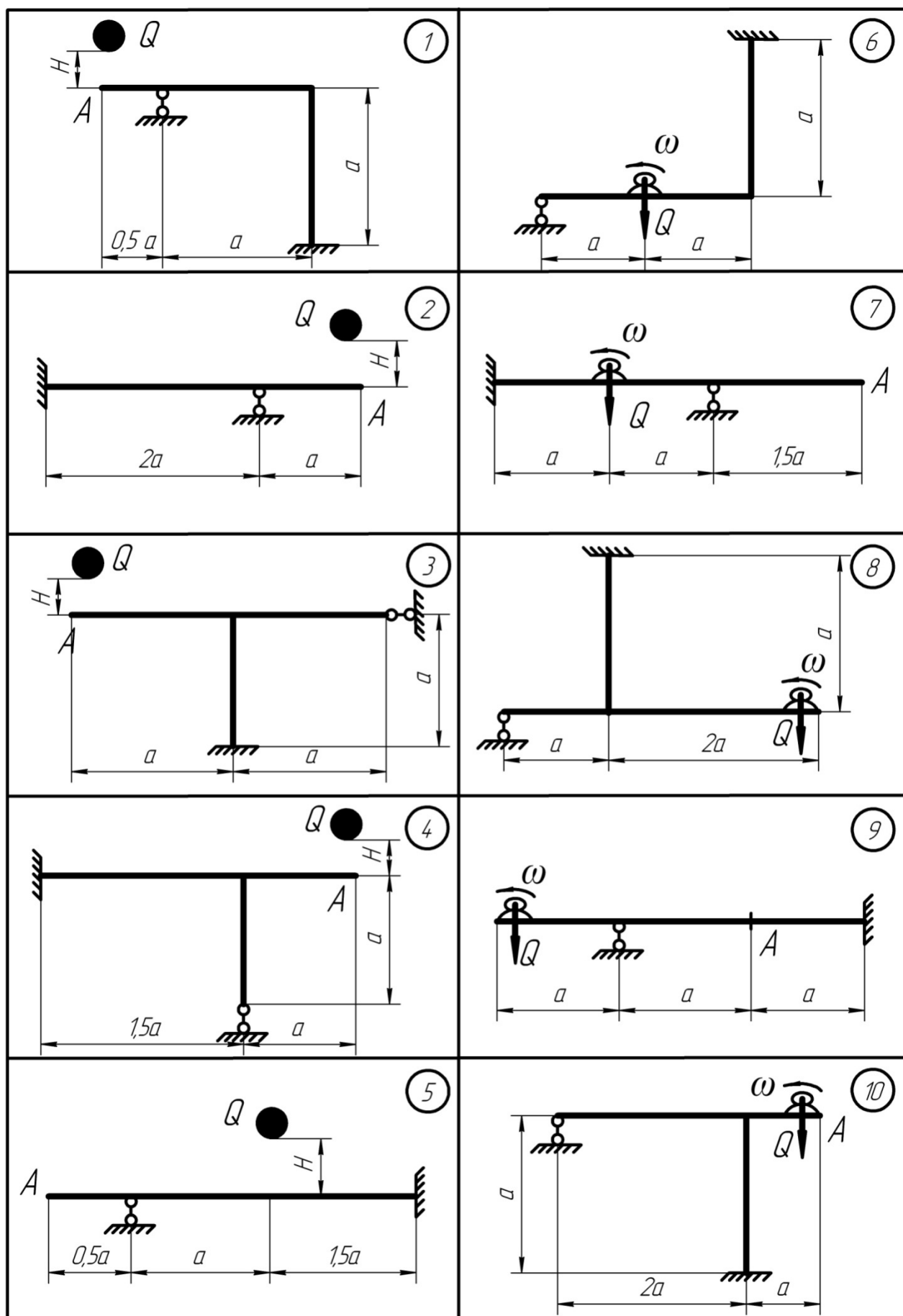


Рисунок 5.1 – Схеми для розрахунку

Приклад 5.1

Для рами (балки), рис. 5.2, яка піддається удару вантажем $Q = 1$ кН з висоти $H = 8$ см; визначити динамічну напругу і прогин у т. А, якщо $a = 2$ м, 2 І № 40.

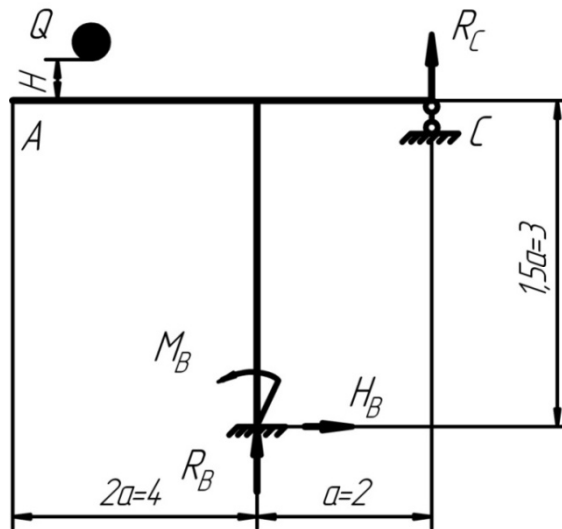


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема

Розрахунок

1. Визначаємо ступінь статичної невизначеності за формулою:

$$S = n - 3, \quad (5.6)$$

де n – кількість невідомих опорних реакцій ($n = 4; R_B; H_B; M_B; R_C$);
3 – три рівняння рівноваги.

$$S = 4 - 3 = 1.$$

Рама один раз статично невизначена.

2. Складаємо канонічне рівняння методу сил:

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0. \quad (5.7)$$

3. Будуємо основну та еквівалентну системи (рис. 5.3, а, б):

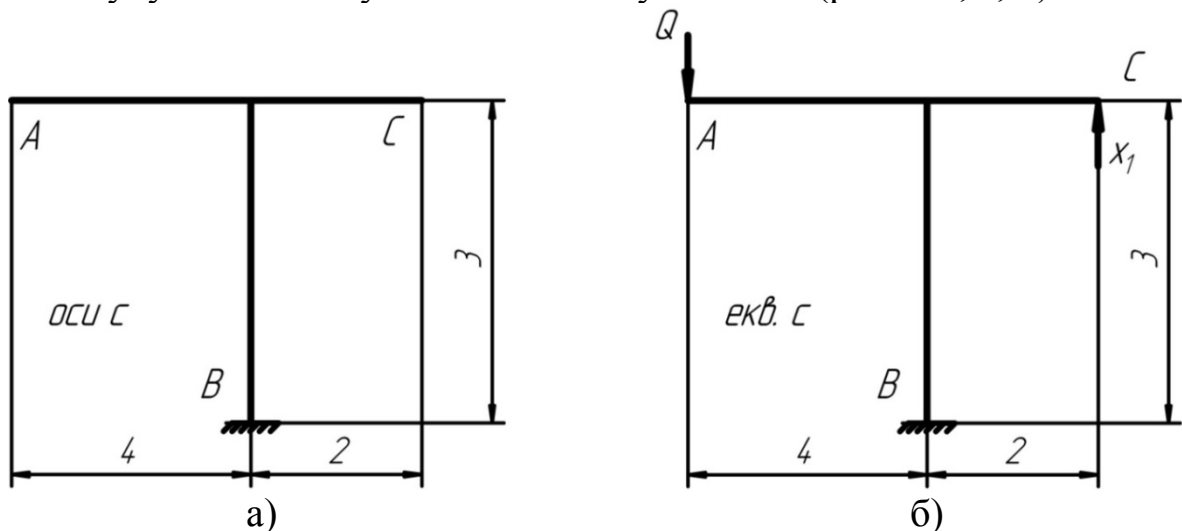


Рисунок 5.3 – Основна та еквівалентна системи

4. Будуємо одиничну епюру моментів (рис. 5.4 а) від $x_1 = 1$ і M_P від $Q = 10$ кН (рис. 5.4 б).

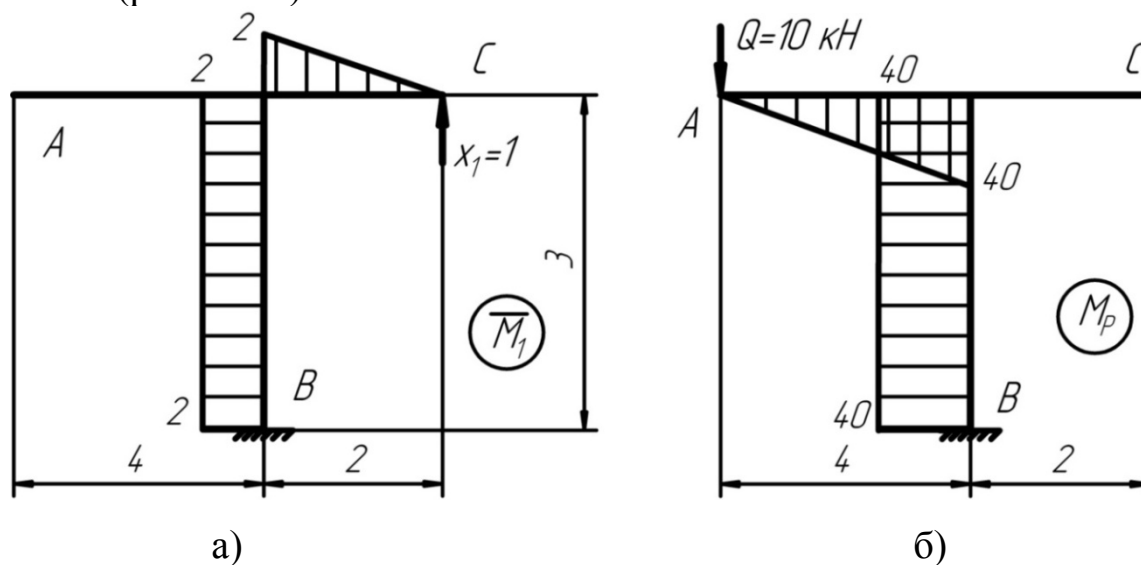


Рисунок 5.4 – Одинична та вантажна епюра моментів

5. Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння $\delta_{11}; \Delta_{IP}$.

$$\delta_{11} = M_1 \times M_1 = \frac{1}{EJ_Z} \cdot \sum^2 w \cdot y_c = \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2) + 3 \cdot 2 \cdot 2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_Z} \left(\frac{8}{3} + 12 \right) = \frac{44}{3EJ_Z};$$

$$\Delta_{IP} = M_P \times M_1 = \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 40 \cdot 2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 2) \right] = \frac{240}{EJ_Z}.$$

Знаходимо $x_1 = -\frac{\Delta_{IP}}{\delta_{11}} = -\frac{240 \cdot 3EJ}{EJ_Z \cdot 44} = -16,36$ (кН).

6. Будуємо остаточну епюру моментів $M_{ост}$ (рис. 5.5).

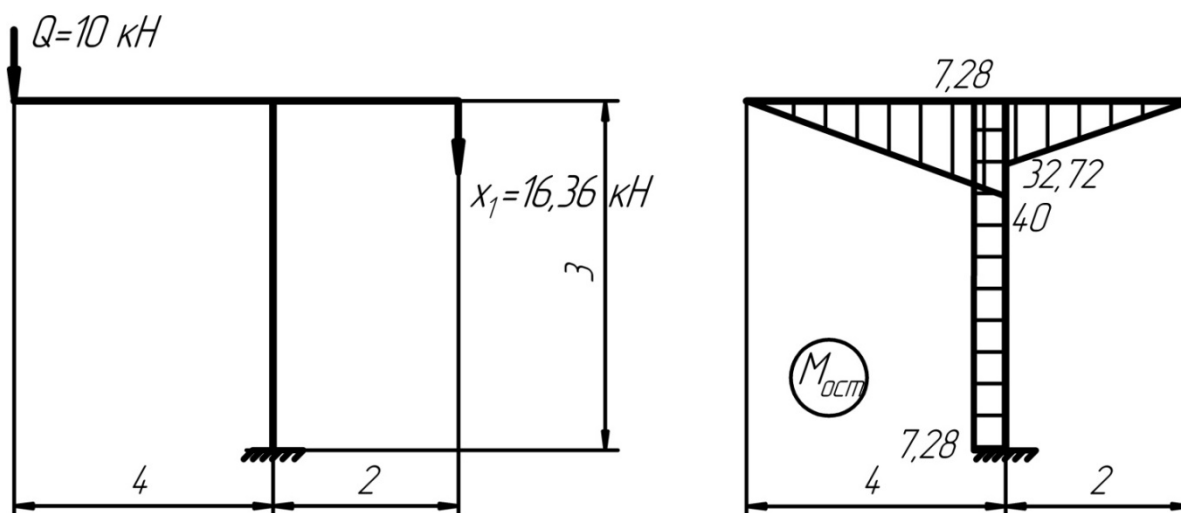


Рисунок 5.5 – Остаточна епюра моментів

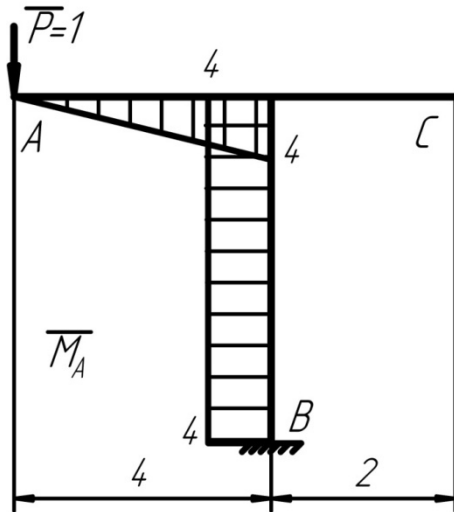
7. Деформаційна перевірка: (прогин на опорі С).

$$\begin{aligned}\Delta_c &= M_{ocm} \times M_1 = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{2}{6}(-2 \cdot 2 \cdot 32,72) + \frac{3}{6}(2 \cdot 2 \cdot 7,28 + 2 \cdot 2 \cdot 7,28 + 2 \cdot 7,28 + 2 \cdot 7,28) \right] = \\ &= -\frac{130,88}{3EJ_Z} + \frac{43,68}{EJ_Z} = \frac{-43,63 + 43,68}{EJ_Z} \approx 0.\end{aligned}$$

Похибка становить:

$$\delta = \frac{43,68 - 43,63}{43,68} \cdot 100\% = \frac{0,05}{43,68} \cdot 100\% = 0,114\% \leq 2\%.$$

8. Статичний прогин у точці удару. Перемножимо епюри M_{ocm} та \bar{M}_A (рис. 5.5 та рис. 5.6).



$$\begin{aligned}\Delta_{cm}^A &= M_{ocm} \times M_A = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{4}{6}(2 \cdot 4 \cdot 40) + 3 \cdot 4 \cdot 7,28 \right] = \\ &= \frac{213,33}{EJ_Z} + \frac{87,36}{EJ_Z} = \frac{300,69}{EJ_Z} (м)\end{aligned}$$

Рисунок 5.6 – Одинична епюра момен-
тів для обчислення прогину т. А

$$\text{або } \Delta_{cm}^A = \frac{300,69 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 37860 \cdot 10^{-8}} = 0,00397 \text{ м},$$

для двох двотаврів № 40 $J_Z = 2 \cdot 18930 = 37860 \text{ см}^4$

$$W_z = 2 \cdot 947 = 1894 \text{ см}^3.$$

Отже $\Delta_{cm}^A = 0,00397 \text{ м} = 0,397 \text{ см}$.

9. Динамічний прогин у т. А:

$$\Delta_{дин}^A = \Delta_{cm}^A \cdot K_{дин} = \Delta_{cm}^A \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}^A}} \right] = 0,397 \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8}{0,397}} \right] = 2,95 \text{ см}.$$

10. Динамічна напруга:

$$\sigma_{дин}^{max} = \sigma_{ст}^{max} \cdot K_{дин} = \frac{M}{W_Z} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} \right] = \frac{40 \cdot 10^3}{1894 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8}{0,397}} \right] =$$

$$= 0,1568 \cdot 10^9 \text{ Па} = 156,8 \text{ МПа}.$$

Розрахунок пружних систем на коливання

Приклад 5.2

Визначити розрахунком найбільшу напругу в балці (чи рамі) і прогин у т. А, що складається з двох швелерів № 27, на яких встановлений двигун вагою $Q = 3,5$ кН, $S = 0,4$ кг, $N = 800$ об/хв, $a = 1,2$ м.

Якщо динамічна напруга виявиться більше $[\sigma] = 160$ МПа, то необхідно відповідно змінити номер швелера, підтвердивши правильність вибору нового повторним розрахунком. Дані взяті з таблиці 5.1, схему – з рис. 5.7

Таблиця 5.1 Завдання

Номер рядка	Номер схеми	a , м	Q , кН	H , см	S , кН	n , об/хв	Визначити	Зріз
1	1	2,0	7,5	8,0	–	–	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 I № 40
2	2	1,0	3,5	7,0	–	–	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 I № 27
3	3	1,6	6,6	6,0	–	–	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 I № 36
4	4	1,1	9,0	9,0	–	–	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 I № 45
5	5	0,9	4,0	10,0	–	–	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 I № 50
6	6	1,5	8,6	–	0,8	900	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 [№ 22
7	7	1,2	4,6	–	1,0	650	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 [№ 24
8	8	1,4	5,0	–	0,6	800	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 [№ 33
9	9	1,3	6,0	–	0,9	700	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 [№ 27
10	10	0,8	8,0	–	0,7	750	$\sigma_{дин}^{max}; \Delta_{дин}^A$	2 [№ 30
Літера	Е	Д	Г	Е	Е	Е	Г	Е

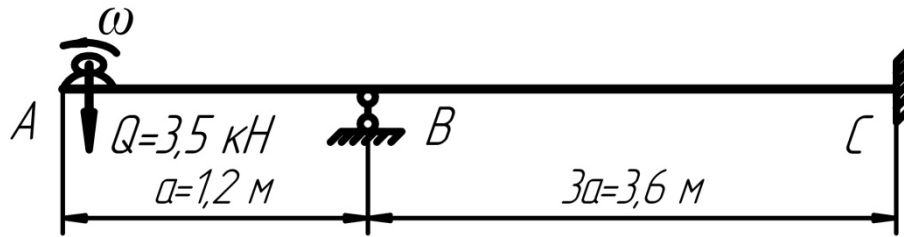


Рисунок 5.7 – Задана схема

Порядок розрахунку

1. Накреслити розрахункову схему балки (рамі) (рис 5.8, а).
2. Розкрити статичну невизначеність системи методом сил при статичному навантаженні вагою Q .
3. Побудувати остаточну епюру згинальних моментів $M_{ост}$.
4. Визначити вертикальне переміщення точки додатка сили Q .
5. Визначити частоту власних (вільних) коливань системи за формулою

$$W = \sqrt{\frac{\partial}{\Delta_{ст}}} \text{ (рад / с)}. \quad (5.8)$$

6. Визначити частоту змушених коливань:

$$W_0 = \frac{\pi}{30} \text{ (рад / с)}. \quad (5.9)$$

7. Визначити коефіцієнт наростання коливань

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^2}. \quad (5.10)$$

8. Динамічний коефіцієнт при змушених коливаннях без обліку маси системи:

$$K_{дин} = 1 + \frac{S}{Q} \cdot \beta. \quad (5.11)$$

9. Визначити небезпечний переріз балки (рамі), найбільшу статичну напругу.

10. Визначити найбільшу напругу в балці (рамі) і прогин u т.А при змушених коливаннях.

Розрахунок

1. Ступінь статичної невизначеності:

$$S = n - 3 = 4 - 3 = 1.$$

2. Канонічне рівняння методу сил:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

3. Основна та еквівалентна системи (рис. 5.8, б, в).

4. Будуємо одиничну епюру від $x_1 = 1$ (рис. 5.8, г) і епюру M_P від $Q = 3,5$ кН (рис. 5.8, д).

5. Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння $\delta_{11}; \Delta_{1P}$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{3,6}{6} (2 \cdot 3,6 \cdot 3,6) \right] = \frac{15,552}{EJ_Z};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{3,6}{6} (-2 \cdot 3,6 \cdot 16,8 - 3,6 \cdot 4,2) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} \left[\frac{3,6}{6} (-120,96 - 15,12) \right] = -\frac{81,648}{EJ_Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Знаходимо: } x_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-81,648 \cdot EJ_Z}{EJ_Z \cdot 15,552} = 5,25 \text{ (кН)}.$$

6. Будуємо остаточну епюру моментів $M_{ост}$ (рис. 5.8, е).

7. Деформаційна перевірка: (прогин на опорі В):

$$\begin{aligned} \Delta_B = M_{ост} \times M_1 &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{3,6}{6} (2 \cdot 3,6 \cdot 2,1 - 4,2 \cdot 3,6) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot \left[\frac{3,6}{6} (15,12 - 15,12) \right] = 0. \end{aligned}$$

8. Будуємо одиничну епюру моментів у точці встановлення двигуна (рис. 5.8 ж).

9. Статичний прогин у точці встановлення двигуна:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{1}{EJ_Z} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1,2}{6} (2 \cdot 4,2 \cdot 1,2) \right) + \frac{3,6}{6} (2 \cdot 4,2 \cdot 1,2 - 2 \cdot 2,1 \cdot 4,8 - 2,1 \cdot 1,2 + 4,2 \cdot 4,8) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_Z} \cdot [2,016 + 4,536] = \frac{6,552}{EJ_Z} \end{aligned}$$

або
$$\Delta_{ст} = \frac{6,552 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 8320 \cdot 10^{-8}} = 0,000394 м = 0,0394 см,$$

де для 2 [№ 27 $J_Z = 2 \cdot 4160 = 8320 см^4;$
 $W_Z = 2 \cdot 308 = 616 см^3.$

10. Частота власних (вільних) коливань:

$$W = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0,0394}} = 157,8 (с^{-1}).$$

11. Частота змушених коливань:

$$W_0 = \frac{\pi}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{30} = 83,73 (с^{-1}).$$

12. Коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{83,73}{157,8}\right)^2} = \frac{1}{1 - (0,5306)^2} = \frac{1}{1 - 0,2815} = \frac{1}{0,7185} = 1,392.$$

13. Динамічний коефіцієнт:

$$K_{дин} = 1 + \frac{S}{Q} \cdot \beta = 1 + \frac{0,4}{3,5} \cdot 1,392 = 1,159.$$

14. Найбільша статична напруга:

$$\sigma_{ст} = \frac{|M_{max}|}{W_Z} = \frac{4,2 \cdot 10^3}{616 \cdot 10^{-6}} = 0,00682 \cdot 10^9 Па = 6,82 МПа,$$

тоді $\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} = 6,82 \cdot 1,159 = 7,9 МПа$

$$\Delta_{дин}^A = \Delta_{ст} \cdot K_{дин} = 0,0394 \cdot 1,159 = 0,0457 см.$$

Відповідь: $\sigma_{дин} = 7,9 МПа;$

$$\Delta_{дин}^A = 0,0457 см.$$

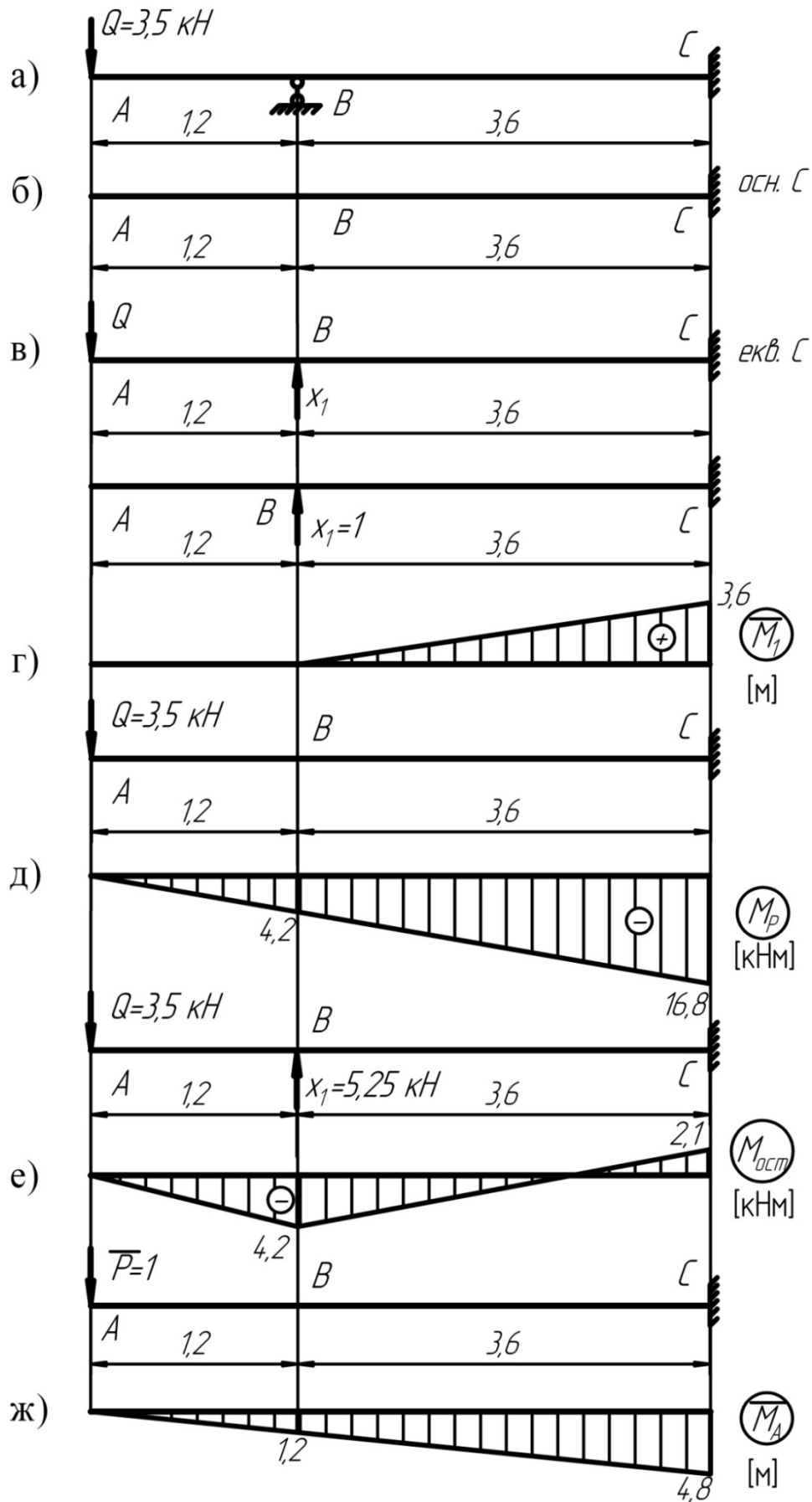
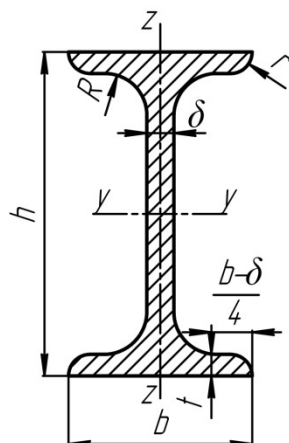


Рисунок 5.8 – Для розкриття статичної невизначеності та обчислення прогину точки А

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Опір матеріалів з основами теорії пружності та пластичності / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін. – К.: Вища школа, 1995. – 301 с.
2. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко и др. – К.: Вища школа, 1988. – 775 с.
3. Дарков А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков. – М.: Высш. Школа, 1989. – 624 с.
4. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
5. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин и др. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
6. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко и др. – Киев.: Наукова думка, 1988. – 704 с.
7. Ободовский Б.А. Пособие по сопротивлению материалов в примерах и задачах / Б.А. Ободовский. – Харьков: ХГУ, 1987. – 383 с.
8. Миролубов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролубов и др. – М.: Высшая школа, 1974. – 392 с.

ДОДАТОК А



Позначення:

h – висота балки;
 b – ширина полиці;
 δ – товщина стінки;

t – середня товщина полиці;

R – радіус внутрішнього закруглення; i – радіус інерції.

r – радіус закруглення полиці;

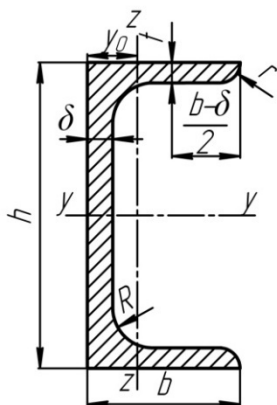
J – момент інерції;

W – момент опору;

S – статичний момент
перерізу;

Номер балки	Розміри, мм						Площа поперечного перерізу, см ²	Маса 1м, кг	Довідкові значення для осей						
	h	b	δ	t	R	r			$y - y$				$z - z$		
									J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	S_y , см ³	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см
10	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	18,40	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	19,90	1430	159	7,51	89,8	114	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	22,70	2030	203	8,37	114	155	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	25,80	2790	254	9,22	143	206	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	27,30	3460	289	9,97	163	198	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	29,40	3800	317	10,10	178	260	41,60	2,63
27	270	125	6	9,8	11	4,5	40,2	31,50	5010	371	11,20	210	260	41,50	2,54
27a	270	135	6	10,2	11	4,5	43,2	33,90	5500	407	11,30	229	337	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	36,50	7080	472	12,30	268	337	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	39,20	7780	518	12,50	292	436	60,10	2,95
33	330	140	7	11,2	13	5	53,8	42,20	9840	597	13,50	339	419	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	48,60	13380	743	14,70	423	516	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13	15	6	72,6	57	19062	953	16,20	545	667	86,10	3,03
45	450	160	9	14,2	16	7	84,7	66,50	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	17	7	100	78,50	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	18	7	118	92,60	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	20	8	138	108,00	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54

ДОДАТОК Б



Позначення:

h – висота;
 b – ширина полиці;
 δ – товщина стінки;
 t – товщина полиці;
 R – радіус внутрішнього закруглення;
 r – радіус закруглення полиці;

J – момент інерції;
 W – момент опору;
 i – радіус інерції;
 S – статичний момент перерізу;
 y_0 – відстань від осі $z-z$ до зовнішньої грані стінки

Номер швелера	Розміри, мм						Площа поперечного перерізу, см^2	Маса 1 м, кг	Довідкові значення для осей							y_0 , см
	h	b	δ	t	R	r			$y-y$				$z-z$			
									J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	S_y , см^3	J_z , см^4	W_z , см^3	i_z , см	
5	50	32	4,4	7	6	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	5,90	48,6	15	2,54	9	8,70	3,68	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7	3	10,90	8,59	174	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,30	10,40	304	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8	3	15,60	12,30	491	70,2	5,60	40,80	45,40	11	1,700	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8	3	17	13,30	545	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
16a	160	68	5	9	8,5	3,5	19,50	15,30	823	103	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2
18	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,70	16,30	1090	121	7,24	69,80	86	17	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,20	17,40	1190	132	7,32	76,10	105	20	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9	9,5	4	23,40	18,40	1520	152	8,07	87,70	113	20,50	2,300	2,07
20a	200	80	5,4	9,7	9,5	4	25,20	19,80	1670	167	8,15	95,90	139	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10	4	26,70	21	2110	192	8,89	110	151	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,6	10,2	10	4	28,80	22,60	2330	212	8,99	121	187	30	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,60	24	2900	242	9,73	139	208	31,60	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,90	25,80	3180	265	9,84	151	254	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6	10,5	11	4,5	35,20	27,70	4160	308	10,90	178	262	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11	12	5	40,50	31,80	5810	387	12	224	327	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7	11,7	13	5	46,50	36,50	7980	484	13,10	281	410	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14	6	53,40	41,90	10820	601	14,20	350	513	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8	13,5	15	6	61,50	48,30	15220	761	15,70	444	642	73,40	3,230	2,75

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Чальцев Михайло Миколайович
Алтухова Тетяна Іванівна
Неклюдов Михайло Володимирович

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2
З КУРСУ «ОПР МАТЕРІАЛІВ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 7.090258
ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ)**

Підписано до випуску 23.03.2011 р. Гарнітура Times New.
Умов. друк. арк. 3,38. Зам. № 54.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E-mail: druknf@gambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.