УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Рудакова О.А.
Донецкий национальный технический университет
olga.a.rudakova@gmail.com

Для последовательности интегральных функционалов, определенных на весовых пространствах Соболева, связанных с последовательностью n −мерных областей, рассмотрены вариационные задачи с множествами ограничений интегрального типа. Установлены достаточные условия сходимости минимизантов и минимальных значений рассматриваемых вариационных задач. Среди установленных условий – сильная связанность последовательности весовых пространств Соболева с “предельным” пространством и Г-сходимость рассматриваемых функционалов. Как известно (см., например, [1–3]), сильная связанность соответствующих пространств играет важную роль в вопросах усреднения краевых и вариационных задач в переменных (например, сильно перфорированных) областях. Понятие сильной связанности, используемое в настоящей работе, было введено и изучено в [4]. Г-сходимость – это особая сходимость функционалов, которая во многих важных случаях сопровождается сходимостью решений соответствующих вариационных задач для этих функционалов. Само понятие было введено в 70-е годы прошлого столетия Э. Де Джорджи [5] и на данный момент существует большое количество работ, посвященных этому типу сходимости функционалов, в том числе интегральных функционалов с вырожденными интегрантами и переменными областями определения (см., например, [6–9] и библиографию в [6, 7]).

Перейдем к изложению основного результата [9]. Введем функциональные пространства, определения сильной связанности и Г-сходимости функционалов. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и пусть $p \in (1, n)$. Пусть ν – неотрицательная функция на Ω, причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω, $\nu \in L^1_{loc}(\Omega)$, $(1/\nu)^{1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Через $L^p(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u: \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $\nu|u|^p \in L^1(\Omega)$. Через $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu, \Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu, \Omega)$. Обозначим через $W_0^{1,p}(\nu, \Omega)$ замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu, \Omega)$. Рассмотрим последовательность областей $\Omega_s \subset \Omega$ и соответствующие весовые пространства Соболева $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Через $\widetilde{W_0^{1,p}}(\nu, \Omega_s)$ обозначим замыкание множества всех сужений на Ω_s

функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Наконец, через q_s обозначим отображение $W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $\widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность пространств* $\widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s)$ *сильно связана с пространством* $W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$, *если существует последовательность линейных непрерывных операторов* $l_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$ *такая, что:* $sup_{s\in\mathbb{N}}\|l_s\| < +\infty$, *для любых* $s \in \mathbb{N}$ *и* $u \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s)$ *имеем* $q_s(l_s u) = u$ *почти всюду на* Ω_s.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функционалов* $I_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to \mathbb{R}$ Γ-*сходится к функционалу* $I: W_0^{1,p}(\nu,\Omega) \to \mathbb{R}$, *если выполняются условия: для любой функции* $u \in W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$ *существует последовательность* $w_s \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s)$ *такая, что* $\lim_{s\to\infty}\|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, $\lim_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u)$; *для любой функции* $u \in W_0^{1,p}(\nu,\Omega)$ *и любой последовательности* $u_s \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, *имеем* $\liminf_{s\to\infty} I_s(u_s) \ge I(u)$.

Будем рассматривать последовательность функционалов $I_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to \mathbb{R}$, $I_s = J_s + G_s$, $s \in \mathbb{N}$. Здесь $J_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to \mathbb{R}$ и $G_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to \mathbb{R}$ – интегральные функционалы вида

$$J_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x,\nabla u)\,dx, \quad G_s(u) = \int_{\Omega_s} g(x,u)\,dx, \quad u \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s).$$

Предполагаем, что $f_s: \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функции Каратеодори такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$, почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x,\cdot)$ выпукла в $\mathbb{R}^n$, и для любого $s \in \mathbb{N}$, почти всех $x \in \Omega_s$ и для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1\nu(x)|\xi|^p - \psi_s(x) \le f_s(x,\eta) \le c_2\nu(x)|\xi|^p + \psi_s(x);$$

для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ строго выпукла в $\mathbb{R}$, и для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\eta \in \mathbb{R}$ имеем

$$c_3\nu(x)|\eta|^p - \psi(x) \le g(x,\eta) \le c_4\nu(x)|\eta|^p + \psi(x),$$

где $c_i > 0$, $i = 1,2,3,4$, $\psi_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\psi_s \ge 0$ в Ω_s, $\sup_s\|\psi_s\|_{L^1(\Omega_s)} < \infty$, $\psi \in L^1(\Omega)$, $\psi \ge 0$ в Ω.

Введем множества ограничений. Рассмотрим для любого $s \in \mathbb{N}$ интегральные функционалы $\Phi_s: \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s) \to \mathbb{R}$ вида

$$\Phi_s(u) = \int_{\Omega_s} \varphi(x,u)\,dx, \quad u \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu,\Omega_s),$$

где $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори и такая, что для почти всех $x \in \Omega$ $\varphi(x,\cdot)$ выпукла в $\mathbb{R}$, $\varphi(x,0) = 0$, и для почти всех $x \in \Omega$ и $\eta \in \mathbb{R}$ имеем $|\varphi(x,\eta)| \le c\nu(x)|\eta|^p + b(x)$, где $b \in L^1(\Omega)$, $b \ge 0$ в Ω. Для любого $s \in \mathbb{N}$ определим множество

$$V_s = \left\{u_s \in \widetilde{W_0^{1,p}}(\nu, \Omega_s) \colon \Phi_s(u) \le 1\right\}.$$

Для любой функции $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ определим функционалы $G^\sigma, \Phi^\sigma \colon W_0^{1,p}(\nu, \Omega) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G^\sigma(u) = \int_\Omega \sigma g(x,u)\,dx, \quad \Phi^\sigma(u) = \int_\Omega \sigma\varphi(x,u)\,dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\nu, \Omega)$$

и положим $V^\sigma = \left\{u \in W_0^{1,p}(\nu, \Omega) \colon \Phi^\sigma(u) \le 1\right\}$.

Теорема [9]. *Предположим, что выполняются следующие условия:* $(*_1)$ *вложение* $W_0^{1,p}(\nu, \Omega)$ *в* $L^p(\nu, \Omega)$ *компактно;* $(*_2)$ *последовательность пространств* $\widetilde{W_0^{1,p}}(\nu, \Omega_s)$ *сильно связана с пространством* $W_0^{1,p}(\nu, \Omega)$; $(*_3)$ *существует положительная ограниченная измеримая функция* σ *в* Ω *такая, что для любого открытого куба* $Q \subset \Omega$ *имеем* $\lim_{s\to\infty} meas(Q \cap \Omega_s) = \int_Q \sigma\,dx$; $(*_4)$ *последовательность* $\{J_s\}$ Γ*-сходится к функционалу* $J \colon W_0^{1,p}(\nu, \Omega) \to \mathbb{R}$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ *функция* $u_s \in V_s$ *минимизирует функционал* I_s *на* V_s. *Тогда существует функция* $u \in V^\sigma$ *такая, что: функция* u *− единственная точка минимума функционала* $J + G^\sigma$ *на множестве* V^σ; $\lim_{s\to\infty}\|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, $\lim_{s\to\infty} I_s(u_s) = (J + G^\sigma)(u)$.

1. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604-621.
2. Ковалевский А.А. О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Совр. анализ и его прил.: Сб. науч. тр. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 62-70.
3. Kovalevsky A.A., Rudakova O.A. Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. – 2009. – **1**, № 4. – P. 517-559.
4. Ковалевский А.А., Рудакова О.А. О сильной связанности весовых пространств Соболева и компактности последовательностей их элементов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – 12. – С. 85-99.
5. De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat.e Natur. – 1975. – **58**, № 6. – P. 842-850.
6. Dal Maso G. An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337 p.
7. Braides A., Defranceschi A. Homogenization of multiple integrals // Oxford Lect. Ser. Math. and Appl. – New York: Clarendon Press, 1998. – **12**. – 298 p.
8. Kovalevsky A.A., Rudakova O.A. Γ-convergence of integral functionals with degenerate integrands in periodically perforated domains // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 101-109.
9. Rudakova O.A. On the convergence of solutions of the variational problems with integral constraints and degeneration in variable domains // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – 26. – С. 172-180.