УДК 336.774.3

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ

Едемская Е.Н., Бельков Д.В., Юрченко Н.Ю.
Донецкий национальный технический университет
кафедра вычислительной математики и программирования
E-mail: belkov@telenet.dn.ua

Аннотация
Едемская Е.Н., Бельков Д.В., Юрченко Н.Ю. Формирование оптимального кредитного портфеля. *В статье решается важная практическая задача создания оптимального кредитного портфеля. Существует большое число кредитных запросов и небольшое количество банков. Разработан «жадный» метод ее решения. Выполнен расчет необходимого кредитного ресурса для оптимального распределения кредитных запросов среди банков с использованием экстремальных свойств разбиений чисел. Применение предложенных в статье формул позволит подобрать кредитный ресурс таким образом, чтобы задача распределения кредитных запросов могла бы решаться с заданной относительной погрешностью.*

Общая постановка проблемы

Особенностью кредитной сферы Украины является актуальная задача уменьшения риска несвоевременного возврата денежных средств заемщиками. Одним из способов ее решения является применение кредитными организациями методов оптимизации кредитного портфеля [1].

Целью настоящей работы является разработка метода формирования единого кредитного портфеля системы банков (филиалов одного банка). Задачи работы: постановка задачи и разработка метода формирования кредитного портфеля для случая системы банков (филиалов банка), расчет кредитного ресурса банка, обеспечивающего решение задачи с заданной погрешностью.

Пусть в момент времени T_0 имеется множество $\{C_1, C_2, ..., C_m\}$ кредитных запросов, и каждый из них может быть принят банком к выполнению. Каждый i-й кредитный запрос характеризуется размером займа Q_i, который желательно получить заемщику в момент времени T_0, и графиком возврата занятых денег с процентом за кредит. В этом графике учитывается размер будущих платежей V_k, которые осуществляются заемщиком в моменты времени T_k, k=1,2,…,*l*. Пусть r – нормативная процентная ставка использования банком кредитных ресурсов, R_k – процентная ставка в момент T_k, которая рассчитывается по схеме сложных процентов: $R_k = (1+r)^{T_k - T_0} - 1$, k=1,2,…,*l*. В случае если банк принимает i-й кредитный запрос к выполнению и при полном своевременном погашении кредита, чистый доход D_i банка вычисляется по формуле:

$$D_i = -Q_i + \sum_{k=1}^{l} V_k /(1+R_k) \qquad (1)$$

Из-за ограниченности кредитного ресурса банка возникает задача выбора запросов для размещения их в кредитном портфеле. Необходимо сформировать кредитный портфель, который обеспечивает банку максимальный суммарный доход от его кредитных ресурсов в момент времени T_0. Пусть $X_i = 1$, если i-й кредитный запрос будет внесен в кредитный портфель, иначе - $X_i = 0$. Величина кредитного ресурса банка равна *B*. При отсутствии риска неплатежеспособности заемщиков задача формирования оптимального кредитного портфеля имеет следующий вид [2]:

$$\sum_{i=1}^{m} D_i X_i \to \max \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i X_i \le B \qquad (3)$$

$$X_i \in \{0;1\} \qquad (4)$$

В задаче (2) - (4) максимизируется суммарный доход от кредитного ресурса банка в момент времени T_0. Значения D_i вычисляются по формуле (1).

В реальных условиях всегда есть вероятность P_i будущей неплатежеспособности i-го заемщика. Показателем риска i-го кредитного запроса может быть среднеквадратическое отклонение c_i: $\sigma_i = (D_i + Q_i)\sqrt{P_i(1-P_i)}$. Доход кредитного портфеля является случайной величиной. Ее ожидаемое значение вычисляется по формуле $\overline{D}_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} \overline{D}_i X_i$, где $\overline{D}_i$ - ожидаемое значение D_i. При независимых кредитных запросах задача формирования оптимального кредитного портфеля может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{D}_i X_i - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i X_i = \sum_{i=1}^{m} (\overline{D}_i - \sigma_i) X_i \to \max \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i X_i \le B \qquad (6)$$

$$X_i \in \{0;1\} \qquad (7)$$

Целевая функция (5) учитывает требование минимизации дисперсии дохода кредитного портфеля. Поэтому решение задачи (5)-(7) позволит уменьшить риск получить доход в размере меньшем, чем ожидается.

Задача формирования кредитного портфеля

В данной работе предлагается обобщенная постановка задачи формирования кредитного портфеля для случая системы банков (филиалов банка). Препятствием при решении задачи является большое число альтернатив, из которых нужно выбрать оптимальный вариант. В случае *m* кредитных запросов и *n* банков, число вариантов размещения запросов в кредитном портфеле составляет n^m. При большом количестве запросов анализ вариантов точными методами не возможен ввиду значительной трудности вычислений. Задача формирования кредитного портфеля является задачей линейного программирования с булевскими переменными. Она относится к классу NP - трудных, так как содержит в качестве частного случая многомерную задачу о рюкзаке. Для таких задач необходимо разрабатывать приближенные методы, среди которых выбирается лучший по точности и быстродействию.

Предлагаемая задача формирования кредитного портфеля состоит в следующем. Пусть *m* - количество кредитных запросов; *n* - количество банков; Q_i - размер i-го займа; D_{ij} - доход j-го банка после выполнения i-го запроса; $\overline{D}_{ij}$ - ожидаемое значение D_{ij}; $\sigma_{ij} = (D_{ij} + Q_i)\sqrt{P_i(1-P_i)}$; B_j - кредитный ресурс j-го банка. Пусть $X_{ij} = 1$, если i-й запрос выполняется j-м банком, иначе $X_{ij} = 0$. Задача имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\overline{D}_{ij}-\sigma_{ij})X_{ij}/B_j \to \max \tag{8}$$

$$X_{ij} \in \{0,1\},\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \text{i=1...m} \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i X_{ij} \le B_j \ \text{ j=1...n} \tag{10}$$

Необходимо найти матрицу размещения кредитных запросов *X*, обеспечивающую максимум целевой функции (8) при ограничениях (9), (10). В задаче максимизируется ожидаемый суммарный доход банков с учетом риска неплатежеспособности заемщиков. Для рационального использования кредитных ресурсов банков целесообразно минимизировать остатки этих ресурсов после формирования портфеля. Поэтому в задаче максимизируется отношение $(\overline{D}_{ij}-\sigma_{ij})/B_j$. Условие $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$ гарантирует, что кредитный запрос будет выполнен одним из банков.

Для решения задачи предлагается «жадный» метод, состоящий из двух этапов. На первом этапе находятся для i-го запроса те банки, которые имеют необходимый кредитный ресурс. На втором этапе, среди найденных банков определяется банк с наибольшим значением $(\overline{D}_{ij}-\sigma_{ij})/B_j$ и запрос направляется в этот банк. Временная сложность метода - $O(mn)$ [3].

Расчет кредитного ресурса банка

Если кредитные ресурсы банков не ограничены, то размещение очередного запроса не зависит от размещения предыдущего запроса и матрица размещений представляет собой систему независимых векторов (матроид). Известно [4], что строго точное решение задачи на матроиде определяется с помощью жадного метода. Если кредитные ресурсы банков ограничены, то жадный метод находит лишь приближенное решение задачи формировании кредитного портфеля. Относительную погрешность метода можно вычислить по формуле $Q: (M - A)/M$, где M - максимально возможное решение задачи (решение задачи на матроиде), A - приближенное решение задачи, получаемое жадным методом. Чрезмерно большой запас кредитных ресурсов экономически невыгоден. Поэтому важной задачей, возникающей при формировании кредитного портфеля, является выбор оптимального кредитного ресурса банка, который обеспечивает минимальную погрешность решения задачи формирования кредитного портфеля. В данной статье предложены формулы для расчета кредитного ресурса банка, обеспечивающего решение задачи с заданной погрешностью.

Пусть объемы займов и кредитные ресурсы банков являются целыми величинами. Обозначим: m - количество кредитных запросов; n - количество банков; Q_i - размер i-го займа; B_j - кредитный ресурс j-го банка. Пусть $X_{ij} = 1$, если i-й запрос выполняется j-м банком, иначе $X_{ij} = 0$, $U_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i X_{ij}$, $SQ = \sum_{i=1}^{m} Q_i$, $SB = \sum_{j=1}^{n} B_j$.

Распределение m кредитных запросов среди n банков возможно, если $\sum_{j=1}^{n} B_j \ge \sum_{i=1}^{m} Q_i$. Аналогичным свойством в теории комбинаторного анализа обладают разбиения чисел [5].

Разбиением числа *SQ* на *m* частей является сумма $\sum_{i=1}^{m} Q_i$, разбиением числа *SB* на *n* частей является сумма $\sum_{j=1}^{n} B_j$. Разбиение *SQ* вложимо в разбиение *SB*, если части разбиения *SQ* можно так сгруппировать в *n* групп (каждая часть входит ровно в одну группу), что после сложения всех частей каждой группы, получится *n* чисел $U_1, U_2, ..., U_n$ таких, что $U_j \le B_j$, j=1,2,…,n.

Таким образом, условие возможности распределения *m* кредитных запросов среди *n* банков совпадает с условием вложения разбиения *SQ* в разбиение *SB*. Поэтому для оценки качества распределения кредитных запросов можно использовать экстремальные свойства разбиений чисел, доказанные в работе [6]:

Утверждение 1. Если SB_{opt} - наименьшее *SB*, при котором каждое разбиение *SQ* на *m* частей, вложимо в каждое разбиение *SB* на *n* частей, то

$$SB_{opt} = \max\{n \cdot SV - mn + 1, SV\} \qquad (11)$$

Формула (11) позволяет определить минимальный кредитный ресурс, обеспечивающий строго точное решение задач распределения *m* кредитных запросов среди *n* банков.

Утверждение 2. Если SB_p - наибольшее *SB*, при котором для каждого разбиения *SQ* на *m* частей, найдется разбиение, которое не вложимо в разбиение *SB* на *n* частей, то

$$SB_p = (SV /]SV/m[+ n - 1) \times]SV/m[\qquad (12)$$

Формула (12) позволяет определить максимальный кредитный ресурс, который не обеспечивает решение задач распределения *m* кредитных запросов среди *n* банков.

Пусть банки имеют одинаковый кредитный ресурс *B=SB/n*, $B_p = SB_p / n$, $B_{opt} = SB_{opt} / n$.

Согласно утверждениям 1 и 2, зависимость относительной погрешности распределения кредитных запросов от кредитных ресурсов банков имеет вид, показанный на рисунке 1. Если $B \ge B_{opt}$, то задачи распределения кредитных запросов среди банков принадлежат оптимальной зоне - любая задача решается строго точно (*Q=0*). Если $B \le B_p$, то задачи распределения кредитных запросов среди банков принадлежат запретной зоне - не всякая задача может быть решена (*Q=1*). Если $B_p < B < B_{opt}$, то задачи распределения файлов принадлежат переходной зоне - любая задача может быть решена приближенно (0<Q<1).

Пусть необходимо распределить файлы так, чтобы относительная погрешность распределения не превышала допустимой величины q. Для решения этой задачи нужно найти такое значение R, что кредитный ресурс $B_q = SB_p / n + R$ обеспечивает распределение кредитных запросов среди банков с погрешностью не более q. Решение задачи следует из построений, показанных на рисунке 1:

$$R = (1 - q) \cdot (SB_{opt} - SB_p) / n$$

$$B_q = SB_p / n + (1 - q) \cdot (SB_{opt} - SB_p) / n .$$

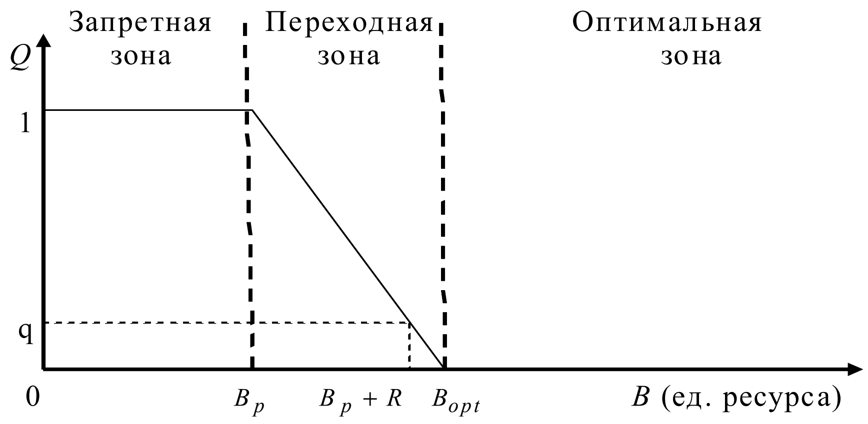

Рисунок 1 - Зависимость величины Q от значения B

Выводы

В статье решается важная практическая задача, состоящая в создании оптимального кредитного портфеля. Существует большое число кредитных запросов и небольшое количество банков. Разработан «жадный» метод ее решения. Выполнен расчет необходимого кредитного ресурса для оптимального распределения кредитных запросов среди банков с использованием экстремальных свойств разбиений чисел. Применение предложенных в статье формул позволит подобрать кредитный ресурс таким образом, чтобы задача распределения кредитных запросов могла бы решаться с заданной относительной погрешностью. В статье показано, что относительная погрешность Q решения задачи распределения кредитных запросов зависит от кредитного ресурса B по формуле: $Q = \begin{cases} 1, B \le B_p \\ 1 - B/(B_{opt} - B_p), B_p < B < B_{opt} \\ 0, B \ge B_{opt} \end{cases}$, где $B_p = SB_p / n$, $B_{opt} = SB_{opt} / n$. Значение SB_{opt} вычисляется по формуле (11), значение SB_p вычисляется по формуле (12).

Список литературы

1. Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці. Київ: ЦУЛ, 2003. – 202 с.

2. Колоколова О.В. Оптимизационное моделирование кредитного портфеля. Интернет-ресурс. - Режим доступа : www/ URL: http://www.hedging.ru/publications/522

3. Бельков Д.В., Текучев В.Е. Метод формирования оптимального кредитного портфеля./ Интернет-ресурс. - Режим доступа: www/ URL: http://agroak.poltava.ua/np/publ.html.

4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Москва: Мир, 1985. – 512 с.

5. Баранов В.И. Применение методов комбинаторного анализа при проектировании алгоритмов управления распределением памяти ЭВМ. //Программирование, № 4. – 1985. – С. 33-38.

6. Стечкин Б.С. Экстремальные свойства разбиения чисел. //Доклады АН СССР, № 4. – 1982. – С. 833-836.