УДК 517.9

©2010. **О.А. Рудакова**

О Г-КОМПАКТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ, НЕ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ГРАДИЕНТОВ ФУНКЦИЙ

Рассматривается последовательность интегральных функционалов, определенных на переменных весовых пространствах Соболева. Значения функционалов не зависят от градиентов функций из областей определения этих функционалов. Устанавливается теорема о выборе из рассматриваемой последовательности функционалов подпоследовательности, Г-сходящейся к некоторому интегральному функционалу, определенному на "предельном" весовом соболевском пространстве.

Ключевые слова: *интегральные функционалы, вырождение,* Г*-сходимость,* Г*-компактность.*

Введение. Вопрос о Г-компактности последовательностей интегральных функционалов, определенных на переменных весовых пространствах Соболева, в случае, когда значения функционалов зависят от градиентов функций из областей определения функционалов и не зависят от самих функций, изучен в [1]–[3].

В настоящей заметке устанавливается теорема о Г-компактности последовательности интегральных функционалов, определенных на тех же переменных весовых пространствах Соболева, что рассмотрены в работах [1]–[3]. Однако изучается случай, когда значения функционалов не зависят от градиентов функций из областей определения этих функционалов. Этот случай существенно проще случая, рассмотренного в вышеуказанных работах. Вместе с тем результаты настоящей статьи представляют и самостоятельный интерес, и интерес в связи с получением теорем, сочетающих результаты работы и теоремы о Г-компактности последовательностей функционалов и сходимости их точек минимума, установленные в [1]–[4].

1. Предварительные сведения. Введем используемые в работе функциональные пространства.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$. Пусть ν — неотрицательная функция на Ω, причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω,

$$\nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Через $L^p(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω. $L^p(\nu, \Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega)} = \left(\int_\Omega \nu|u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Через $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu, \Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu, \Omega)$.

$W^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int_\Omega \nu|u|^p\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nu|D_i u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$. $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с индуцированной нормой пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Аналогично пространствам, введенным выше, определим функциональные пространства, соответствующие областям Ω_s.

Пусть $s\in\mathbb{N}$. Через $L^p(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех измеримых функций $u:\Omega_s\to\mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω_s. $L^p(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех функций $u\in L^p(\nu,\Omega_s)$ таких, что для любого $i\in\{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u\in L^p(\nu,\Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_s} \nu|D_i u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Через $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ обозначим множество всех сужений на Ω_s функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

Заметим, что если $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и $s\in\mathbb{N}$, то $u|_{\Omega_s}\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

Введем обозначение: если $s\in\mathbb{N}$, то q_s — отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)\quad q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 1. Пусть для любого $s\in\mathbb{N}$ I_s — функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, I — функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Г-сходится к функционалу I, если выполняются условия:

1) для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ существует последовательность $w_s\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|w_s-q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)}=0$, $\lim\limits_{s\to\infty} I_s(w_s)=I(u)$;

2) для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и любой последовательности $u_s\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|u_s-q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)}=0$, имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(u_s)\geqslant I(u)$.

Это определение введено в работе [1]. Оно является одной из реализаций общего определения Г-сходимости функционалов с переменной областью определения, данного в [5].

2. Основные результаты. Пусть $c > 0$, $\psi \in L^1(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$ в Ω, и пусть g — функция на $\Omega \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори и такая, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\eta \in \mathbb{R}$

$$|g(x,\eta)| \leqslant c\nu(x)|\eta|^p + \psi(x). \tag{1}$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\;G_s$ — функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$

$$G_s(u) = \int_{\Omega_s} g(x,u)\,dx.$$

Предложение 1. *Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, и пусть имеем последовательность функций $v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такую, что*

$$\lim_{s\to\infty} \|v_s - q_s v\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0. \tag{2}$$

Тогда

$$G_s(v_s) - G_s(q_s v) \to 0. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (3) не верно. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad |G_{s_k}(v_{s_k}) - G_{s_k}(q_{s_k}v)| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

В силу суммируемости функций ψ, $\nu|v|^p$ и $g(x,v)$ на Ω существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $E \subset \Omega$, $\operatorname{meas} E \leqslant \delta$, имеем

$$\int_E (\psi + \nu|v|^p + |g(x,v)|)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p+1}(c+1)}.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ определим функцию $\tilde{v}_s : \Omega \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\tilde{v}_s(x) = \begin{cases} v_s(x), & \text{если } x \in \Omega_s, \\ v(x), & \text{если } x \in \Omega \setminus \Omega_s. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{\tilde{v}_s\} \subset L^p(\nu,\Omega)$ и в силу (2)

$$\|\tilde{v}_s - v\|_{L^p(\nu,\Omega)} \to 0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что существует возрастающая последовательность $\{m_j\} \subset \{s_k\}$ такая, что $\tilde{v}_{m_j} \to v$ почти всюду в Ω. Следовательно, $g(x,\tilde{v}_{m_j}) \to g(x,v)$ почти всюду в Ω. Тогда в силу теоремы Егорова (см., например, [6, с. 269]) существует измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такое, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega') \leqslant \delta$ и

$$g(x,\tilde{v}_{m_j}) \to g(x,v) \text{ равномерно в } \Omega'. \tag{6}$$

Ясно, что
$$\int_{\Omega\setminus\Omega'}(\psi+\nu|v|^p+|g(x,v)|)\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{p+1}(c+1)}.\tag{7}$$
Ввиду (5) и (6) существует $j'\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant j'$,
$$2^{p-1}c\int_{\Omega}\nu|\tilde v_{m_j}-v|^p\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{4},\tag{8}$$
$$\int_{\Omega'}|g(x,\tilde v_{m_j})-g(x,v)|\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.\tag{9}$$
Зафиксируем $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant j'$, и положим $s=m_j$. Заметим, что вследствие включения $\tilde v_s\in L^p(\nu,\Omega)$ и (1) функция $g(x,\tilde v_s)$ суммируема на Ω. Учитывая определения функции $\tilde v_s$ и функционала G_s, получаем
$$|G_s(v_s)-G_s(q_sv)|\leqslant\int_{\Omega}|g(x,\tilde v_s)-g(x,v)|\,dx\leqslant\int_{\Omega'}|g(x,\tilde v_s)-g(x,v)|\,dx\\+\int_{\Omega\setminus\Omega'}|g(x,\tilde v_s)|\,dx+\int_{\Omega\setminus\Omega'}|g(x,v)|\,dx.\tag{10}$$
Кроме того, в силу (1) имеем
$$\int_{\Omega\setminus\Omega'}|g(x,\tilde v_s)|\,dx\leqslant 2^{p-1}c\int_{\Omega}\nu|\tilde v_s-v|^p\,dx+2^{p-1}(c+1)\int_{\Omega\setminus\Omega'}(\nu|v|^p+\psi)\,dx.\tag{11}$$
Используя (7)–(9) и (11), из (10) выводим, что
$$|G_s(v_s)-G_s(q_sv)|\leqslant\frac{3\varepsilon}{4}.$$
Последнее неравенство противоречит (4). Полученное противоречие доказывает, что утверждение (3) справедливо. Предложение доказано. □

Далее, введем обозначение: если $\sigma\in L^\infty(\Omega)$, то G^σ — функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ такой, что для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$
$$G^\sigma(u)=\int_{\Omega}\sigma g(x,u)\,dx.$$

Предложение 2. *Пусть $\{r_m\}\subset\mathbb{N}$ — возрастающая последовательность. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\}\subset\{r_m\}$ и функция $\sigma:\Omega\to\mathbb{R}$ такие, что $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ в Ω и для любых $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и последовательности $v_s\in\widetilde{W}{}^{1,p}_0(\nu,\Omega_s)$, удовлетворяющих условию $\|v_s-q_sv\|_{L^p(\nu,\Omega_s)}\to 0$, имеем $G_{s_j}(v_{s_j})\to G^\sigma(v)$.*

Доказательство. Пусть для любого $s\in\mathbb{N}$ $\chi_s:\Omega\to\mathbb{R}$ — характеристическая функция множества Ω_s. Очевидно, что $\{\chi_s\}\subset L^2(\Omega)$ и последовательность $\{\chi_s\}$

ограничена в $L^2(\Omega)$. Отсюда, учитывая рефлексивность пространства $L^2(\Omega)$ и то, что $0 \leqslant \chi_s \leqslant 1$ для любого $s \in \mathbb{N}$, выводим, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{r_m\}$ и функция $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ такие, что $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ в Ω и $\chi_{s_j} \to \sigma$ слабо в $L^2(\Omega)$. Отсюда, в свою очередь, получаем, что

$$\forall\, \varphi \in L^1(\Omega) \quad \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \chi_{s_j}\varphi\, dx = \int_\Omega \sigma\varphi\, dx. \tag{12}$$

Пусть теперь $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и имеем последовательность $v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такую, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \to 0$. Так как $g(x,v) \in L^1(\Omega)$, то в силу (12) имеем $G_{s_j}(q_{s_j}v) \to G^\sigma(v)$. Отсюда и из предложения 1 вытекает, что $G_{s_j}(v_{s_j}) \to G^\sigma(v)$. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 2 вытекает такой результат.

Теорема 1. *Существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ такие, что $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ в Ω и последовательность $\{G_{s_j}\}$ Γ-сходится к функционалу G^σ.*

Автор выражает благодарность А.А. Ковалевскому за полезные рекомендации.

1. *Ковалевский А.А., Рудакова О.А.* О Г-компактности интегральных функционалов с вырожденными интегрантами // Нелинейные граничные задачи. – 2005. – Вып. 15. – С. 149–153.
2. *Рудакова О.А.* О коэрцитивности интегранта Г-предельного функционала последовательности интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – **15**. – С. 171–180.
3. *Рудакова О.А.* О Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 99–115.
4. *Kovalevsky A., Rudakova O.* Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. – 2009. – **1**, № 4. – P. 517–559.
5. *Ковалевский А.А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 6–9.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 490 с.

O.A. Rudakova

On Γ-compactness of a sequence of integral functionals whose values do not depend on gradients of functions.

We consider a sequence of integral functionals defined on variable weighted Sobolev spaces. Values of the functionals do not depend on the gradients of functions belonging to the domains of definition of these functionals. We prove the theorem on the selection from the given sequence of functionals of a subsequence which Γ-converges to an integral functional defined on a "limit" weighted Sobolev space.

Keywords: *integral functionals, degeneration, Γ-convergence, Γ-compactness.*

О.А. Рудакова

Про Г-компактність послідовності інтегральних функціоналів зі значеннями, що не залежать від градієнтів функцій.

О Г-компактности последовательности интегральных функционалов

Розглядається послідовність інтегральних функціоналів, які визначені на змінних вагових просторах Соболєва. Значення функціоналів не залежать від градієнтів функцій із областей визначення цих функціоналів. Встановлюється теорема про вибір із розглядуваної послідовності функціоналів підпослідовності, що Г-збігається до деякого інтегрального функціоналу, визначеного на "граничному" ваговому соболєвському просторі.

Ключові слова: *інтегральні функціонали, виродження,* Г-*збіжність,* Г-*компактність.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`rudakova@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 20.11.2010