УДК 519.173

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДЕРЕВА ШТЕЙНЕРА В ОРТОГОНАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

А.И. Ольшевский

Донецкий национальный технический университет
кафедра программного обеспечения интеллектуальных систем

В работе рассматриваются алгоритмы построения дерева Штейнера в ортогональной метрике. В результате анализа определен перечень модулей системы и предложен алгоритм функционирования системы. Приводится результаты численных экспериментов.

Введение

Важными оптимизационными задачами на графах являются задачи построения кратчайших связывающих деревьев. Для минимизации суммарной длины ребер графа в коротких связующих деревьях предложено при соединении множества деревьев использовать дополнительные вершины (деревья Штейнера) [1]. Задача Штейнера имеет практические приложения – конструирование интегральных электронных схем. Данная задача является класса NP-полных. Все известные алгоритмы, дающие точное решение, не могут быть использованы в САПР через неприемлемую временную сложность. Это обстоятельство послужило стимулом для разработки многочисленных эвристических алгоритмов.

1. Математическая постановка задачи

Построение топологии проводиться с помощью решения задачи Штейнера, которая заключается в нахождении кратчайшего дерева T, которое покрывает задана подмножество $P \subset X$ вершин графа G. В нашем случае вершины графа – это узлы, граф G- начальная сеть, а дерево T - результат проектирования топологии сети в ортогональной метрике с дополнительными вершинами Штейнера (точки пересечения полученной сетки линий).

2 Анализ алгоритмов

Существует множество алгоритмов построения минимальных связующих деревьев с дополнительными вершинами в ортогональной метрике. Рассмотрим алгоритмы и выясним какой более применим к нашей задачи:

− простой эвристический алгоритм построения дерева;

− эвристическая процедура построения дерева, основанная на «столбах» Штейнера;

− генетический алгоритм.

Известно, что для простого эвристического алгоритма построения ДШ в ортогональной метрике при соединении трех вершин единственная точка Штейнера g находится внутри прямоугольника, связывающего эти точки, причем координаты этой точки определяются как среднее арифметическое координат трех точек. Длина связывающих ребер определяется по формуле:

$$\sum_{i=1}^{3} d(qi, ni) = \frac{1}{2}\prod(R(n1, n2, n3)),$$

где П(R) – длина периметра прямоугольника, построенного на трех вершинах.

Простой эвристический алгоритм построения ДШ, обладающий линейной сложностью O(αn), где n – число вершин. Последовательность шагов алгоритма:

1) выбираем первые три вершины из n точек, на которых должно быть построено ДШ (вершины выбираем с умом);

2) строим оптимальный фрагмент ДШ для этих трех вершин;

3) выбираем следующие по порядку 3 вершины, одна из которых принадлежит уже построенному фрагменту;

4) на этих вершинах строится второй оптимальный фрагмент дерева;

5) процесс повторяется до тех пор, пока не будет построено дерево, связывающее все заданные вершины.

Пример ДШ представлен на рисунке 1.

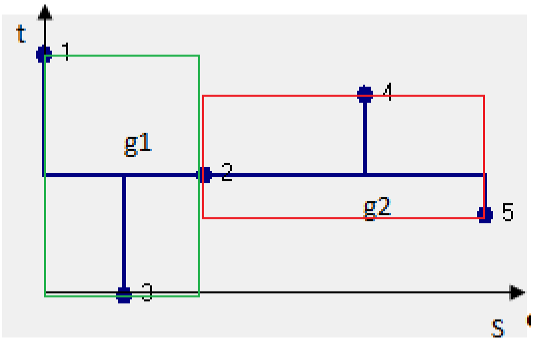


Рисунок 1– Результаты построения ДШ в ортогональной метрике

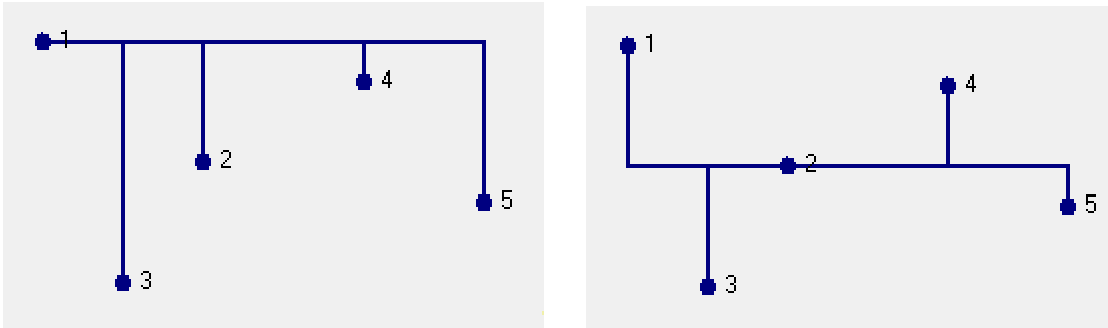
Для точек 1, 2, 3 точка Штейнера g1 определяется:
$n_1=(S_1=0,\ t_1=6)$, $n_2=(S_2=4,\ t_2=3)$, $n_3=(S_3=2,\ t_3=0)$
$S_{g1}=S_{cp}=(0+4+2)/3=2$
$t_{g1}=t_{cp}=(6+3+0)/3=3$
Для точек 2, 4, 5 точка Штейнера g2 определяется:
$n_2=(S_2=4,\ t_2=3)$, $n_4=(S_4=8,\ t_4=5)$, $n_5=(S_5=10,\ t_5=2)$
$S_{g2}=S_{cp}=8$
$t_{g2}=t_{cp}=3$
Длина связывающих ребер:
$L(G)=0.5\Pi_1(R(1,2,3)) + 0.5\Pi_2(R(2,4,5))=19$

Алгоритм является субоптимальным, и при оптимальности каждого фрагмента полное ДШ может и не быть оптимальным. При наличии достаточных вычислительных ресурсов или распараллеливании алгоритма можно строить оптимальные деревья на трех вершинах и, выполнив перебор на них, получить оптимальное (или квазиоптимальное) дерево [2].

Рассмотрим эвристическую процедуру построения дерева, основанную на «столбах» Штейнера.

Из каждой вершины, которую требуется соединить с помощью ДШ, проводится вертикальный столб Штейнера, а затем из остальных вершин проводятся перпендикулярные отрезки на этот столб.

Например, два из пяти горизонтальные столбы Штейнера, представлены на рисунке 2.



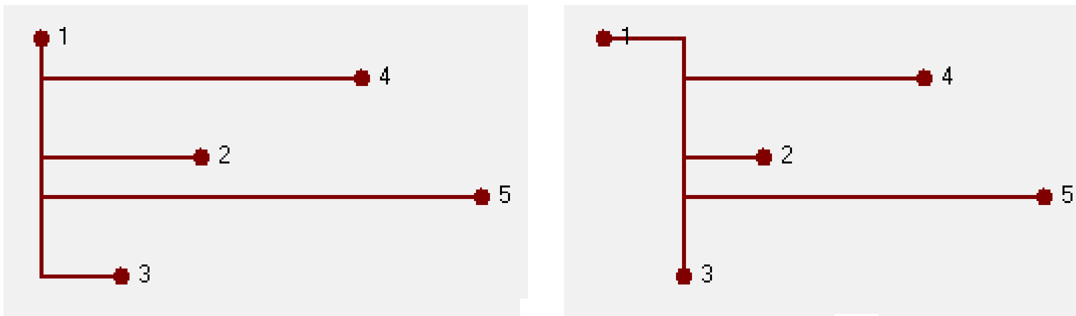
P_1^1 P_2^1

Рисунок 2 – Горизонтальные столбы Штейнера

Горизонтальные столбы можно проводить в любом месте плоскости, но в прямоугольнике, ограничивающем заданные вершины. Аналогично строится и вертикальные столбы Штейнера (см. рис 3).

В связи с возможностью быстрого получения набора различных деревьев Штейнера представляется возможным использовать схему генетического поиска для прямоугольных деревьев Штейнера.

Генетические алгоритмы (ГА) – есть поисковые алгоритмы основанные на механизмах натуральной селекции и натуральной генетики[3].



P_1^2 P_3^2

Рисунок 3 – Вертикальные столбы Штейнера

Эволюция популяции – чередование поколений, в которых хромосомы изменяют свои гены, т.о. чтобы каждая новая популяция наилучшим образом приспосабливалась к новой (внешней) среде.

3 Реализация алгоритма

Для минимизации суммарной длины ребер в графе кратчайшее связывающее дерево (КСД) предложено использовать модификационный алгоритм, основанный на эвристической процедуре построения дерева на «столбах» Штейнера и генетическом алгоритме.

При этом сначала строится популяция (набор решений):

$P_1=\{P_1^1, P_2^1, \ldots, P_k^1\}$, любой элемент которой представляет закодированное дерево Штейнера.

Далее производится сортировка популяции (по длине КСД) и селекция родительских пар. Затем используются собственно ГА.

Так в нашем примере необходимо построить ДШ для пяти вершин, используя горизонтальные столбы построения дерева (см. рис 2).

Кодирование каждого элемента проводим так: вправо (П), вверх (В), вниз (Н). Например:

P_1^1: 1ПТ$_1$Н3ПТ$_2$Н2ПТ$_3$Н4ПН5,

P_2^1: 1НПТ$_1$Н3ПТ$_2$Н2П4ПН5,

Выстраиваем деревья (горизонтальные столбы) по возрастанию их длин:

P_2^1 L=19 P_1^1 L=24 P_5^1 L=24 P_3^1 L=26 P_4^1 L=26

Затем, аналогично построим деревья используя вертикальные столбы Штейнера и также отсортируем их в порядке возрастания длинны.

P_3^2 L=22 P_2^2 L=24 P_4^2 L=26 P_1^2 L=30 P_5^2 L=32

Берем двух лучших представителей: P_2^1 и P_3^2. И выполняем скрещивание с помощью операторов сегрегации. Результат соответствует следующему дереву Штейнера (L=19), изображенному на рисунке 4:

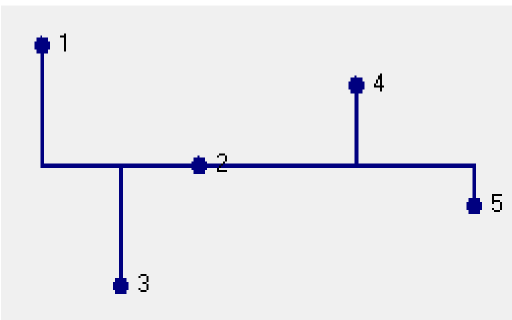


Рисунок 4 – Дерево Штейнера после скрещивания при помощи операторов сегрегации

Выводы

В результате анализа алгоритмов построения дерева Штейнера для случая ортогональной метрики, определен перечень модулей системы и предложен алгоритм функционирования системы. Разработанный модификационный алгоритм строит дерево Штейнера, что позволяет сократить время вычисления при том же качестве получаемых решений. Практическая значимость работы определяется программной реализацией с возможностью пошагого построения дерева Штейнера и анализа результата в графическом виде.

Список литературы

1. Алгоритм построения минимальных связывающих деревьев с дополнительными вершинами (деревьев Штейнера) для случая прямоугольной метрики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Network.htm.

2. РыженкоН. В. Алгоритм построения минимальных связывающих деревьев с дополнительными вершинами (деревьев Штейнера) для случая прямоугольной метрики. Труды ИМВСРАН, 2002.

3. Курейчик В. М. Генетические алгоритмы и их применение. Таганрог: ТРТУ, 2002. – 242 с.