

УДК 504.61

**О.А. Роговая, Н.А. Володин**Донецкий национальный технический университет, г. Донецк  
кафедра системного анализа и моделирования**О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ  
СРЕДЫ****Аннотация**

*Роговая О.А., Володин Н.А. О задаче идентификации параметров в математических моделях загрязнения окружающей среды. В работе рассмотрена новая постановка задачи идентификации параметров в уравнениях в частных производных параболического типа. На основании найденного градиента критерия качества идентификации проанализирована идентифицируемость параметров выбранной математической модели по квадратичному критерию качества.*

**Ключевые слова:** *градиент, идентификация параметров, математическая модель, критерий качества.*

**Постановка проблемы.** Проблема охраны окружающей среды является одной из важных задач науки, интерес к которой возрастает в связи с темпами технического прогресса во всем мире. На данном этапе развития цивилизации невозможно избежать выбросов загрязняющих веществ в атмосферу, однако в случае разумного использования природных ресурсов можно обеспечить безопасный уровень воздействия на атмосферу [1].

Процесс распространения промышленных выбросов происходит в результате их переноса воздушными массами и диффузии. При решении задач моделирования распространения выбросов возникают существенные трудности, связанные с тем, что математические модели содержат ряд параметров, значения которых либо не известны, либо заданы приближенно. Данные параметры могут быть получены только в результате решения задач параметрической идентификации.

Параметрическая идентификация модели – это определение оптимальных значений параметров по результатам наблюдений за функционированием объекта.

К таким задачам можно отнести:

- определение мощностей источников выбросов по результатам наблюдений в одной или нескольких точках;
- совместная идентификация мощностей источников выбросов загрязняющих веществ и коэффициента турбулентной диффузии по данным измерений концентрации в одной или нескольких точках.

Решение данных задач необходимо определять в функциональном пространстве  $L_2$ .

**Анализ литературы.** В настоящее время разработаны математические модели для исследования атмосферных процессов. В рамках этих моделей описание распространения атмосферных примесей обычно представляется двумя классами задач. Первый – это решение «прямых» задач, когда по известным характеристикам источников примеси и известным параметрам приземного слоя воздуха требуется найти поле ее концентрации. Второй – решение «обратных» задач, когда по информации о концентрации примеси, измеренной в ряде пунктов наблюдения, требуется найти мощность источника. Значительная роль в создании и развитии методов численного анализа и математического моделирования атмосферных процессов принадлежит академику Г. И. Марчуку [1].

В работе [2] рассмотрена одна из обратных задач по идентификации мгновенного источника или источника с постоянной мощностью. Для этого используется трехмерное нестационарное уравнение адвекции – диффузии. Для решения задачи было выведено вспомогательное сопряженное уравнение, которое в общем случае позволяет определить координаты и другие параметры источника.

**Цель статьи** – анализ идентифицируемости мощностей выбросов загрязняющих веществ и коэффициента турбулентной диффузии по данным измерений концентрации в одной или нескольких точках области.

**Постановка задачи исследования.** Для описания процессов распространения примесей в атмосфере может быть использовано двумерное уравнение турбулентной диффузии. В работах [1-3] задачи идентификации рассматриваются в классе постоянных функций, однако, в общем случае, эти величины необходимо рассматривать в качестве произвольных функций функционального пространства  $L_2$ . Использование постоянных функций целесообразно лишь для контроля радиационной обстановки вблизи источников повышенной опасности или при идентификации источников, осуществляющего залповый выброс в атмосферу. Для предприятий, функционирующих непрерывно, выбросы вредных веществ происходят также непрерывно и поэтому использование постоянных функций недопустимо.

В математические модели в работах [2-3] входят конвективные члены, а данные о замерах скорости ветра не могут быть получены во всех пространственно-временных точках исследуемой области. В силу этого, согласно работе [4], можно отказаться от конвективных членов в уравнении параболического типа и ввести эффективные коэффициенты. Согласно [1], максимумы диаграммы розы ветров соответствуют господствующим в данном районе ветрам, поэтому рассматриваем одномерную постановку задачи.

Далее рассмотрим задачу двухпараметрической идентификации свободного члена – мощностей источников выброса предприятий и эффективного коэффициента турбулентной диффузии по данным замеров концентраций в  $N$  точках  $C_*^i (i=1..N)$  в области  $\Omega = [x_0, x_1] \times [t_0, t_1]$ . Для описания процесса распространения примесей в атмосфере от  $N$  источников используем одномерное уравнение турбулентной диффузии с эффективным коэффициентом  $D(t)$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^N Q_i(t) \delta(x - x_*^i), \quad (x, t) \in \Omega. \quad (1)$$

Начальное и краевые условия:

$$C(t_a, x) = C_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (3)$$

Критерий качества выберем в виде:

$$J[Q_i(t), D(t)] = \sum_{i=1}^N \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} [C(x, t) - C_*^i(x, t)]^2 \delta(x - x_*^i) dx dt. \quad (4)$$

Задача формулируется следующим образом. Необходимо идентифицировать  $Q(t), D(t) \in L_2$ , доставляющие минимум функционалу  $J$ . Проанализируем идентифицируемость параметров по выбранному критерию качества. Получен градиент критерия качества  $\nabla J$ , который однозначным образом определяется через решение найденной сопряженной краевой задачи для множителя Лагранжа  $h(x, t)$ . Сопряженная задача содержит свободный

член  $2 \sum_{i=1}^N [C(x, t) - C_*^i(x, t)] \delta(x - x_*^i)$ . В силу этого, функция  $h(x, t)$  нетривиальна

в точках  $x_*^i (i=1, \dots, N)$ . Таким образом, функции  $Q(t)$  и  $D(t)$  можно определить в результате задачи минимизации функционала  $J$ .

На основе градиента  $\nabla J$  организуется направленная итерационная коррекция вектора  $\vec{u} = \{Q(t), D(t)\}$  [5-8]:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha(t) \nabla J^k. \quad (5)$$

Здесь глубина спуска на каждой итерации вдоль выбранного направления минимизации  $b^k \alpha(t) \nabla J^k(t)$  определяется числом  $b^k$  по методу:

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \leq J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, & \text{тогда повторяется предыдущая} \\ & \text{итерация, при } b^{k+1} = b_2 b^k; 0 < b_2 < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Функция  $\alpha(t)$  регулирует направление спуска и определяется из условия не более 15% первого изменения идентифицируемого вектора  $\vec{u}$  [5].

**Выводы.** В работе предложена новая постановка задачи идентификации параметров в математических моделях загрязнения окружающей среды вредными выбросами с предприятий с квадратичным критерием качества. Проанализирована идентифицируемость параметров по выбранному критерию качества. Для решения задачи предложен прямой экстремальный подход с регулируемым направлением спуска.

#### Список литературы

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – М.: Наука, 1982–315 с.
2. Панасенко Е.А. Численное исследование переноса примеси в атмосфере // Третья Всероссийская конференция молодых ученых «Фундаментальные проблемы новых технологий в 3-м тысячелетии». Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2006. С. 582 – 586
3. Колчев С.А., Ткаченко В.В. Методика консервативного прогноза распространения радиоактивной примеси в атмосфере // *Материалы 49 Научной конференции МФТИ*. М., 2008, с.112-116.
4. Бородин В.С., Володин Н.А., Толстых В.К. Идентификация параметров в моделях формирования отливок // *Процессы литья*. – 1995. - №1. – С. 96-101.
5. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами / Толстых В.К. – Донецк : Изд. «Юго-Восток», 1997. – 177 с.
6. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов / В.К. Толстых // *Инженерно-физический журнал*. – 2003. – № 2, Т. 76. – С.160-162.
7. Tolstykh V.K. Optimal control by heat flow in continuous casting steel / V.K. Tolstykh, N.A. Volodin Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany, 1996. – P. 480- 483.
8. Володин Н.А., Толстых В.К. Развитие теоретических основ оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках. – Донецк : ИПИИ «Наука і освіта». – 2008. – 132 с.