

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ SLAM-АЛГОРИТМА

Семежев Н., студент; Солопекина А.А., студент; Киселёв В.В., доц., к.т.н.

(Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия)

Термин Slam является аббревиатурой для одновременной локализации и картографии. Изначально был разработан Хью Дюррант-Вайтом и Джинном Джей Леонардом на основе более ранней работы Смита, Селфа и Чизмана. Дюррант-Уайт и Леонард первоначально назвали его SMAL, однако, позже данное название было изменено, для того чтобы улучшить его влияние. SLAM связан с проблемой построения карты в незнакомой окружающей обстановке мобильным роботом и в то же время для навигации окружающей среды, используя карту.

SLAM состоит из нескольких частей: определение ключевых точек, объединение данных, вычисление положения, обновления положения и обновления ключевых точек.

Реализация SLAM состоит из нескольких этапов. Его цель состоит в использовании среды для обновления положения робота. Поскольку одометрия робота (по которой определяют положение робота) часто ошибочна, мы не можем полагаться непосредственно только на нее. Поэтому мы используем ультразвуковое сканирование окружающей среды, чтобы исправить положение робота. Это достигается путем выделения ключевых точек из окружающей среды. EKF (расширенный фильтр Калмана) является базой для SLAM алгоритма. Он отслеживает оценку неопределенности в положении робота, а также неопределенность в ключевых точках окружающей среды.



Рисунок 1 - Блок-схема SLAM-алгоритма

Когда положение изменилось, потому что робот движется, неопределенность, относящаяся к новой позиции робота, будет обновлена в EKF, используя уточнение положения. Ключевые точки определяются из окружающей среды исходя из новой позиции

робота. Затем робот пытается связать эти ключевые точки с ключевыми точками, которые были ранее. Повторное наблюдение ключевых точек затем используется для обновления положения робота.

После того как было найдено положение применяется рекурсивный фильтр, для того чтобы снизить уровень шума в полученном положении робота (иногда называют уточнённое положение). Ключевые точки, которые ранее не были замечены добавляются в ЕKF, как новые ориентиры, поэтому они могут быть повторно наблюдаемые. Для обнаруженных ориентиров, у которых находится соответствия, нужно выполнить уточнение положения, используя рекурсивный фильтр.

### **ЕКФ (Расширенный фильтр Калмана)**

Расширенный фильтр Калмана (Extended Kalman Filter –ЕКФ) – нелинейная версия фильтра Калмана.

Расширенный фильтр Калмана используется для оценки состояния (положения) робота из данных ключевых точек. Он, как правило, описывается в терминах оценки состояний. Поэтому, фильтр не имеет обновление карты, которая была бы нужна, когда используется ЕKF для SLAM.

### **Краткие сведения по матрицам.**

**Матрица X** является, вероятно, одной из самых важных в системе вместе с ковариационной матрицей. Она содержит в себе позиции робота. Кроме того она содержит в себе положения каждого ориентира.

**Матрица ковариации P** (ковариация двух величин представляет собой меру того, как сильно коррелирует их две переменные) содержит ковариации на позиции робота, ковариации ориентиров, ковариацию между положением робота и ориентиров.

A			E		...	...		
					...	...		
					...	...		
D			B		...	...	G	
					...	...		
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
			F		...	...	C	
					...	...		

Рисунок 2 - Общий вид матрицы P

Первая ячейка A содержит ковариации на положении робота, ячейка B – ковариации первых ориентиров, C – ковариационная матрица для последних ориентиров, D состоит из ковариации положения робота и первым ориентиром, E – ковариация между первым ориентиром и роботом. F состоит из ковариации между последним ориентиром и первым, в то время как G состоит из ковариации первого ориентира и последнего.

Первоначально, пока робот не обнаружил каких-либо ориентиров, то ковариационная матрица P включает в себя только матрицу A.

**Коэффициент усиления Калмана K** вычисляется для того чтобы узнать как мы будем доверять наблюдаемым ориентирам и к тому же что мы хотим получить от полученного нового знания. Если мы можем видеть, что робот должен переместить на 10 см вправо, в соответствие с ориентирами, мы используем коэффициент усиления Калмана, чтобы найти насколько правильно мы скорректируем позицию, это может быть 5 см, потому что мы не доверяем ориентирам полностью, но лучше найти компромисс между положением и коррекцией ориентиров. Данную процедуру можно выполнить, используя неопределенность наблюдаемых ориентиров с мерой качества измерения положения робота. Если диапазон

прибора для измерения плох, то коэффициент усиления Калмана будет маленьким, если диапазон измерений является хорошим, то коэффициент усиления будет большим.

**Якобиан модели измерений Н** тесно связан с моделью измерений, поэтому давайте для начала рассмотрим именно ее. Модель измерений определяет, как вычислить ожидаемые расстояния и азимут измерений (наблюдаемые ключевые точки). Это делается с помощью следующей формулы, которая обозначается h:

$$\begin{bmatrix} \text{расстояние} \\ \text{азимут} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(\lambda_x - x)^2 + (\lambda_y - y)^2} - v_r \\ \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_y - y}{\lambda_x - x}\right) - \theta + v_\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Где  $\lambda_x$  - это координата ключевой точки по оси x,  $x$  - это координата местоположения робота по оси x, аналогично для  $\lambda_y$  и y. Тетта это угол поворота робота. Это предоставит нам информацию об предполагаемом местоположении ключевой точки. Якобиан этой матрицы по отношению к x, y и тетта, Н, является:

$$\begin{bmatrix} \frac{x - \lambda_x}{r} & \frac{y - \lambda_y}{r} & 0 \\ \frac{\lambda_y - y}{r^2} & \frac{\lambda_x - x}{r^2} & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Н показывает нам насколько сильно изменились расстояние и азимут по сравнению с изменениями x, y, и тетта. Первый элемент первой строки это изменение диапазона по отношению к изменениям по оси x. Второй элемент это то же самое, но только по отношению к изменениям по оси y. Последний элемент это изменение по отношению к углу тетта, углу поворота робота. Конечно же, это значение является нулевым, т.к. расстояние не меняется с поворотом робота. Вторая строка предоставляет ту же информацию, за исключением того, что это изменение местоположения для ключевой точки. Это содержание обычной матрицы Н для регулярной ЕКФ оценки состояния.

**Якобиан предсказанной модели: А**, так же как и Н, сильно зависит от предсказанной модели, поэтому давайте вначале рассмотрим именно ее. Предсказанная модель определяет как вычислять ожидаемую позицию робота по заданной предыдущей и управления. Это делается с использованием следующей формулы, обозначенной f:

$$f = \begin{bmatrix} x + \Delta t \cos \theta + q \Delta t \cos \theta \\ y + \Delta t \sin \theta + q \Delta t \sin \theta \\ \theta + \Delta \theta + q \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Где x и y это местоположение робота, тетта – угол поворота,  $\Delta t$  - изменение скорости движения и q – ошибка. Мы используем изменение местоположения напрямую со значений измеряемой одометрии, поэтому мы получаем напрямую изменения параметров x, y и тетта включая шумы обработки, которые будут описаны в дальнейшем:

$$\begin{aligned} x + \Delta x + \Delta x \cdot q \\ y + \Delta y + \Delta y \cdot q \\ \theta + \Delta \theta + \Delta \theta \cdot q \end{aligned} \quad (4)$$

В любом случае мы используем линеаризованную модель для вычисления якобиана А, получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta t \sin \theta \\ 0 & 1 & \Delta t \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Вычисления данной матрицы аналогичны вычислениям матрицы  $H$ , за исключением того, что теперь у нас на одну строку больше для угла поворота робота. Поскольку он используется только для прогнозирования местоположения робота, он так же не будет влиять на ключевые точки. Как можно заметить из первой матрицы, выражение  $-\Delta t \sin \theta$  есть ни что иное как  $-\Delta y$ , а  $\Delta t \cos \theta$  -  $\Delta x$ . Таким образом, мы можем просто использовать наши обозначения:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 1 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

### Особые Якобианы SLAM-алгоритма $J_{xr}$ и $J_z$

Когда используется SLAM-алгоритм присутствуют не некоторые Якобианы, которые используются лишь в этом алгоритме. Это конечно же интеграция новых функций, что является единственным отличием от регулярной оценки состояния с использованием EKF. Первым является  $J_{xr}$ . В основном он схож с якобианом предсказанной модели, кроме того, что мы начинаем без угла поворота. Это якобиан предсказания ключевых точек, который не включает в себя угол поворота тетка, по отношению к состоянию робота  $[x, y, \text{тетта}]$  от  $X$ :

$$J_{xr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta t \sin \theta \\ 0 & 1 & \Delta t \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Якобиан  $J_z$  так же является якобианом предсказанной модели для ключевых точек, но в этот раз по отношению к  $[расстоянию, азимуту]$ . Поэтому получим:

$$J_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \Delta\theta) & -\Delta t \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) \\ \sin(\theta + \Delta\theta) & \Delta t \cdot \cos(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

### Шум обработки: $Q$ и $W$

Процесс обработки предполагает наличие гауссова шума пропорционального управлению,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta t$ . Обозначим шум как  $Q$ , которая является матрицей размера 3 на 3. Как правило, она рассчитывается путем умножения некоторых гауссовых выборок  $C$  с  $W$  и  $W$  транспонированной:

$$\begin{aligned} W &= [\Delta t \cos \theta \quad \Delta t \sin \theta \quad \Delta\theta]^T \\ Q &= WCW^T \end{aligned} \quad (9)$$

$C$  является мерой точности одометрии. Ее значение должно быть установлено исходя из одометрии робота, и как правило проще всего устанавливается экспериментально с подстройкой значений.

В большинстве статей шум процесса обработки сигнала обозначается как  $Q$  или как  $WCW^T$ . Понятие  $C$  в основном не используется, но нам она необходима, чтобы показать два подхода.

### Шум измерений: $R$ и $V$

Устройство измерения расстояния так же имеет гауссов шум пропорциональный расстоянию и азимуту. Он рассчитывается как  $VRV^T$ .  $V$  это просто единичная матрица размером 2 на 2.  $R$  это так же матрица размером 2 на 2 со значениями лишь на диагонали. В левом верхнем углу мы имеем расстояние,  $r$ , умноженное на некоторые константы  $c$  и  $d$ .