УДК 004.921

М.С. Исраелян, В.Н. Беловодский
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра компьютерных систем мониторинга

АНАЛИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ И СФЕР ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Аннотация

Исраелян М.С., Беловодский В.Н. Анализ алгебраических фракталов и сфер их применения. *Выполнен обзор известных алгебраических фракталов, а также фракталов, для построения которых используются многочлены высокой степени. Проведен анализ методов и алгоритмов их построения, которые имеют практическое применение в компьютерной графике. Приведены сферы применения фракталов.*

Ключевые слова: *алгебраические фракталы, многочлены высокой степени, методы построения, компьютерная графика, сферы применения.*

Постановка проблемы. В связи с тем, что в различных областях науки и техники возникали различные проблемы, которые не могли быть решены с помощью известных методов, на помощь в разрешении этих проблем пришли фракталы. Они позволили значительно продвинуться в решении многих значимых практических задач, благодаря чему, к примеру, в компьютерной графике был изобретён эффективный способ реализации сложных неевклидовых объектов, чьи образы похожи на природные.

Цель статьи - провести обзор известных алгебраических фракталов, а также фракталов, построение которых основано на использовании многочленов степени выше второй. Рассмотреть методы их построения и сферы практического применения.

Общие сведения. Алгебраические фракталы - это самая крупная группа фракталов [3]. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. То есть, для построения алгебраических фракталов используются итерации нелинейных отображений, задаваемых простыми алгебраическими формулами. Методов получения алгебраических фракталов несколько. Один из методов представляет собой итерационный расчет функции:

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \tag{1}$$

где Z - комплексное число, а f - некоторая функция.

Расчет данной функции продолжается до выполнения определенного условия. И когда это условие выполнится - на экран выводится точка. При этом значения функции для разных точек комплексной плоскости может иметь разное поведение:

- с течением времени стремится к бесконечности;
- стремится к 0;
- принимает несколько фиксированных значений и не выходит за их пределы;
- поведение хаотично, без каких либо тенденций.

Классические множества Мандельброта и Жюлиа. Они получаются из простейшей, с математической точки зрения, формулы (см.рис. 1):

$$Z_n = Z_{n-1}^2 + c, \qquad (2)$$

где c - комплексная постоянная и n принимает любое натуральное значение [2].

Множество Мандельброта — это множество таких точек c на комплексной плоскости, для которых итерационная последовательность при z_0 является сходящейся:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad (3)$$

То есть, это множество таких c, для которых существует такое действительное R, что неравенство $|z_n| < R$ выполняется при всех натуральных n.

Множество Жюлиа функции *f*, обозначаемое *J(f),* определяется по формуле:

$$J(f) = \partial\{z: f^{(n)} \to \infty \text{ при } n \to \infty\} \qquad (4)$$

Таким образом, множество Жюлиа функции f есть граница множества точек z, стремящихся к бесконечности при итерировании *f(z).*

Простейшее множество Жюлиа соответствует случаю $f(z)=z^2$. Так как $f^{(n)}(z) = z^{(2^n)}$, то $f^{(n)}(z) \to \infty$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $|z| > 1$. Границей этого множества, то есть множеством Жюлиа, является единичная окружность $\{z: |z| = 1\}$, которая фракталом не является, хотя в общем случае множество Жюлиа есть фрактал.

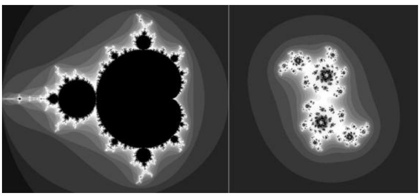

Рисунок 1 – Множества Мандельброта и Жюлиа

Множество Фату. Неформально, функция множество Фату состоит из тех значений, что все близкие значения ведут себя аналогичным образом при повторных итерациях функции. Таким образом, поведение функции f на множестве Фату «регулярно». Множество Фату обозначается *F(f).*

Области Фату получаются как области сходимости итерационных процессов некоторых рациональных отображений. Таким образом, области

Фату являются областями фрактального типа, изображения которых можно получить, используя компьютерную графику.

Фракталы – биоморфы. Термин биоморф был предложен Клиффордом Пикоувером для обозначения особым образом построенные алгебраические фракталы, внешним видом напоминающие одноклеточные организмы.

Каждый биоморф строится путем многочисленных итераций, или последовательных вычислений определенной математической функции, путем повторяющихся математических операций, как показано в следующей простейшей итерационной формуле:

$$Z_{k+1} = Z_k^n + C \quad (5)$$

На каждом шаге итерационного процесса результат предыдущего шага принимается за исходное значение переменной. Иными словами алгоритм построения биоморфов - это многократное возведения в степень комплексного числа (см.рис. 2). То есть, берется комплексное число, возводится в степень и к нему прибавляется какое-то фиксированное постоянное число. Это число тоже комплексное, подбирая их, мы можем регулировать процесс, получая самые причудливые картинки.

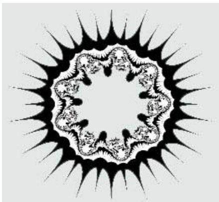

Рисунок 2 – Биоморф девятой степени

Оболочка Мандельброта. Это трёхмерный фрактал, аналог множества Мандельброта, созданный Дэниелом Уайтом и Полом Ниландером с использованием гиперкомплексной алгебры, основанной на сферических координатах [4]. Формула для n-ой степени трехмерного гиперкомплексного числа *(x,y,z)* следующая:

$$(x, y, z)^n = r^n(\cos(n\Theta)\cos(n\Phi), \sin(n\Theta)\cos(n\Phi), \sin(n\Phi)) \quad (7)$$

Для $n>3$, результатом является трехмерный фрактал. Чаще всего используется восьмая степень (см.рис. 3).

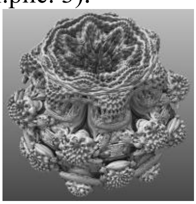

Рисунок 3 – Оболочка Мандельброта восьмой степени

Фракталы Галлея. Такие фракталы получаются, если в качестве правила для построения динамического фрактала использовать формулу Галлея для поиска приближенных значений корней функции (см.рис.4).

Метод Галлея - численный алгоритм решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$. В этом случае функция f должна быть функцией одной вещественной переменной [6]. Метод состоит из последовательности итераций, начиная с начального приближения x_0:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f^{/}(x_n)}{2[f^{/}(x_n)]^2 - f(x_n)f^{//}(x_n)} \quad (6)$$

Идея метода почти та же, что используется для рисования динамических фракталов: берем какое-нибудь начальное значение и применяем к нему много раз формулу, получая последовательность чисел.

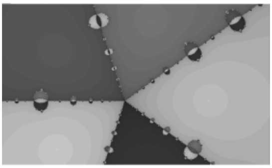

Рисунок 4 – Фрактал Галлея пятой степени

Бассейны Ньютона. Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней нелинейного уравнения *f(z)=0* алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости [5]. Для функции действительной переменной метод Ньютона часто называют методом касательных, который, в данном случае, обобщается для комплексной плоскости (см.рис.5).

Применим метод Ньютона для нахождения нуля функции комплексного переменного, используя процедуру:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{/}(z_n)} \quad (8)$$

Выбор начального приближения z_0 представляет особый интерес. Поскольку функция может иметь несколько нулей, в различных случаях метод может сходиться к различным значениям.

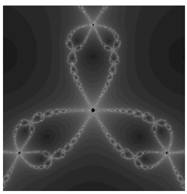

Рисунок 5 – Бассейны Ньютона

Применение. Фракталы нашли широкое применение в различных областях науки и техники [1]. Применять фрактальные изображения можно в самых разных сферах: создание обычных текстур и фоновых изображений, фантастических ландшафтов для компьютерных игр и книжных иллюстраций. Фракталы позволяют с помощью компьютерной графики создавать абстрактные композиции, реализуя сложные дизайнерские решения.

В компьютерном дизайне фракталы нашли широкое применение в создании обоев, витражей, декорировании интерьеров и экстерьеров (см.рис.6).

Рисунок 6 - Проект кухни на основе одного фрактального образца

Таким образом, фракталы могут быть полезными и целесообразно применимыми в компьютерной графике и дизайне, помогая воплощать в жизнь самые смелые и интересные идеи.

Выводы. В данной работе был проведен обзор алгебраических фракталов, а также приведены простейшие описания методов их построения и применения в различных сферах. Алгоритмы и формулы, приведенные в данной статье, имеют практическое применение в компьютерной графике.

Список литературы

1. Фракталы и их применение/ Интернет-ресурс. - Режим доступа: www/ URL: http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/6841-2013-03-15-08-38-25 - Загл. с экрана.
2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р.М. Кроновер – М.: Постмаркет, 2000. - 352 с.
3. Фракталы вокруг нас / Интернет-ресурс. - Режим доступа: www/ URL: http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/ - Загл. с экрана.
4. Оболочка Мандельброта/ Интернет-ресурс. - Режим доступа: www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Оболочка_Мандельброта - Загл. с экрана.
5. Бассейны Ньютона/ Интернет-ресурс. - Режим доступа: www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Бассейны_Ньютона - Загл. с экрана.
6. T.R. Scavo and J.B. Thoo. On the geometry of Halley’s method. American Mathematical Monthly./ 1995, pp. 417–426.