УДК 519.6

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ТРИАНГУЛЯРИЗАЦИИ ПОЛНОЙ МАТРИЦЫ

О.А. Дмитриева
Донецкий национальный технический университет

Большая часть предлагаемых на сегодняшний день численных методов моделирования динамических объектов, основанных на решении обыкновенных дифференциальных уравнений, базируется на классических многостадийных методах[1]. Как правило, наиболее часто употребимыми являются неявные многостадийные методы, поскольку они изначально ориентированы на решение задач со специальными свойствами: жестких, плохо обусловленных, быстро осциллирующих. Итерационные процессы, используемые для решения систем уравнений, возникающих в неявных стадийных методах, начинают быстро сходиться только после определенного числа итераций [2-3]. Поскольку планируется параллельная реализация, при которой итерационный метод одновременно применяется на всех стадиях шага, становится особенно важной быстрая сходимость с самых первых итераций. Рассмотренный в [4] вариант проведения итерационного процесса, в котором якобиан упрощен до диагональной формы, характеризуется высокими показателями параллелизма, но обладает довольно медленной начальной сходимостью.

Цель данной работы состоит в улучшении предложенного подхода так, что сходимость обеспечивается уже на начальных итерациях. Это обеспечивается за счет модификации неявных многостадийных методов таким образом, что неявные стадии являются уже параллельными, и значения в стадийных точках могут быть получены независимо друг от друга. Т.е. обмен значениями процессоры осуществляют не после каждой итерации, а после получения значения для очередной расчетной точки. Такое радикальное сокращение числа обменов достигается за счет использования треугольного приближения исходной матрицы.

При решении задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

неявным многостадийным методом

$$x_{n+1} = x_n + \tau * \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{2}$$

$k_i = f(t_n + c_i\tau, g_i);$

$$g_i = x_n + \tau * \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j, \; i = 1,2,\dots,s$$

триангуляризация исходной матрицы неявного метода

$$\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & & & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & & & a_{2s} \\
. & . & . & . & & \\
. & . & . & . & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & . & . & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2. & . & . & b_s
\end{array} \qquad (3)$$

осуществляется путем приведения последней к виду

$$\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & q_{11} & & & & & \\
c_2 & q_{21} & q_{22} & & & & \\
. & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & & & \\
c_s & q_{s1} & q_{s2} & . & . & q_{ss-1} & q_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2. & . & . & b_{s-1} & b_s
\end{array} \qquad (4)$$

Численная схема из вида (2) преобразовывается в следующую

$$x_{n+1} = x_n + \tau * \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \qquad (5)$$

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, g_i);$$

$$g_i = x_n + \tau * \sum_{j=1}^{i} q_{ij} k_j, \; i = 1,2,\dots,s.$$

Построение итерационной треугольной матрицы для интегрирования неявным стадийным методом базируется на представлении исходной матрицы *A* в виде *LDU* разложения, которое берет за основу известную *LU* – декомпозицию исходной матрицы и осуществляется выделение из матрицы *U* диагональной матрицы *D* с ведущими элементами $d_1, d_2, \dots, d_s$ по диагонали. Разложение матрицы *A* формируется в виде произведения *L* — нижней треугольной матрицы с единицами на главной диагонали, *U* — видоизмененной верхней треугольной матрицы с единицами на главной диагонали

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_1} & \dots & \frac{u_{1s}}{d_1} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{u_{2s}}{d_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и *D* — диагональной матрицы вида

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_s \end{pmatrix}.$$

Окончательное представление треугольной матрицы для итерирования

$$T_L = L - I + D$$

$$T_L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{s1} & l_{s2} & \dots & d_s \end{pmatrix}.$$

Матрица $Z_=$ также строится с использованием *LDU* разложения $A = T_L T_U$ с нижней треугольной T_L и верхней треугольной

$$T_U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_1} & \dots & \frac{u_{1s}}{d_1} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{u_{2s}}{d_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

матрицами, полученными на основе *LDU* разложения.

Разрешимость системы (5) доказывается на основе теоремы [4], утверждающей, что если $f(t, x(t))$ непрерывная и удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L функция в некоторой окрестности начальных условий и

$$M \quad {}_{1}\Sigma_{j=1}^{s}|q_{ij}|, \quad \max \qquad (6)$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\tau < \frac{1}{\mathrm{L} * \mathrm{M}}, \qquad (7)$$

то существует единственное решение системы уравнений (5), которое может быть получено итерированием. Для итерирования нелинейной системы (5) воспользуемся следующими итерациями:

$$k_i^{n+1} = f\left(t_n + c_i\tau, x_n + \tau\sum_{j=1}^{i}(q_{ij}k_i^n\right), \qquad i = 1,2,\dots,s. \qquad (8)$$

Определим вектор $K = (k_1, k_2, \dots, k_s)^T$ и введем норму

$$\|K\| = \max_{1|k_i|} i = 1,2,\dots,s.$$

Тогда (8) можно записать в виде $K = F(K)$, где

$$F_i(K) = f\left(t_n + c_i\tau, x_n + \tau\sum_{j=1}^{i}(q_{ij}k_i^n\right), \qquad i = 1,2,\dots,s. \qquad (9)$$

и

$$\|F(K)\| = \max_i |F_i(K)|,\quad i = 1,2,\ldots,s.$$

Оценим норму разности

$$\|F(K^{n+1}) - F(K^n)\| \max_i |F_i(K^{n+1}) - F_i(K^n)|.$$

Используя условие Липшица, получим

$$\|F(K^{n+1}) - F(K^n)\| \le L * \max_i \left| \tau \sum_{j=1}^{i} q_{ij} \left[(k]_i^{n+1} - k_i^n \right) \right| \le$$

$$\le L * \max_i \left(\tau \sum_{j=1}^{i} |q_{ij}| \left| k_i^{n+1} - k_i^n \right| \right) \le L\tau \left\| K^{n+1} - K^n \right\| \max_i \sum_{j=1}^{i} |q_{ij}| \le LM\tau \left\| K^{n+1} - K^n \right\|.$$

Отсюда в силу (7) следует, что

$$\|F(K^{n+1}) - F(K^n)\| \le \|K^{n+1} - K^n\|.$$

Таким образом, отображение $F(K)$ является сжимающим отображением, что обеспечивает существование и единственность решения и сходимость последовательности приближений к решению.

Приведение полной матрицы коэффициентов стадийного метода к треугольной форме с одной стороны, обеспечивает хороший параллелизм численной реализации, незначительно уступающий диагонализированной матрице, а, с другой стороны, обеспечивает быструю сходимость уже на начальных итерациях.

Список литературы

1. Хайрер Э., Ваннер. Г. Решение ОДУ. Жесткие задачи. - М.: Мир, 1999.-685с.
2. P. J. van der Houwen, B. P. Sommeijer. Iteration of Runge-Kutta Methods with Block Triangular Jacobians //Journal of Applied Mathematics and MechanicsVolume 76, Issue 7, pages 367–375, 1996
3. P. J. van der Houwen, J. J. B. de Swart. Triangularly implicit iteration methods for ODE-IVP solvers. CWI Report NM-R9510, submitted for publication 1995. P. 21.
4. Дмитриева О.А. Моделирование динамических систем адаптивными диагонально-неявными методами типа Рунге-Кутты / /Материалы Международной научно-технической конференции "Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы. ИИ-2011", пос. Кацивели, АР Крым, Украина, 19-23 сентября - Донецк: ИПИИ "Наука і освіта". -2011. - Т.1.-С46-49.

Получено 10.09.2011