

УДК 622.242.2+624.046.4

Ф. Л. Шевченко, Ю. В. Петтик, С. Н. Царенко

*ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», Донецк, Украина*

## Проблемы расчета буровых вышек на устойчивость

В работе рассматривается актуальная задача расчета буровых вышек на устойчивость. Существенный интерес вызывает расчет пространственной стержневой вышки на устойчивость при загрузке ее технологической нагрузкой и собственным весом

Ключевые слова: буровая вышка, устойчивость, жесткость при изгибе, дифференциальное уравнение, прочность, функции Бесселя, критическая сила

Особенностью задачи об устойчивости буровой вышки, в отличие от существующих расчетов, является ее конструктивное решение в виде пространственной стержневой системы. Она состоит из четырех плоских ферм, которые образуют конструкцию в виде усеченной пирамиды, при этом нагрузкой на вышку нужно считать не только сосредоточенную силу на верхней площадке, но также собственный вес вышки.

Задача об устойчивости стержня постоянной жесткости от нагрузки, приложенной к верхнему сечению, и первые попытки расчета устойчивости однородного стержня, сжатого собственным весом, были выполнены еще Л. Эйлером (в XVIII в.), а затем Лагранжем во второй половине XIX века. Но такие задачи долгое время оставались невостребованными в инженерной практике. С появлением конструкций в виде стержневых систем для металлических мостов, пилонов и других длинномерных сооружений вызвало необходимость использования ранее выполненных разработок Эйлера главным образом для расчета устойчивости сплошных однородных невесомых стержней. И лишь в конце XIX века, А. Гринхил решил задачу устойчивости сплошных стержней переменного сечения. В начале прошлого века академик А. Н. Динник [1, 2] обратил серьезное внимание на эти задачи и привел конкретные результаты вычисления критических нагрузок для сплошных стержней переменного сечения различной конфигурации.

Расчеты устойчивости пространственных стержневых конструкций на воздействие внешних сосредоточенных сил приведены в работах С.П. Тимошенко [3] в начале прошлого века и в фундаментальных исследованиях А. С. Вольмира [4]. Однако, до сих пор не получили должного развития расчеты устойчивости стержневых систем на совместное воздействие внешней сосредоточенной силы и собственного веса конструкции.

При бурении нефтегазовых скважин, шахтных стволов и скважин больших диаметров специального назначения в качестве грузонесущих конструкций бурового оборудования используются стержневые пространственные вышки. Они представляют собой усеченные квадратные пирамиды. В специальной литературе [5–7] вопросу расчета и конструирования таких вышек уделено серьезное внимание.

В специальной литературе по расчету буровых вышек на устойчивость [5–8] используется формула Эйлера для однородных невесомых стержней и практические расчеты этих стержней по коэффициентам снижения допускаемых напряжений и приведенной длине стержней. Такие расчеты не соответствуют реальной конструкции и могут быть оправданы лишь тем, что точных решений сквозных стержневых конструкций на устойчивость до сих пор практически не существует.

Целью представленной статьи является разработка методики инженерных расчетов на устойчивость сквозных башенных конструкций переменного поперечного сечения от воздействия сосредоточенных и распределенных нагрузок и собственного веса.

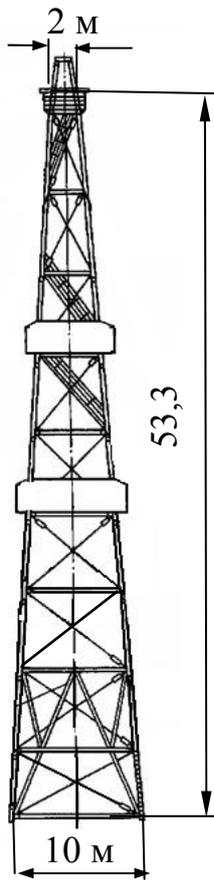


Рис. 1. Общий вид вышки ВБ-53-320

Заметим, что в расчете на устойчивость учитывается недопущение искривления сжатого стержня от изгиба. В пространственных конструкциях в виде сочетания плоских ферм, при изгибе в поясах фермы (а в буровых вышках в угловых стойках) возникают внутренние усилия растяжения и сжатия, которые уравнивают изгибающий момент внешних нагрузок. При этом раскосы фермы воспринимают поперечную силу, т.е. работают на сдвиг и мало влияют на деформации фермы. Поэтому в расчетах на устойчивость чаще всего влиянием поперечной силы пренебрегают [9–10].

Рассмотрим конструкцию вышки буровой установки ВБ-53-320 (рис. 1). Вышка представляет пространственную ферменную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды. Грузонесущие стойки нижней части вышки до отметки 35,05 м изготовлены из труб  $\varnothing 245 \times 12$  мм, выше этой отметки - трубы  $\varnothing 194 \times 6$  мм, элементы решетки ферм изготовлены: пояса - из труб  $194 \times 6$  мм и  $140 \times 5$  мм, диагональные тяги - из круглых стержней 24 и 30 мм.

Для упрощенного решения задачи примем, что поперечное сечение вышки одинаково и состоит из четырех угловых трубчатых стержней одинаковой площади с линейно переменным расстоянием между площадями.

Высота вышки  $l=53,3$  м, ширина нижнего основания  $b=10$  м, верхнего  $b_1=2$  м, масса вышки  $M=40$  т, погонный вес вышки практически постоянный  $q=Mg/l=7,547$  кН/м.

Площадь поперечного сечения грузонесущих стоек  $F=87,84$  см<sup>2</sup>, осевой момент инерции этой площади  $J=5976,7$  см<sup>4</sup>,

$$J_0 = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 24,5^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{22,1}{24,5} \right)^4 \right] = 5976,7 \text{ см}^4.$$

Момент инерции площади поперечного сечения стоек относительно центральной оси сечения

$$J = 4 \left[ J_0 + F \cdot \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] = 4 \left( 5976,7 + 87,84 \cdot 500^2 \right) = 4 \left( 5976,7 + 21,96 \cdot 10^6 \right) \approx 87,84 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

Здесь первым слагаемым можно пренебречь.

Жесткость при изгибе всего поперечного сечения вышки у ее основания

$$EJ = 87,86 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{11} = 175,72 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

С учетом принятого упрощения следует, что момент инерции площади поперечного сечения и жесткость при изгибе изменяются по квадратичному закону

$$EJ(x) = EJ \frac{x^2}{l^2}, \text{ т.е.}$$

$$EJ(x) = 175,72 \cdot 10^9 \cdot x^2 / l^2 = EJ \cdot x^2 / l^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Заметим, что погонный вес вышки остается постоянным, что видно из рис 2:

$$q = 4 \left[ \frac{q_1}{\cos \alpha} + 2 \frac{q_2}{\cos \beta} + q_3 (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \right]$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня можно получить из уравнения поперечных сил, как сумму проекций всех сил с одной стороны от сечения на направление сечения, т.е. направление нормали к изогнутой оси под углом  $\theta$ .

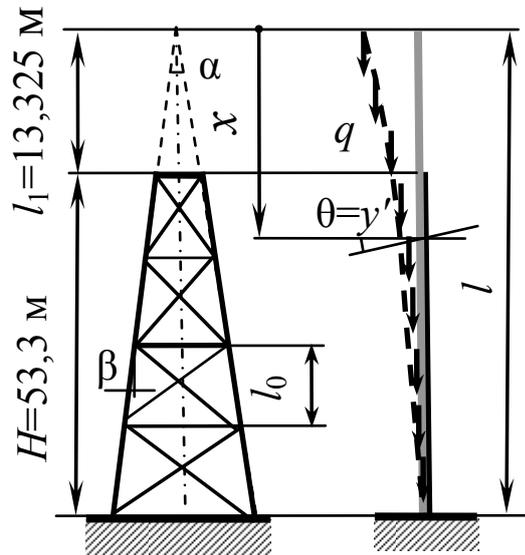


Рис. 2. Расчетная схема вышки

С учетом переменного момента инерции площади поперечного сечения с жесткостью  $EJ(x) = EJx^2/l^2$  такое уравнение при упрощенном значении поперечной силы  $Q(x) = EJ(x) \cdot y'''(x)$  принимает вид

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + \frac{qxl^2}{EJx^2} \frac{dy(x)}{dx} = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + a^2 x^n \frac{dy(x)}{dx} = 0, \quad a = l\sqrt{\frac{q}{EJ}}, \quad n = -1. \quad (1)$$

Путем замены переменной  $x$ , безразмерной координатой  $z = \xi ax^k$  (при обозначениях:  $k = \frac{2+n}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $\xi = \frac{1}{k} = 2$ ,  $m = \frac{1}{2+n} = 1$ ), получим дифференциальное уравнение Бесселя [3],

$$\frac{d^2 \theta(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta(z)}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) \theta(z) = 0, \quad (2)$$

где  $z = 2a\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{ql^2 x}{EJ}}$ .

При  $m=1$  решение уравнения (2) имеет вид [3],

$$\theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = [A \cdot J_1(z) + B \cdot Y_1(z)] \cdot \sqrt{x} \quad (3)$$

где  $J_1(z)$  - функция Бесселя первого рода первого порядка,  $Y_1(z)$  - функция Бесселя второго рода первого порядка или функция Неймана [2],

Используя формулы дифференцирования функций Бесселя

$$\frac{d}{dz} J_m(z) = -\frac{m}{z} J_m(z) + J_{m-1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z)$$

из (3) можно получить кривизну изогнутой оси вышки

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = a [A \cdot J_0(z) + B \cdot Y_0(z)], \quad (4)$$

где:  $J_0$  и  $Y_0$  - функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода.

Графики этих функций показаны на рис. 3.

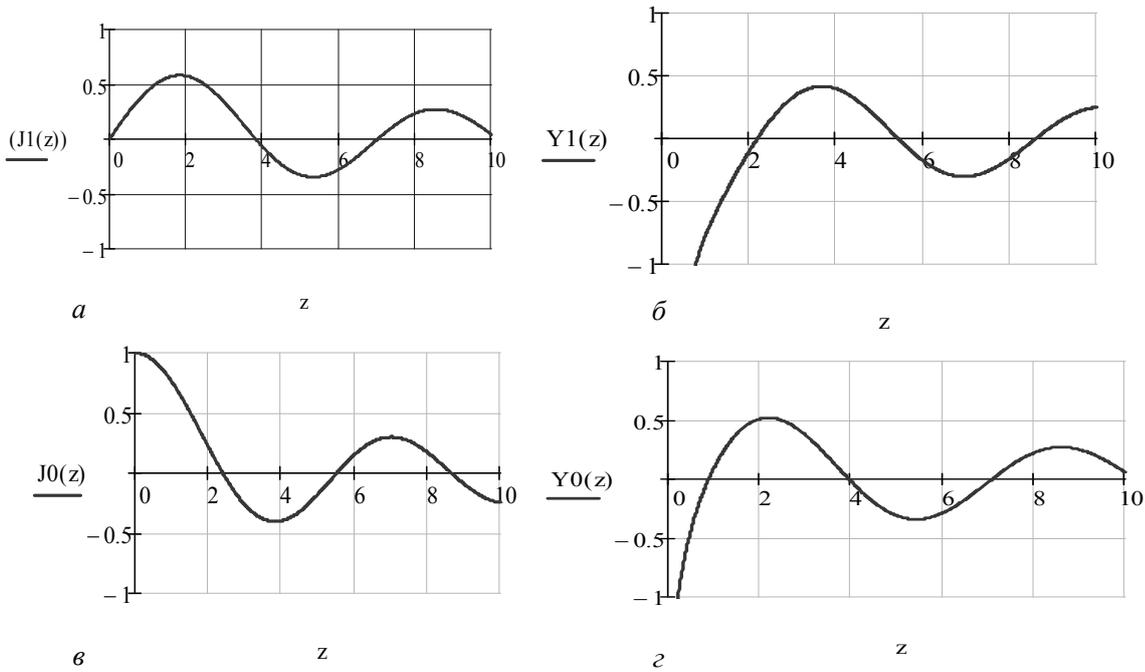


Рис. 3. Графики функций Бесселя

Для пирамидальной вышки из условия на свободном торце вышки, т.е. при  $x=0$ , изгибающий момент согласно (4)  $M(0) = EJ(0)y''(x) = 0$ . Но при  $x=0$  функция  $Y_0(0) = -\infty$  (рис. 3,г), значит  $B=0$ .

Заметим то, что при  $x=0$  согласно (3) угол поворота равен нулю, это означает лишь особенность этой нулевой точки, но с изменением  $J(z)$  на некотором расстоянии от особенности угол поворота уже не будет равен нулю.

Из условия в защемлении, т.е. при  $x=l$ ,  $z = 2a \cdot \sqrt{l}$  угол поворота поперечного сечения равен нулю, значит согласно (3)  $J_1(2a\sqrt{l}) = 0$ . Первый корень этого трансцендентного уравнения равен  $2a\sqrt{l} = 3,83$  (рис. 3,а), т.е.

$$2\sqrt{\frac{ql^3}{EJ}} = z(l) = 3,83 \cdot$$

Для вышки ВБ-53-320 жесткость опорного сечения  $EJ(l) = 175,7 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ , масса вышки  $40 \cdot 10^3 \text{ кг}$ , погонный вес вышки  $q = 7,547 \text{ кН/м}$ , согласно (5) получаем критическую длину стержня (высота вышки), рис. 4, а

$$l = \sqrt[3]{3,83^2 \cdot \frac{175,72 \cdot 10^9}{4 \cdot 7547}} = 440,3 \text{ м.}$$

Заметим, что критическая длина вышки с погонным весом  $q$ , вычисленная по формуле А. Н. Динника, полученной непосредственно из дифференциального уравнения изгиба весомого стержня переменного сечения жесткостью [2]

$$EJ(x) = EJ \frac{x^2}{l^2}, \text{ т.е. из уравнения}$$

$$EJ \frac{x^2}{l^2} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M(x), \tag{5}$$

равна (при  $K=3,67$  из табл. 44)

$$l_{кр} = \sqrt[3]{K \frac{EJ}{q}} = \sqrt[3]{3,67 \cdot \frac{175,72 \cdot 10^9}{7547}} = 440,46 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

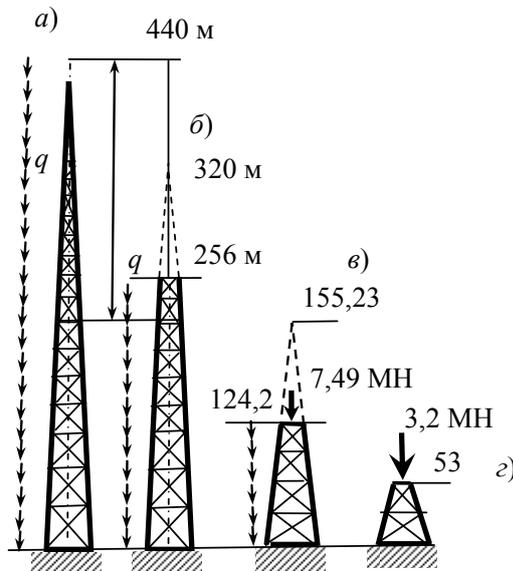


Рис. 4. Схемы критических состояний

а) – пирамидальная с собственным весом, б) – усеченная пирамида с собств. весом, в) – пирамидальная с собств. весом и сосредоточенной силой, г) – пирамидальная с сосредоточенной силой

Совпадение результатов расчета весовых стержней на устойчивость по уравнениям (1) и (5) свидетельствует о возможности использования приближенного значения третьей производной от уравнения изогнутой оси стержня в определении поперечной силы.

Для вышки в виде усеченной пирамиды (рис. 4, б) первое условие согласно (4) при  $x_1 = l_1$   $y''(x_1) = 0$  имеет вид

$$A \cdot J_0(z_1) + B \cdot Y_0(z_1) = 0. \quad (6)$$

Второе условие (в заземлении) при  $x_2 = l$   $y'(l) = 0$  согласно (3) принимает вид

$$A \cdot J_1(z_2) + B \cdot Y_1(z_2) = 0. \quad (7)$$

Здесь аргумент функций Бесселя  $z = 2a\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{ql^2x}{EJ}}$  вычисляется по текущим координатам  $x_1 = 0,2l = \frac{l_1}{l_1+H}$  и  $x_2 = l$ .

Приравняв определитель системы уравнений (6), (7) нулю, получаем уравнение устойчивости вышки

$$J_0(z_1) \cdot Y_1(z_2) - J_1(z_2) \cdot Y_0(z_1) = 0. \quad (8)$$

Первый корень этого уравнения при  $x = 320$  м определяет параметры вышки при потере устойчивости:  $l = x = 320$  м,  $l_1 = 0,2l = 64$  м,  $H = l - l_1 = 0,8l = 256$  м, вес вышки  $Q = qH = 7547 \cdot 256 = 1,932 \cdot 10^6$  Н = 1932 кН.

Если в верхнем сечении вышки приложена сосредоточенная сила  $N$  (рис. 4, в), то исходное дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + \frac{qt^2 \left( \frac{N}{q} + x \right)}{EJx^2} \frac{dy(x)}{dx} = 0.$$

Для упрощенного приближенного расчета на устойчивость усеченной пирамидальной вышки при учете собственного веса вышки и сосредоточенной силы на верхней площадке используем выше рассмотренный расчет условной вышки с сосредоточенной силой в месте пересечения осей опорных стоек. Величину сосредоточенной силы и высоту усеченной вышки

примем в такой же пропорции, как в реальной вышке ВБ-53-320, т. е.  $N = qx \cdot \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – отношение нагрузки к весу вышки). При таком условии дифференциальное уравнение изогнутой оси вышки примет прежний вид:

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + \frac{ql^2 x(\varepsilon + 1)}{EJx^2} \frac{dy(x)}{dx} = 0.$$

Коэффициент второго слагаемого уравнения (1) вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{\frac{ql^2}{EJ}(\varepsilon + 1)}, \quad (9)$$

а безразмерная координата

$$z(x) = 2\sqrt{\frac{ql^2}{EJ}(\varepsilon + 1)}x.$$

Из уравнения (8) находим  $x=155,23$  м, рис. 5.

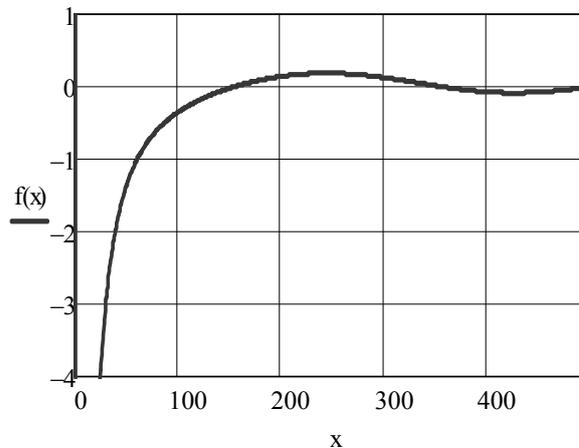


Рис. 5. График корней уравнения (8)

Следовательно: критическая высота вышки  $H = 0,8 \cdot 155,23 = 124,18$  м, вес вышки с реальной интенсивностью веса  $Q = qH = 124,18 \cdot 7547,17 = 937,2 \cdot 10^3$  Н.

Нагрузка на верхнюю площадку вышки  $P = 8Q = 7,498$  МН, нагрузка на нижнее сечение вышки  $Q_{\max} = ql + P = 124,2 \cdot 7547 + 7,49 \cdot 10^6 = 8,43 \cdot 10^6$  Н.

Коэффициент запаса устойчивости по грузонесущей способности вышки

$$k_y = \frac{7,49}{3,2} = 2,34.$$

Полученная здесь на основании приближенного значения поперечной силы  $\left( EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$

критическая сила  $P_{кр} = 7,49$  МН (рис. 4, в) определяет критической напряжением

$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F_{\phi}} = \frac{7,49 \cdot 10^6}{0,035 \cdot 0,97} = 220,6 \cdot 10^6$  Па. Коэффициент снижения допускаемых напряжений  $\phi = 0,97$

соответствует гибкости  $\lambda = 20$  для высокоуглеродистой стали.

В работах С. П. Тимошенко [3] и А. С. Вольмира [4] приводится решение на устойчивость невесомой вышки в виде усеченной пирамиды на воздействие сосредоточенной силы в верхнем сечении.

Расчет основан на приближенном дифференциальном уравнении изогнутой оси стержня второго порядка при выборе начала координат в точке пересечения угловых несущих стержней вышки, рис. 6

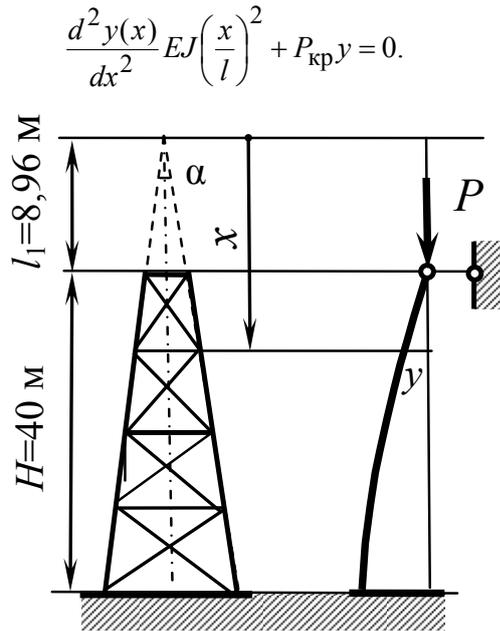


Рис. 6. Расчетная схема вышки Тимошенко

При обозначении  $\frac{P_{кр}}{EJ} = k^2$  это уравнение принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянным коэффициентом  $k$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 x^{-2} y = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = [A \sin(s \cdot \ln x) + B \cos(s \cdot \ln x)] \sqrt{x}, \quad (11)$$

где

$$s^2 = k^2 - 0,25. \quad (12)$$

Дифференцированием (10) получено уравнение углов поворота сечений стержня

$$\frac{dy(x)}{dx} = A \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(s \ln x) + \frac{s}{\sqrt{x}} \cos(s \ln x) \right) + B \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(s \ln x) - \frac{s}{\sqrt{x}} \sin(s \ln x) \right). \quad (13)$$

При выборе начала координат в точке пересечения осей угловых стержней вышки в деформированном состоянии из условия  $x = l_1$  прогиб равен нулю, согласно (10) получена зависимость

$$B = -A \sin(s \ln l_1).$$

Из условия заземления нижнего сечения при  $x = l_1 + H = l$  угол поворота равен нулю в соответствии с (12) получаем зависимость

$$A \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}(s \ln l) + s \right) + B \left( \frac{1}{2} - s \cdot \operatorname{tg}(s \ln l) + s \right) = 0$$

откуда следует расчетное уравнение для определения параметра  $s$

$$\operatorname{tg} \left( s \ln \frac{l_1}{l} \right) = 2s. \quad (14)$$

Зная корень этого уравнения  $s$ , на основании (11) находим параметр  $k$  и критическую силу

$$P_{кр} = \frac{EJ}{l^2} k^2 = \frac{EJ}{(l_1 + H)^2} \left( s^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (15)$$

Подставляя в это уравнение параметры рассмотренной вышки  $l_1/l = 0,2$ , подбором находим  $s=1,218$ , чему соответствует критическая сила (14)

$$P_{кр} = \frac{175,7 \cdot 10^9}{(13,325 + 53,3)^2} (1,218^2 + 0,25) = 68,62 \cdot 10^6 \text{ Н} = 68620 \text{ кН}$$

и критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{68,62 \cdot 10^6}{4 \cdot 87,84 \cdot 10^{-4}} = 1953 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Заметим, что в работе А. Н. Динника [2] приведены значения критической силы для стержней постоянного сечения с учетом собственного веса

$$P_{кр} = K \frac{EJ}{l^2}. \quad (16)$$

Коэффициент  $K$  в зависимости от отношения  $m = \frac{ql}{P_3}$  (отношение веса вышки к силе Эйлера) берется из таблицы 49. При  $m \rightarrow 0$   $K=2,47$  и значение критической силы при средней жесткости  $EJ \frac{3,5^2}{5^2} = 86,1 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2$  составляет

$$P_{кр} = 2,47 \frac{86,1 \cdot 10^9}{53,3^2} = 74,8 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Незначительное расхождение в результатах вычисления критической силы по формулам (15) и (16) свидетельствует о незначительном влиянии собственного веса буровых вышек на значение критической силы.

При полученном высоком напряжении, значительно превышающем предел пропорциональности, упрощенным дифференциальным уравнением, на основе которого выведены расчетные формулы, пользоваться нельзя. Конструкция буровой вышки имеет незначительную гибкость

$$\lambda = \mu \frac{l}{i} \approx 2 \frac{53}{5} = 21,2.$$

При такой гибкости стальные стержни не теряют устойчивости, следовательно, буровую вышку следует рассчитывать только на прочность

$$\sigma = \frac{P+Q}{F} = \frac{(320+40) \cdot 10^4}{4 \cdot 87,84 \cdot 10^{-4}} = 102,5 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

На устойчивость нужно рассчитывать только угловые несущие стойки как невесомые стержни с шарнирными опорами. По формуле Эйлера критическая сила трубчатой стойки длиной равной панели фермы 8,75 м с изгибной жесткостью  $EJ = 5976,7 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11} = 11,95 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$  равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 11,95 \cdot 10^6}{8,75^2} = 1,54 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

что соответствует коэффициенту запаса устойчивости  $k_y = \frac{4 \cdot 1540}{3600} = 1,71.$

## Выводы

1. Буровые вышки от собственного веса не теряют устойчивости.
2. Расчет буровой вышки в виде усеченной пирамиды на устойчивость без учета собственного веса производится в тригонометрических функциях.
3. Расчет буровой вышки с переменной жесткостью на устойчивость от собственного веса производится в функциях Бесселя.
4. Точное решение буровой вышки переменного сечения на совместное действие собственного веса и сосредоточенной нагрузки пока не разработано.
5. Упрощенный расчет буровой вышки на совместное нагружение технологической сосредоточенной нагрузкой на верхней площадке с учетом собственного веса можно производить на основании приближенного дифференциального уравнения (1), см. рис. 4, в.

## Библиографический список

1. Динник А.Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упруго-сти. Избранные труды. К.: АН УССР, 1955. – Том 2. – 220 с.
2. Динник А.Н. Продольный изгиб, кручение. Изд. АН СССР, М.: 1955. – 392 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, гл. ред. физ.- мат. лит. 1971. – 807 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, гл. ред. физ. - мат. лит. 1967. – 983 с.
5. Поляков Г.Д., Булгаков Е.С., Шумов Л.А. Проектирование, расчет и эксплуатация буровых установок. М.: Недра, 1983. – 153 с.
6. Дудля Н.А. Проектирование буровых машин и механизмов. – Киев: Вища школа, 1990. – 271 с.
7. Кирсанов А.Н., Зинченко В.П., Кардыш В.Г. Буровые машины и механизмы. – М.: Недра, 1981. – 448 с.
8. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем, Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: Учебное пособие с грифом МОН. Донецк, РВВ ДонНТУ, 2006. – 293 с.
9. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем, часть 2. Сложное напряженное состояние. Учебное пособие с грифом МОН. Донецк, РВВ ДонНТУ, 2007. – 306 с.
10. Шевченко Ф.Л., Царенко С.М. Задачі з опору матеріалів. /Навчальний посібник з грифом Міністерства України. – Донецьк, ДонНТУ, 2011. – 354 с.

Надійшла до редколегії 20.12.2011.

Ф. Л. Шевченко, Ю. В. Петтік, С. М. Царенко

*ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», Донецьк, Україна*

### Проблеми розрахунку бурових вишок на стійкість

У роботі розглядається актуальне задача розрахунку бурових вишок на стійкість. Істотний інтерес викликає розрахунок просторової стрижневої вишки на стійкість при додатку технологічного навантаження і власної ваги

Ключові слова: бурова вишка, стійкість, жорсткість при вигині, диференціальне рівняння, міцність, функції Бесселя, критична сила

F. L. Shevchenko, Y. V. Pettik, S. N. Tsarenko

*Donetsk national technical university, Donetsk, Ukraine*

### Difficulties in drilling rig stability problems

The work deals with the topical problem of calculation of drilling rigs in stability. A substantial interest is the calculation of rigs towers on stability in the loading of the technological works and its own weight

Keywords: rig, stability, flexural rigidity, differential equation, strength, Bessel functions, critical force