УДК 621.311:681.5.015.8

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КУМУЛЯТИВНОГО ЗВЕНА

А.А. Булгаков
Донецкий национальный технический университет

В статье рассмотрено кумулятивное звено, которое реализует принцип кумулятивного усреднения в моделях оценки электромагнитной совместимости (ЭМС). Найдены частотные характеристики звена. Выявлена не монотонность убывания амплитудно-частотной функции кумулятивного звена.

При оценке показателей качества электроэнергии используется кумулятивный принцип [1]. Это простейшая оценка, которая производится по величине и длительности контролируемого параметра.

Согласно кумулятивному принципу модель оценки воздействия электромагнитной помехи содержит кумулятивное звено [2]. Кумулятивное звено выполняет усреднение помехи или реакции объекта на помеху на некотором интервале времени и. Усреднение может выполняться непрерывно или дискретно.

В статье ставится задача определить частотные характеристики кумулятивного звена.

Результирующий кумулятивный процесс на выходе звена будет определяться выражением

$$y_{\text{и}}(t) = \frac{1}{\text{и}} \int_{t-\text{и}}^{t} y(t)dx. \tag{1}$$

Рассмотрим подробнее выражение (1)

$$x_{\text{и}}(t) = \frac{1}{\text{и}} \int_{t-\text{и}}^{t} x(t)dt = \frac{1}{\text{и}} \left[\int_{t-\text{и}}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{t} x(t)dt \right] = \frac{1}{\text{и}} \left[\int_{0}^{t} x(t)dt - \int_{0}^{t-\text{и}} x(t)dt \right]. \tag{2}$$

Из выражения (2) следует, что кумулятивное звено не является элементарным. Оно состоит из пропорционального звена с коэффициентом пропорциональности $1/\text{и}$, двух интегрирующих и звена запаздывания на и. Последнее обуславливает верхний предел $t-\text{и}$ в интеграле. Структурная схема кумулятивного звена приведена на рисунке 1.

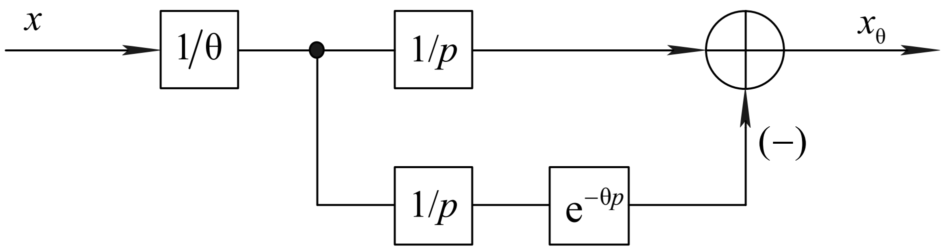

Рис.1 – Структурная схема кумулятивного звена

Согласно (2) передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p)=\frac{1}{\text{и}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\text{и}p}\right)=\frac{1}{\text{и}p}\left(1-\mathrm{e}^{-\text{и}p}\right). \quad (3)$$

Переходную функцию можно определить по передаточной функции, используя преобразование Лапласа. Однако в данном случае проще это сделать, используя смысл кумулятивного звена. Оно выполняет усреднение входного процесса на интервале $(t-\text{и},t)$. По определению переходная функция – переходный процесс системы, вызванный единичным ступенчатым воздействием при нулевых начальных условиях [3]. Кумулятивное звено будет выполнять усреднение единичной функции. Этот процесс проиллюстрирован на рисунке 2 смещением интервала $(t-\text{и},t)$. Тогда очевидным становится, что при $t\ge\text{и}$ $h_{\text{и}}(t)=1$, а при $0\le t\le\text{и}$ $h_{\text{и}}(t)=t/\text{и}$. Объединив оба условия, получим переходную функцию кумулятивного звена

$$h_{\text{и}}(t)=\begin{cases} t/\text{и} & \text{при } 0\le t\le\text{и},\\ 1 & \text{при } t\ge\text{и}. \end{cases} \quad (4)$$

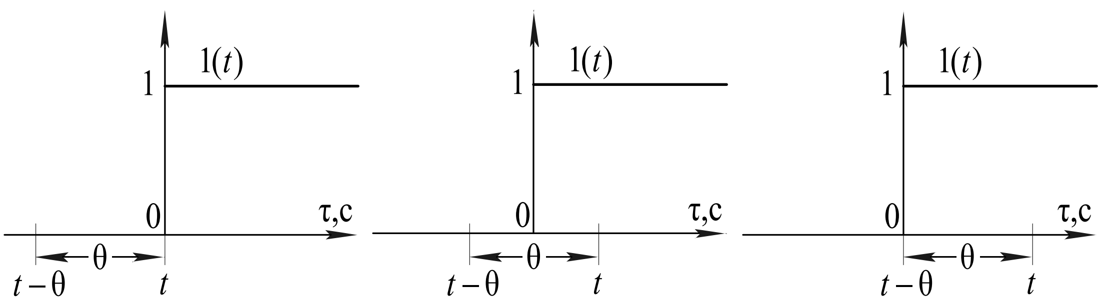

Рис.2 – Усреднение единичной функции на интервале $(t-\text{и},t)$

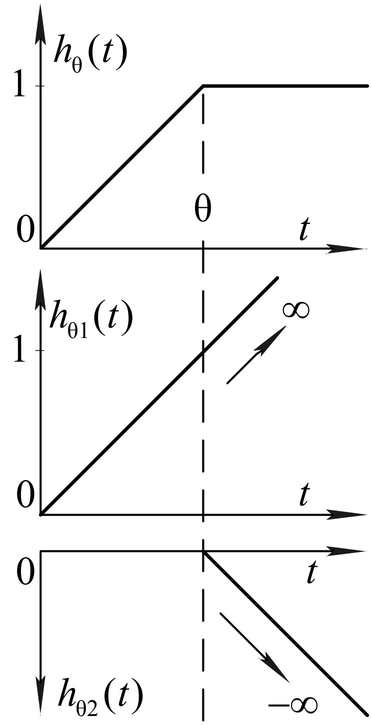

Рис. 3 – Переходная функция кумулятивного звена

Переходная функция кумулятивного звена показана на рисунке 3. Результирующая переходная функция $h_{\text{и}}(t)$ представляется в виде суммы двух элементарных функций $h_{\text{и}1}(t)$ и $h_{\text{и}1}(t)$, с учетом коэффициента пропорциональности $1/\text{и}$.

Весовая функция – реакция на воздействие в виде дельта функции при нулевых начальных условиях, может быть определена как производная от переходной функции

$$g_{\text{и}}(t) = h'_{\text{и}}(t)\,.$$

Весовая функция кумулятивного звена

$$g_{\text{и}}(t) = \begin{cases} 1/\text{и} \ \text{ при } \ 0 \le t \le \text{и}, \\ 0 \quad \text{при} \quad t \ge \text{и}. \end{cases} \qquad (5)$$

Определим амплитудно-частотную (АЧФ) и фазочастотную (ФЧФ) функции кумулятивного звена. В выражении для передаточной функции (3) выполним подстановку $p \to j\text{щ}$, получая выражение для амплитудно-фазовой функции

$$W(j\text{щ}) == \frac{1}{\text{и}j\text{щ}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\text{и}j\text{щ}}\right) = -j\frac{1}{\text{ищ}}(1 - \cos\text{щи} + j\sin\text{щи}) =$$

$$= \frac{1}{\text{ищ}}\left[\sin\text{щи} - j\left(1 - \cos\text{щи}\right)\right] = U(\text{щ}) + jV(\text{щ})\,.$$

АЧФ:

$$A_{\text{и}}(\text{щ}) = \frac{1}{\text{щи}}\sqrt{\sin^2\text{щи} + \left(1 - \cos\text{щи}\right)^2} = \frac{1}{\text{щи}}\sqrt{\sin^2\text{щи} + 1 - 2\cos\text{щи} + \cos^2\text{щи}}\,.$$

Учтем, что $\sin^2\text{щи} + \cos^2\text{щи} = 1$, тогда

$$A_{\text{и}}(\text{щ}) = \frac{1}{\text{щи}}\sqrt{2 - 2\cos\text{щи}} = \frac{\sqrt{2}}{\text{щи}}\sqrt{1 - \cos\text{щи}} = \frac{\sqrt{2}}{\text{щи}}\sqrt{2\sin^2(\text{щи}/2)}\,.$$

По смыслу АЧФ $A_{\text{и}}(\text{щ}) \ge 0$, тогда

$$A_{\text{и}}(\text{щ}) = \frac{\sqrt{2}}{\text{щи}}\sqrt{2\sin^2(\text{щи}/2)} = \frac{2}{\text{щи}}\left|\sin(\text{щи}/2)\right| = \frac{\left|\sin(\text{щи}/2)\right|}{\text{щи}/2}\,. \qquad (6)$$

На рисунке 4 представлен график АЧФ. По рисунку видно, что АЧФ кумулятивного звена убывает не монотонно.

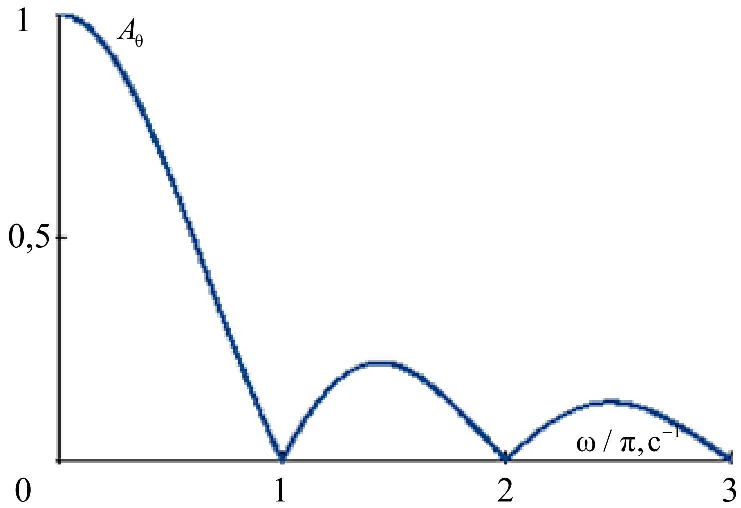

Рис.4 – АЧФ кумулятивного звена при и = 1с

Для определения ФЧФ следует рассматривать участки, границы которых определяют точки с АЧФ = 0. Учитывая это, рассмотрим отдельно 2 участка.

Участок 1: $0 \le \text{щи} \le \text{р}$.

На этом интервале $V(\text{щ}) < 0$ и $U(\text{щ}) > 0$, что соответствует IV-му квадранту.

$$\text{ц}_{\text{и}}(\text{щ}) = \operatorname{arctg}\frac{-(1-\cos\text{щи})}{\sin\text{щи}} = -\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\text{щи}}{\sqrt{1-\cos^2\text{щи}}} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\text{щи}}{\sqrt{(1-\cos\text{щи})(1+\cos\text{щи})}} = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos\text{щи}}{1+\cos\text{щи}}} = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\sin^2\text{щи}/2}{2\cos^2\text{щи}/2}} =$$

$$= -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\text{щи}/2) = -\text{щи}/2.$$

Таким образом

$$\text{ц}_{\text{и}}(\text{щ}) = -\text{щи}/2 \text{ при } 0 \le \text{щи} \le \text{р}. \qquad (7)$$

Определим величину ФЧФ на границах участка.

При $\text{щи} = 0, \rightarrow \text{ц}_{\text{и}}(0) = 0$, а при $\text{щи} = \text{р}, \rightarrow \text{ц}_{\text{и}}(\text{щ}) = -\text{р}/2$.

Участок 2: $\text{р} \le \text{щи} \le 2\text{р}$.

На этом интервале $V(\text{щ}) < 0$ и $U(\text{щ}) < 0$, что соответствует III-му квадранту. В соответствии с [3].

$$\text{ц}_{\text{и}}(\text{щ}) = \pm k\text{р} - \operatorname{arctg}\frac{-(1-\cos\text{щи})}{\sin\text{щи}}.$$

Здесь $k = -1$. Тогда

$$ц_и(щ) = -р + щи/2 \text{ при } р \le щи \le 2р. \tag{8}$$

Определим величину ФЧФ на границах участка.

При $щи = р, \ \rightarrow \ ц_и(щ) = -р/2$, а при $щи = 2р, \ \rightarrow \ ц_и(щ) = 0$.

Объединив условия (7) и (8) получим ФЧФ кумулятивного звена (9):

$$ц_и(щ) = \begin{cases} -щи/2 & \text{при} \quad 0 \le щи \le р, \\ -р + щи/2 & \text{при} \quad р \le щи \le 2р. \end{cases} \tag{9}$$

График ФЧФ – это периодическая треугольная функция с периодом $2р$. Она изображена на рисунке 5.

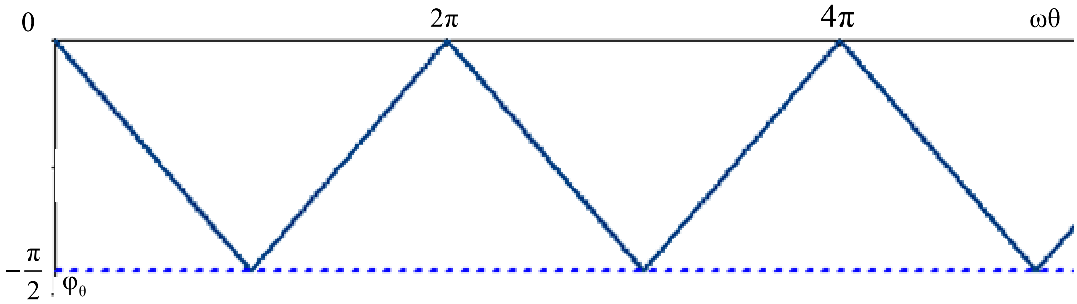

Рис.5 – ФЧФ кумулятивного звена

Выводы

АЧФ кумулятивного звена убывает не монотонно. Это не соответствует физическому смыслу оценки показателей ЭМС, которым при монотонном изменении входной помехи ЭМС также следует изменяться монотонно. В качестве альтернативы кумулятивному принципу можно предложить использовать в моделях оценки ЭМС инерционное звено, характеристики которого изменяются монотонно.

Перечень ссылок

1. ГОСТ 13109-97. Межгосударственный стандарт. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. с 01.01.2000.

2. Кузнецов В.Г., Куренный Э.Г., Лютый А.П. Электромагнитная совместимость. Несимметрия и несинусоидальность напряжения. – Донецк: Норд-Пресс, 2005. – 250 с. с ил.

3. Воронов А.А., Бабаков Н.А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по специальности «Автоматика и телемеханика» в 2-х ч. Ч1 Теория линейных система автоматического управления, 2е изд. перераб. и доп. − М.: Высш. школа 1986. − 367 с.