УДК 004.021

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ С КОНТРОЛЕМ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩИХ ИНТЕРВАЛОВ

С.В. Иваница, А.В. Меркулов

Донецкий национальный технический университет
isv@cs.dgtu.donetsk.ua, andrew4444@ukr.net

Рассмотрены подходы к вычислению интервальных полиномов с целью оптимизации результирующих интервалов. Предложено два метода (дифференцирования и замены интервала) для предотвращения получения «шума» в процессе интервальных вычислений. Рассмотрены результаты работы методов на примере расчета интервальных полиномов 2-й и 5-й степени.

Общая постановка проблемы

В последние годы наблюдается повышение интереса к интервальному анализу, как средству для реализации точных вычислений при проведении расчетов на электронных вычислительных машинах (ЭВМ). Поскольку в ЭВМ с конечной разрядной сеткой невозможно точное представление вещественных чисел, то результат каждого достаточно сложного расчета содержит некоторую ошибку (ошибку округления), обусловленную погрешностями округления входных данных и промежуточных результатов. Интервальный анализ как научное направление сформировался относительно недавно, в основном как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ, обусловленный тем, что во многих вычислительных задачах возникла потребность не только вычисления приближенных решений, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям [1].

Однако для сложных задач применение интервального анализа часто дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерной длины получаемых интервалов, поскольку в ряде случаев оценки точности оказываются на порядок хуже, чем реально достигаемая точность результатов [2, 3].

Чтобы проиллюстрировать данную ситуацию, приведем простой пример. Рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = x - x, \qquad (1)$$

которая для любого значения x в пределах множества действительных чисел R принимает нулевое значение. Однако число можно представить не только одним значением (точкой на числовой оси), а и в виде множества числовых значений, которое задается его крайними границами. В таком случае данное число — интервальное (определенное на множестве интервалов действительных чисел IR), а его крайние границы — левая (меньшая) и правая (большая) границы интервала. Все арифметические операции над такими числами образуют класс интервальных арифметических операций, которые оперируют границами интервалов-операндов [4]. При переходе к интервальным вычислениям функция (1) примет вид интервальной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где аргумент $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ — интервальное число с границами x_1 (левая) и x_2 (правая), причем $x_1 \le x_2$. Тогда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = [x_1, x_2] - [x_1, x_2] = [-|x_2 - x_1|, |x_1 - x_2|]. \qquad (2)$$

Таким образом, результирующий интервал $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ имеет ненулевую длину при $x_1 \ne x_2$, и, следовательно, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \ne 0$. Однако, исходя из (1) $f(x) = x - x = 0$. Потеря точности произошла из-за того, что в выражении $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}$ оба операнда не являются независимыми друг от друга, так как они равны. Аналогично, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \blacklozenge \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, где $\blacklozenge$ — некоторая арифметическая операция, реальный выходной интервал заведомо будет уже, чем $[g_1, g_2] \blacklozenge [h_1, h_2]$, т. к. $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — функции от одной и той же интервальной переменной.

Верификация значения интервальных функций методом дифференцирования

Рассмотрим некоторую интервальную функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, определенную на всех точках интервала $\boldsymbol{x} = [x_-, x_+]$, т. е. непрерывную и дифференцируемую на рассматриваемом участке $\boldsymbol{x}$. Фактически

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_-, f_+] = [\boldsymbol{f}_{\min}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_{\max}(\boldsymbol{x})], \qquad (3)$$

где f_-, f_+ — минимум и максимум функции $\boldsymbol{f}$ на области $[x_-, x_+]$. Если все коэффициенты — обычные действительные числа, то задачу нахождения точного (верифицированного) интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_-, f_+]$ можно решить, используя значения производной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на участке $[x_-, x_+]$.

Очевидно, что для нахождения экстремумов функции следует найти корни производной данной функции на области определения $\boldsymbol{x} = [x_-, x_+]$ и сравнить значения функции в точках x_-, x_+ и нулях производной. Среди перечисленных значений выбираются максимум и минимум — это и есть границы области значений функции для данного x. Алгоритм работы метода дифференцирования приведен на рис. 1.

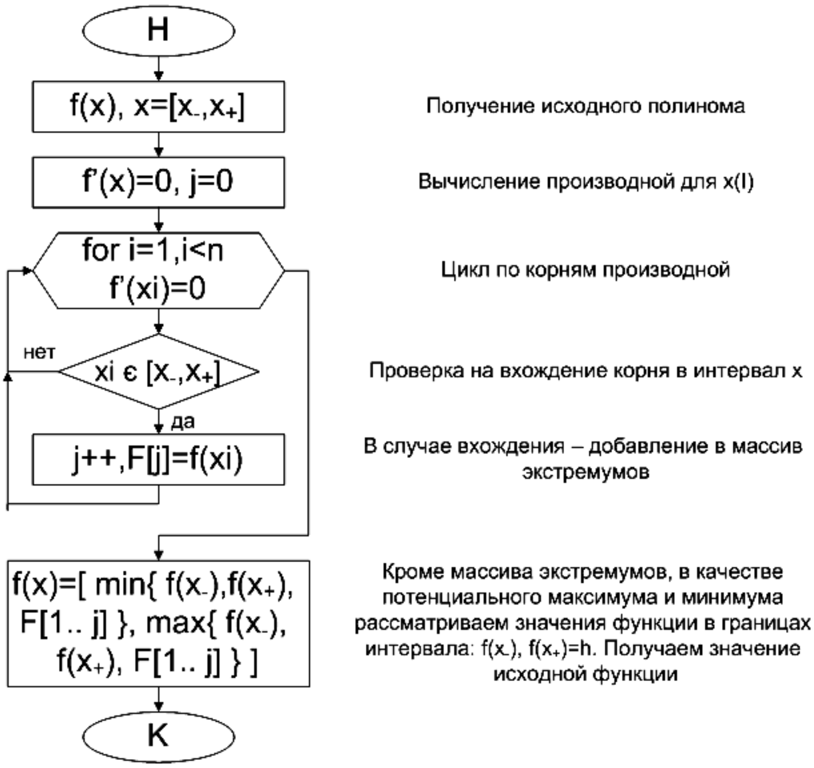

Рисунок 1 — Алгоритм верификации методом дифференцирования

Для полиномов такой подход очевиден и легко реализуем. Но для остальных функций подобный подход имеет очевидные слабые места, даже несмотря на то, что математически он полностью верен. Во-первых, допущения, которые мы приняли для $f(x)$ (определенность, непрерывность, дифференцируемость) в общем случае не обязаны выполнятся. Во-вторых, даже в случае, если допущения выполнены и возможна выборка производной, для некоторых функций процесс взятия производной будет более трудоемким, чем само вычисление результирующего интервала. В-третьих, даже если производную мы посчитали, нужно еще найти ее корни численно (иначе никак), а известны сложные уравнения, решить которые численно невозможно, т. к. из-за специфических особенностей функции, можно получить совершенно неверный ответ. Если организовать просчет решения производной с интервальными аргументами, то может возникнуть проблема верификации еще одного интервала, т. е. опять нужно считать производную (если это возможно) и т. д. В итоге, процесс верификации можно производить бесконечно и так и не достичь приемлемого результата. Для подобных «тяжелых» функций выгодна их аппроксимация на входном интервале $\boldsymbol{x}$ полиномом с любой необходимой точностью, и далее с ним работать. Это сразу снимает весь комплекс проблем, но достоверность решения будет соответствовать достоверности аппроксимации функции.

Введение интервальных коэффициентов $\boldsymbol{a}_i$ в полином $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x})$ добавляет новые проблемы к получению верифицированных значений. Очевидно, что в таком случае любой действительный корень производной будет интервалом. В таком случае функция $\boldsymbol{f}(x_i)$, где x_i — корень производной, нуждается в верификации. Сделать это невозможно, поскольку $x_i = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_1)$, где $\boldsymbol{a}_i$, $i = n, n–1, \ldots, 0$, $n\in \boldsymbol{N}$ — коэффициенты $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, но x_i — точечное значение. Таким образом,

$$\boldsymbol{f}(x_i) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_0), \qquad (4)$$

однако $\boldsymbol{g}$ представлено не в виде функции, что лишает смысла весь процесс верификации.

Верификация значения интервальных функций методом замены

Для верификации интервальных функций можно использовать замену. Выразим интервальную переменную через единичный интервал $\boldsymbol{I} = [0, 1]$:

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2] = [0, 1]\cdot(x_2 - x_1) + x_1 = \boldsymbol{I}\cdot \mathrm{d} + x_1,$$

где $\mathrm{d} = x_2 - x_1$ — длина интервала $\boldsymbol{x}$.

Таким образом, полином $\boldsymbol{f}(a_i, \boldsymbol{x}) = a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x + a_0$ принимает вид

$$\boldsymbol{f}(a_i, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}) = a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x_1 + a_0 + \boldsymbol{g}(\mathrm{d}, x_1, \boldsymbol{I}). \qquad (5)$$

Единичный интервал $\boldsymbol{I}$ удобен тем, что при возведении в степень, он не расширяется и не сужается. Однако при возведении в степень единичного интервала справедливо выражение $\boldsymbol{I}^n \neq \boldsymbol{I}$, хоть границы этих интервалов и совпадают. Очевидно, что для $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство $x^n < x$. Таким образом, для преобразованного выражения все равно необходимо использовать производную. Однако получившееся выражение лучше в плане удобства входного интервала и четкого разделения на действительную и интервальную часть.

Для полиномов с действительными коэффициентами данный метод позволяет получить такие же результаты, что метод дифференцирования, но он хуже в том плане, что требует избыточных преобразований. Зато для полинома с интервальными коэффициентами, эти преобразования оправдывают себя, т.к. они переносят независимые интервалы в свободный член. Таким образом, длина интервала не увеличивается в такой же мере, как в предыдущем методе, что позволяет получить более оптимизированный выходной интервал. Алгоритм работы данного метода приведен на рис. 2. Данный алгоритм легко применим и для функций нескольких переменных $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \boldsymbol{N}$. В этом случае для каждой переменной вводятся свои собственные единичные интервалы, $\boldsymbol{Ix}_1, \boldsymbol{Ix}_2, \ldots, \boldsymbol{Ix}_m$, т. к они независимы друг от друга, после чего вычисление сводится к приведенному алгоритму.

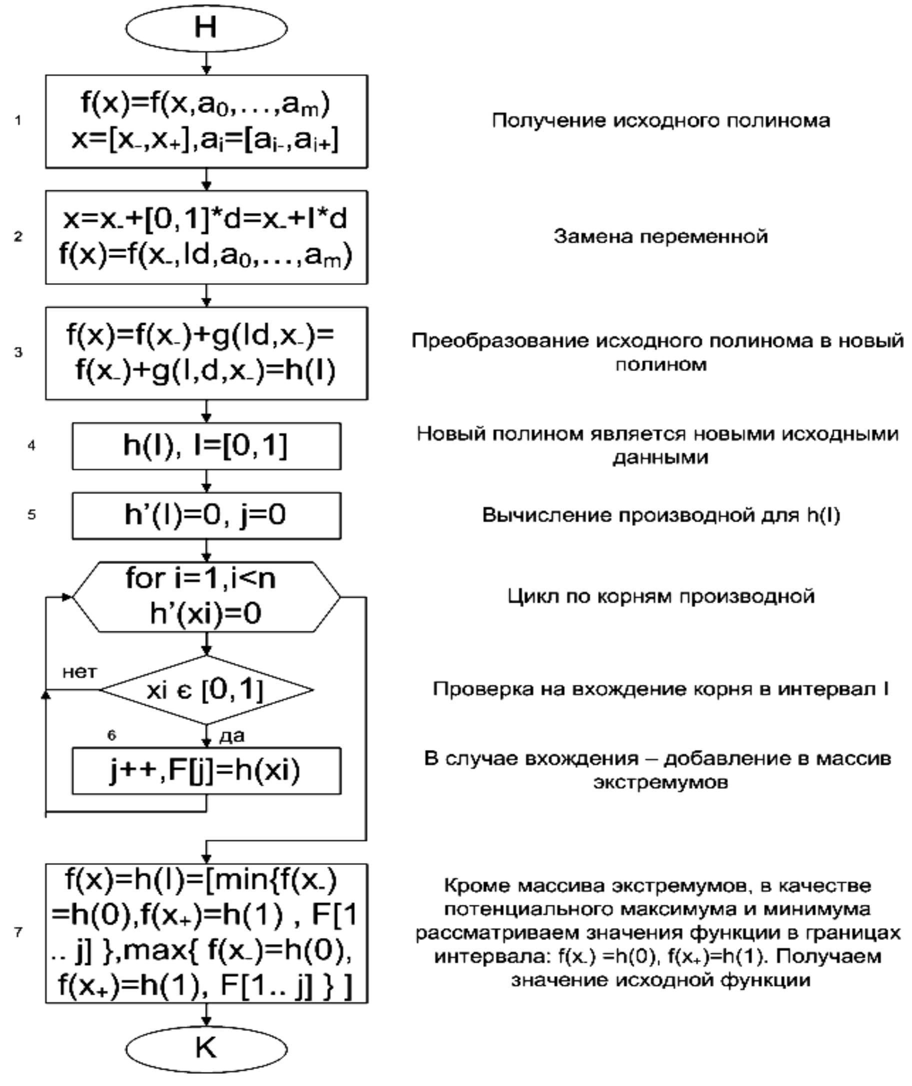

Рисунок 2 — Алгоритм верификации методом замены

Проверка эффективности предложенных методов

В поддерживающей интервальные вычисления системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 7.0 была проведена проверка эффективности верификации интервала на примере интервальных полиномов второй и пятой степени:

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^5 - 5\boldsymbol{x}^4 + 4\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

В интервальной арифметике результирующий интервал функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ вычисляется следующим образом:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\min(f(x)), \max(f(x))] \text{ при } x \in \boldsymbol{x}.$$

Однако при таких вычислениях наблюдается неконтролируемое увеличение длины интервала. На рис. 3 показаны результаты вычисления функции (6) для интервалов различной длины в виде прямоугольных областей (светлые области — результаты вычисления функции средствами интервальной математики, темные области — с помощью метода дифференцирования). Числовые результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 — результаты вычисления функции $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ с указанием длины результирующих интервалов

i	Входной интервал $\boldsymbol{x}_i$	Получение результирующего интервала $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$			
		средствами интервальной математики		с помощью метода дифференцирования	
1	[0.7, 1.4]	[–1.26, 0.91]	$d_1 = 2.17$	[–0.56, 0.21]	$d_1 = 0.77$
2	[0.3, 0.6]	[–0.06, 0.51]	$d_2 = 0.62$	[0.21, 0.25]	$d_2 = 0.04$
3	[–0.4, 0.2]	[–0.56, 0.2]	$d_3 = 0.76$	[–0.56, 0.16]	$d_3 = 0.72$

На рис. 4 показаны результаты вычисления функции (7) для интервалов различной длины в виде прямоугольных областей при входном интервале $\boldsymbol{x}$ = [–0.1, 0.1]. Получение результирующего интервала $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$:

– средствами интервальной математики: [–0.10451, 0.11401];

– с помощью метода дифференцирования: [–0.08649, 0.10549].

Таким образом, при решении полиномов (6) и (7) были получены интервалы наименьшей длины, что, безусловно, доказывает эффективность предложенных методов.

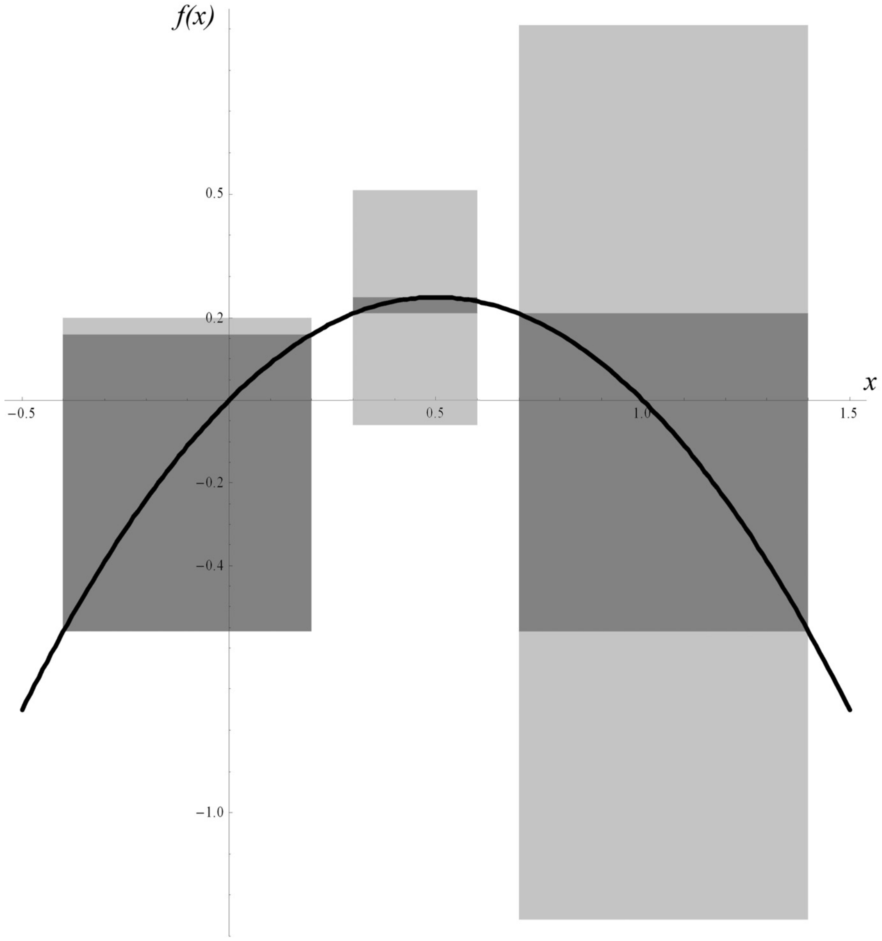

Рисунок 3 — Результат вычисления полинома $\boldsymbol{f_1(x)}$

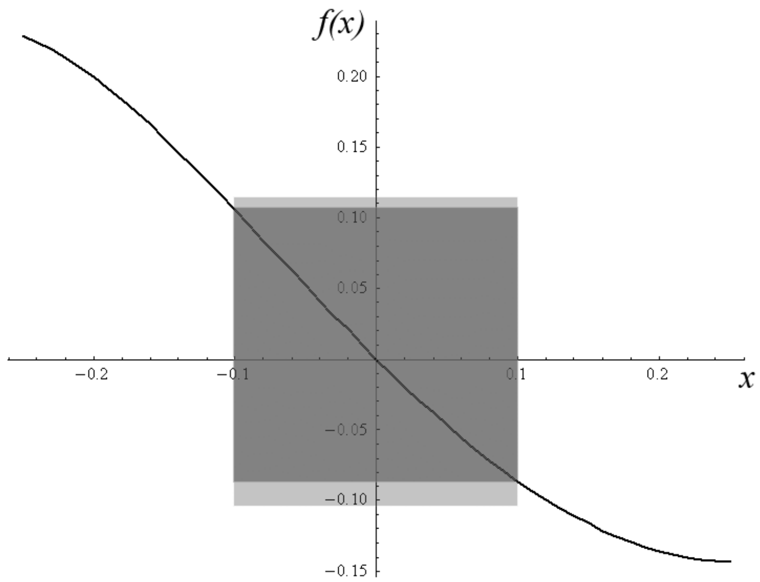

Рисунок 4 — Результат вычисления полинома $\boldsymbol{f_2(x)}$

Выводы

В настоящий момент, рамках внедрения предложенных методов в интервальный анализ, завершается разработка соответствующего программного обеспечения, которое, взаимодействуя с вычислительным ядром Wolfram Mathematica будет в состоянии, во-первых, выполнять оптимизацию промежуточных результатов на различных этапах сложных интервальных вычислений, и, во-вторых, выступать в качестве самостоятельного вычислительного средства, способного провести полный цикл вычислений с гарантированием точности и максимальным «сужением» границ результирующих интервалов.

В качестве наглядной демонстрации разрабатываемого ПО планируется решение ряда проблемных вычислительных задач, таких как, например, полином Румпа [5], правильное решение которого обычными средствами интервальной математики получить крайне затруднительно.

Список литературы

1. Аноприенко А.Я., Иваница С.В. Интервальные вычисления и перспективы их развития в контексте кодо-логической эволюции. / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2010). Выпуск 8 (168): Донецк: ДонНТУ, 2010. — С. 150-160.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. / Г.И. Марчук — М.: Наука. 1977. — 456 с.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. / А.А. Самарский — М.: Наука, 1971. — 552 с.
4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. / С.П. Шарый — Новосибирск, Институт вычислительных технологий СО РАН, 2009. — 569 с.
5. Аноприенко А.Я., Гранковский В.А., Иваница С.В. Пример Румпа в контексте традиционных, интервальных и постбинарных вычислений // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2011). Выпуск 9 (179): Донецк: ДонНТУ, 2011. С. 324–343.

Получено 12.09.2011