УДК 681.3

Построение граничных моделей методом параметрической интерполяции

Г.И. Грездов, Т.К. Филиппенко

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины, г.Киев

Abstract

Ghrezdov G.I., Filippenko T.K. Construction of Boundary Models Using Parametrical Interpolation Method. *The paper considers the problems of using a kinematic method to obtain a parametrical representation of surfaces. Ways of parametrical representation of rotation surfaces are described. Transformation methods of analytical representation of a surface in a parametrical net model are described.*

Данная работа является развитием исследований по машинной графике, выполненных авторами в 80 гг для авиации. Авторами проводилось машинное моделирование программных средств бортовых и стендовых систем машинной графики, имитирующих пилотажные приборы и внешнюю закабинную информацию. Данное направление тогда рассматривалось как одно из возможных в перспективе.

Суть метода

Используется кинематический способ, дающий параметрическое представление поверхностей. Приводятся способы параметрического представления поверхностей вращения и серпентинов. Описана методика преобразования аналитического представления в параметрическую сеточную модель. Граничная модель формируется в 3 этапа: задание параметрического представления, реализация по заданию параметрической сетки и восстановление поверхности методом параметрической сплайн-интерполяции. В основу построения граничных моделей положена реализация их параметрического представления разработанными авторами ФИЛЗ сплайнами. Такой способ имеет ряд достоинств как при программной, так и аппаратной реализации [1]. Граничные модели могут использоваться для построения изображений, а также в системах управления, для различных геометрических операций типа определения линий пересечения и т.п.

Параметрическое представление

Параметрическое представление функции – выражение функциональной зависимости между несколькими переменными посредством вспомогательных переменных – параметров. Количество параметров определяется числом степеней свободы функции (линия определяется одним параметром, поверхность – двумя), а количество компонентов функции определяется размерностью пространства. Таким образом, для параметрического представления линии в трехмерном пространстве требуется реализовать три функции одной переменной, а для представления поверхности – три функции двух переменных. Важнейшие достоинства параметрического представления - возможность выражать многозначные функции с помощью однозначных, область изменения параметров, как правило, прямоугольна.

Для параметрического представления поверхностей будем использовать кинематический способ в соответствии с которым поверхность представляет собой след от перемещения некоторого образующего многообразия по другому направляющему многообразию. Направляющее многообразие определяется параметром-директрисой, а в формировании образующего многообразия принимает участие наряду с параметром-директрисой еще и параметр-генератриса. Перемещение состоит из трех преобразований: движения, масштабирования и изменения формы. Одним из частных случаев такого кинематического способа является движение вдоль по криволинейной траектории плоского контура, имеющего в своей плоскости отверстия, по мере движения сам контур и его отверстия могут менять размеры и форму.

Оператор

Перемещение может быть описано выражением

$$\boldsymbol{r}\,(d,g) = \boldsymbol{r}_d\,(d) + \boldsymbol{M}_d\,(d)\,\boldsymbol{M}_o\,(d)\,\boldsymbol{r}_g\,(d,g),$$

$$d \in [a_d,\, b_d], g \in [a_g, b_g], \qquad (1)$$

где d – параметр-директриса, a_d и b_d – границы его изменения, g – параметр-генератриса, a_g и b_g – границы его изменения, $\boldsymbol{r}\,(d,g) = \{\, x(d,g),\, y(d,g),$

z(d,g) } – параметрическое представление искомой поверхности тремя координатными поверхностями, $\boldsymbol{r}_d\ (d) = \{\ x_d(d),\ y_d(d),\ z_d(d)\ \}$ – параметрическое представление траектории перемещения начала координат генератрисы, $\boldsymbol{M}_d(d)$ – матрица 3х3 направляющих косинусов сопровождающего триэдра при перемещении по траектории, $\boldsymbol{M}_o(d)$ – опциональная (задаваемая извне) матрица вращения, $\boldsymbol{r}_g(d,g) = \{\ x_g(d,g),\ y_g(d,g),\ z_g(d,g)\ \}$ – параметрическое представление образующей, иногда может быть двумерным с соответствующей коррекцией матрицы $\boldsymbol{M}_o$.

Перемещение имеет три составляющие: перенос, вращение, изменение размеров и формы.

Перенос определяется траекторией перемещения $\boldsymbol{r}_d\ (d)$, которая задает не только положение начала координат переносимого множества, но и определяет его ориентацию в пространстве. В случае, когда $\boldsymbol{r}_d(d)=const$, задают изображение поверхностей вращения, в противном случае – поверхности серпентинов.
У серпентинов возможен параллельный перенос, при параллельном переносе $\boldsymbol{M}_d = \boldsymbol{E}$. В случае параллельного перенесения нормаль генератрисы параллельна касательной к директрисе, это выполняется матрицей направляющих косинусов $\boldsymbol{M}_d$, которая в случае параллельного перенесения определяется сопровождающим триэдром. При перемещении по траектории может выполняться текущее масштабирование переносимого множества в целом или по координатным направлениям, а также другие изменения формы, например, интерполяция форм. Перемещение может сопровождаться вращением. Различают типы вращения: пируэт, кувырок, винт и кручение, которые задаются матрицей $\boldsymbol{M}_o$. С помощью серпентинов можно задавать поверхности трубопроводов различного профиля, змеевики, гофрированные поверхности, гирлянды, цепочки, различные узлы, детали технического происхождения и т.п.

Поверхности вращения создаются при перемещениях с одной неподвижной точкой, здесь r_d и M_d остаются неизменными. Если предположить, что окружность вращения конформно отображается на другие линии, то понятие поверхностей вращения существенно расширяется: к их числу относятся кроме сфер, цилиндров, конусов, торов еще и многогранники, звезды, винты, тороиды, узлы, геликоиды, разного рода технические детали и т.п.

Параметрическая интерполяция

Представленная выражением (1) поверхность может быть реализована приближенно методом интерполирования, по которому сперва строится сеточная модель поверхности, а затем она восстанавливается методом интерполяции.

Параметрическая интерполяция требует следующих действий. Для каждого параметра выполнить операцию расщепления, в результате чего непрерывная прямоугольная область изменения аргументов представится прямоугольной сеткой аргументов. Паре текущих значений аргументов будет соответствовать пара доминант, определяющих номер ячейки сетки, и пара восполнений, определяющих положение текущей точки в ячейке.

Для узловых значений аргументов требуется сформировать три компоненты радиус-вектора на реализуемой поверхности. В результате этих действий будет определена сеточная модель поверхности как совокупность узловых значений аргументов и им соответствующих значений радиус-вектора на поверхности.

Заключительным этапом параметрической интерполяции является восстановление трехмерной векторной функции двух переменных выбранным методом интерполяции.

Параметрическая сетка

Пусть сетка получена в результате равномерного разбиения с количеством участков Γ и Δ по параметрам g и d соответственно, тогда номера участков сетки G и D и восполнения g_i и d_i по параметрам g и d соответственно определятся как

$$G = IP(\frac{g-a_g}{b_g-a_g}\Gamma); g^i = FP(\frac{g-a_g}{b_g-a_g}\Gamma);$$

$$D = IP(\frac{d-a_d}{b_d-a_d}\Delta); d^i = FP(\frac{d-a_d}{b_d-a_d}\Delta);$$

значения параметров d_D и g_G в узлах сетки находятся как

$$d_D = a_d + \frac{b_d-a_d}{\Delta}D; g_G = a_g + \frac{b_g-a_g}{\Gamma}G.$$

Узловые значения $r\ (D,G)$ поверхности $r\ (d,g)$ на сетке параметров вычисляются как

$$\boldsymbol{r}\ (D,G) = \boldsymbol{r}_d\,(d_D) + \boldsymbol{M}_d\,(d_D) \cdot \boldsymbol{M}_o\,(d_D) \cdot \boldsymbol{r}_g\,(d_D,\ g_G), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{r}_d\ (d_D)$ – сеточная модель траектории перенесения, $\boldsymbol{M}_d\ (d_D)$ и $\boldsymbol{M}_o\ (d_D)$ – значения матриц направляющих косинусов сопутствующего триэдра и опционального вращения, $\boldsymbol{r}_g\ (d_D,\ g_G)$ – узловые значения генератрисы.

Таким образом, сеточная модель заданной в параметрическом виде поверхности $\boldsymbol{r}(d,g)$ представляется трехмерными узловыми значениями функции $\mathbf{r}(D,G)$ на двумерной сетке аргументов $D \times G$.

Параметрический интерполянт

Параметрический интерполянт в трехмерном пространстве на одномерной сетке $\{f(X), X\in[0,nX]\}$ имеет вид

$$f(x)=\{f(X-1), f(X), f(X+1), f(X+2)\}.\{ \sigma_{-1}(\beta,x^i), \sigma_0\beta,x^i), \sigma_1(\beta,x^i), \sigma_2(\beta,x^i)\}, \ X\in[1,nX-2],$$

где f - трехмерный вектор значений функции, X, x^i – результат расщепления аргумента x , σ_i - ветви интерполирующей функции, которая может быть представлена в виде линейной формы

$$\sigma(\beta, x^i) = \sigma^0 (x^i) + \beta\, \sigma^1(x^i),$$

где $\beta\in(-\infty,+\infty)$ – параметр интерполяции, σ^0 – опорная составляющая или ядро, σ^1 – варьируемая составляющая или оболочка.

Параметр интерполяции β существенно влияет на аппроксимационные свойства интерполянта. Значение параметра β может быть рассчитано, исходя из условий минимизации погрешности аппроксимации или других требований. Характерными значениями параметров интерполяции β являются следующие:

- 0 – параметрический интерполянт линеен,
- 1 – интерполянт обеспечивает качество квадратичной аппроксимации гладких функций,
- β_s, - интерполянт наилучшим образом аппроксимирует окружность,
- β_r – интерполянт окружности имеет форму розы.

Параметрический интерполянт сеточной функции (2) имеет вид

$$\mathbf{r}^i (d,g) = \mathbf{R}^i(D,G)\ \sigma(\beta_d,d^i)\ \sigma(\beta_g,g^i), \quad (3)$$

где $\mathbf{r}^i\ (d,g)$ - поверхность, получаемая интерполяцией сеточной функции $\mathbf{r}(D,G)$, $\mathbf{R}^i(D,G)$ - носитель интерполянта в ячейке (D,G), являющийся выборкой размера 4 x 4 x 3, β_d и β_g - параметры интерполирования по переменным d, g.

Параметры интерполяции могут выбираться произвольно по каждому координатному направлению вне зависимости друг от друга. Располагая сеточной моделью, которая используется как остов, оператор интерполирования натягивает на этот остов поверхность. Для каждой сеточной модели $Sf(\Delta, \Gamma)$ оператор интерполяции может создать поле интерполянтов FIL($Sf(\Delta,\Gamma)$,β_g,β_d), где β_g и β_d – параметры интерполирования по направлениям образующей и направляющей могут выбираться, исходя из каких-либо соображений. Если параметры интерполяции по обоим координатным направлениям выбраны нулевыми, то имеет место линейчатая интерполяция сеточной модели.

Граничные модели

В настоящем разделе рассматриваются двумерные и трехмерные граничные модели.

Для двумерных моделей даются общие сведения, виды задания: явное, неявное и параметрическое представление в прямоугольных координатах, в полярных координатах. Кратко описывается коллекция важнейших линий.

Рассматриваются трехмерные линии и поверхности. Для трехмерных линий приводятся общие сведения и дается представление о сопровождающем и сопутствующем триэдре. Трехмерные поверхности представлены материалом об общих сведениях, описываются, так называемые, винтоидные поверхности и серпентины и поверхности общего вида.

Двумерные

Двумерные граничные модели используются самостоятельно, когда объект является двумерным, но чаще как элемент при формировании объекта кинематическим способом. Здесь двумерные граничные модели могут быть использованы как образующая и как направляющая линии.

Общие сведения

Двумерные граничные модели задаются несколькими способами. Наиболее распространенные в математике граничные модели задаются целиком формулами. В математике имеется целая коллекция таких моделей, включающая линии второго, третьего, четвертого и высших порядков. В приложениях чаще используют представление моделей кусками состыкованных друг с другом прямых и кривых линий. Кривыми линиями могут быть окружности, эллипсы, параболы и др. Граничные модели, составленные из прямых линий, относят к классу полигонов. Технические профили обычно представляются прямыми линиями, состыкованные друг с другом окружностями или другими кривыми. Наконец, двумерные граничные модели могут задаваться сеткой узловых значений с последующей интерполяцией требуемой гладкости.

Ниже рассматриваются виды задания и коллекция важнейших линий, задаваемых формулами и используемых целиком или для реализации участков при кусочном представлении.

Виды задания

Двумерные граничные модели являются линиями, которые в прямоугольных координатах задаются явно в виде $y = y(x)$,
неявно в виде $f(x, y)=0$
или в параметрической форме

$$x=x(s),\ y=y(s),$$

где f, x(), y() – заданные функции, а s – параметр. Двумерные граничные модели иногда представляют в полярных координатах в виде $\rho=\rho(\varphi)$,
переход от полярных координат к параметрической форме выполняется по формуле
$x=\rho \cos \varphi$, $y=\rho \sin \varphi$.

Коллекция важнейших линий

Двумерные граничные модели, задаваемые формулами, классифицируются по порядку переменных в неявном уравнении и бывают линиями второго, третьего, четвертого и высших порядков, а также трансцендентные и производные от других [2].

Линии второго порядка – это окружность, эллипс, гипербола и парабола.
К линиям третьего порядка относят

- Аньези локон $(x^2+a^2)y = a^3$,
- декартов лист $x = 3at/(t^3+1);\ y = 3at^2/(t^3+1);$
- Диоклеса циссоида $\rho = a \sin^2\varphi / \cos \varphi;$
- кубическая парабола $y = a x^3$;
- Маклорена трисектриса $\rho = a (4 \cos \varphi - 1 / \cos \varphi);$
- офиурида $x (x^2 + y^2) = y (a y + b x),$
- полукубическая парабола $x = t^2 ;\ y = a t^3;$
- строфоида $\rho = - a \cos 2\varphi / \cos \varphi,$
- трезубец $x y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$

Линии четвертого порядка

- Бернулли лемниската $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$
- декартов овал $(x^2 + y^2)^{1/2} + m ((x - d)^2 + y^2)^{1/2} = a;$
- каппа $\rho = a\, ctg\, \varphi$
- кардиоида $\rho = 2r (1 - \cos \varphi);$
- Кассини овал $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4 a^2 x^2 = c^4;$
- Никомеда кондиоида $\rho = a / \sin \varphi \pm l;$
- Паскаля улитка $\rho = b + a \cos \varphi;$
- Персея кривая $(x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - r^2)^2 = 4 d^2(x^2 + p^2);$
- Штейнера кривая – гипоциклоида с модулем m=1/3: $x = 2r \cos t/3 + r \cos 2t/3;\ y = 2r \sin t/3 - r \sin 2t/3;$

Линии высших порядков

- Ламе кривая $(x/a)^m + (y/b)^m = 1;$ $0<m<1, m=p/q$ – типа овал

Трансцендентные линии

- Трансцендентные функции: тригонометрические, показательная, логарифмическая, гиперболические
- Диностраты квадратриса, жезл, квадратриса, кохлеоида, трактриса, узорная кривая, цепная линия
- Спирали
  - архимедова $\rho = a\ \varphi$
  - Галиллея $\rho = a\ \varphi^2 - d;$
  - гиперболическая $\rho = a/\varphi;$
  - Корню
  - логарифмическая $\rho = a \exp(k\varphi)$
  - параболическая $\rho = a\ \varphi^{1/2} + d$
  - синусоидальная $\rho^m = a^m \sin m\varphi$, $\rho^m = a^m \cos m\varphi$
  - Ферма $\rho = a\ \varphi^{1/2};$
- Трохоиды: $x = r t - h \sin t,\ y = r t - h \cos t,$
  - эпитрохоиды: $x = (R+r) \cos m t - h \cos (t + mt);$ $y = (R+r) \sin m t - h \sin (t + mt);\ m = r/R;$
  - гипотрохоиды: $x = (R - r) \cos m t + h \cos (t - mt);$ $y = (R-r) \sin m t - h \sin (t - mt);$ $m = r/R;$
  - астроида: при $m = 1/4$
  - розы: $h = R + r$
- Циклоиды $x = r (t - \sin t),\ y = r (t - \cos t),$
  - эпициклоида $x = (R+r) \cos m t - r \cos (t + mt);$ $y = (R+r) \sin m t - r \sin (t + mt);\ m = r/R;\ m=p/q$
  - гипоциклоиды: $x = (R-r) \cos m t + r \cos (t - mt);$ $y = (R-r) \sin m t - r \sin (t - mt);\ m = r/R;\ m=p/q$

Производные от других: конхоиды, погони линия, эволюта, эвольвента.

Технические профили

К числу технических профилей относятся угловые, тавровые, двутавровые, швеллеры и др.

Используемые для реализации технических профилей двумерные граничные модели являются замкнутыми фигурами, состоящими из состыкованных кусков прямых и окружностей. Такие фигуры могут быть заданы сеточной моделью, в которой кроме узловых значений содержатся указания о способе соединения узлов – прямой или куском окружности. Сама фигура создается путем интерполяции в соответствии с указаниями о способе соединения [3].

Сварочная щель

Профиль сварочной щели определяется типом сварного соединения и в общем случае изменяет свою форму в зависимости от местоположения на линии сварки. Заданный тип соединения определяет технологические параметры сварочной канавки такие, как угол между краями канавки, ширина дна канавки и др. Эти параметры обеспечиваются выбором формы торцов примыкающих кромок свариваемых тел. В общем случае, когда свариваемые тела криволинейны, их кромки в разных точках на линии сварки сходятся под разными углами и сечение сварочной канавки может менять форму при перемещении по линии сварки.

Трехмерные

Трехмерные граничные модели используются самостоятельно или как элемент граничной модели при формировании объекта кинематическим способом.

Трехмерные граничные модели являются линиями или поверхностями. Ниже описываются сперва трехмерные линии, а затем трехмерные поверхности разных типов.

Линии

Трехмерная граничная модель типа линия является пространственной кривой и может использоваться самостоятельно как траектория перемещения, а также в качестве вспомогательной линии типа оси при кинематическом способе построения поверхности.

Способы задания

Пространственная кривая обычно задается в параметрической форме

$$x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s),\ \text{ или } \mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$$

где $-\infty < s < +\infty$.

Кривую в пространстве можно задать и как линию пересечения двух неявно заданных поверхностей

$$F(x, y, z)=0,\ W(x, y, z)=0.$$

Триэдры

Поведение в окрестности текущей точки пространственной линии определяется триэдром **M**, который включает в себя три вектора **t** , **n** и **b** и соединяющие их плоскости.

$$\mathbf{M}=\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}=\begin{Vmatrix} t_x & n_x & b_x \\ t_y & n_y & b_y \\ t_z & n_z & b_z \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

В зависимости от способов вычисления векторов **t** , **n** и **b** существуют два вида триэдров.

Сопровождающий триэдр используют, когда неизвестно происхождение пространственной линии. Он находится по дифференциальным свойствам кривой. Здесь определяющими являются вектора касательной **t** , главной нормали **n** и бинормали **b** кривой, которые вычисляются по формулам

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \mathbf{n}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}. \qquad (8)$$

Сопутствующий триэдр используют, когда линия получена в результате пересечения поверхностей F и W, он формируется с использованием дифференциальных свойств этих поверхностей – нормалей к поверхностям $\mathbf{n_F}$ и $\mathbf{n_W}$ в точке на линии пересечения [4]. Когда $\mathbf{n_F}$ и $\mathbf{n_W}$ не коллинеарны, вектор касательной линии к линии пересечения **t** здесь может вычисляться как

$$\mathbf{t} = \mathbf{n_F} \times \mathbf{n_W}. \qquad (9)$$

При формировании векторов **n** и **b** имеют место два случая.

Первый случай – линия пересечения образуется на основной поверхности при ее пересечении с разделяющей поверхностью. В этом случае сопутствующий триэдр строится следующим образом. Продольная ось проходит по касательной к линии пересечения **t**, в качестве вектора **n** целесообразно использовать нормаль к основной поверхности $\mathbf{n}_F$, которая определяет расположение сварочной площадки. Тогда

$$\mathbf{M}=\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_F, \mathbf{t}\times\mathbf{n}_F\}. \qquad (10)$$

Второй случай – линия образуется при пересечении двух равноценных поверхностей. Здесь линия пересечения поверхностей проходит по вершине ребра, образованного примыкающими к нему пересекающимися поверхностями. Сопутствующий триэдр имеет следующие элементы: продольная ось проходит по касательной к линии пересечения **t**, поскольку поверхность объекта на линии пересечения имеет перелом, вторую ось целесообразно проводить по направлению, комбинирующему орты нормалей примыкающих к линии пересечения поверхностей $\mathbf{n}_F$ и $\mathbf{n}_W$

$$\mathbf{n} = \lambda\, \mathbf{n}_F + (1-\lambda)\, \mathbf{n}_W,\ \lambda\in[0, 1]. \quad (11)$$

При $\lambda=.5$ **n** проходит по биссектрисе угла между нормалями примыкающих к линии пересечения поверхностей $\mathbf{n}_F$ и $\mathbf{n}_W$, при $\lambda=0$ вектор **n** совпадает с $\mathbf{n}_W$, а при $\lambda=1$ вектор **n** совпадает с $\mathbf{n}_F$.

Оператор ориентации

Оператор ориентации является специальным линейным преобразованием, которое в системе однородных трехмерных координат задается однородной матрицей преобразования

$$POS=\begin{bmatrix} t_x & n_x & b_x & x_o \\ t_y & n_y & b_y & y_o \\ t_z & n_z & b_z & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{r}_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{r}_o$ – координаты текущей точки, а **M** – матрица направляющих косинусов ориентируемых однородных координатных осей детали относительно однородных координатных осей общей системы [5].

Поверхности

Трехмерные поверхности являются искомой граничной моделью, но иногда они играют роль перемещаемого элемента при кинематическом способе формирования. При сварке граничные модели деталей являются технически реализуемыми поверхностями – получаемыми прокатом, литьем или штамповкой. В соответствии с используемой здесь методикой поверхности строятся с помощью параметрической интерполяции, реализующей поверхности в три этапа: создание прообраза, построение по нему сеточной модели и восстановление поверхности путем ее интерполяции. Ниже основное внимание уделено описанию некоторых свойств поверхностей, нужных для перемещения по таким поверхностям при сварке.

Общие сведения

Поверхность в трехмерном пространстве можно определить в неявной форме как

$$F(x, y, z)=0,$$

или в параметрическом виде

$$x=x(d,g),\ y=y(d,g),\ z=z(d,g), \text{ или } \mathbf{r} = \mathbf{r}(d,g).$$

Параметры d и g при кинематическом способе имеют следующий смысл: d – направляющая, g – образующая, отсчитываемые от начала координат параметров.

Определяющей для поверхности в текущей точке с координатами является нормаль **n** к поверхности. Орт нормали к неявно заданной поверхности определяется как

$$\mathbf{n} = \mathrm{Ort}(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}),$$

а к поверхности, заданной в параметрическом виде, определится как

$$\mathbf{n} = \mathrm{Ort}(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial d} & \frac{\partial z}{\partial d} \\ \frac{\partial y}{\partial g} & \frac{\partial z}{\partial g} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial d} & \frac{\partial x}{\partial d} \\ \frac{\partial z}{\partial g} & \frac{\partial x}{\partial g} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial d} & \frac{\partial y}{\partial d} \\ \frac{\partial x}{\partial g} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{vmatrix}).$$

Сопровождающий триэдр для поверхности имеет ось нормали, совпадающую с нормалью к поверхности, а две остальные оси находятся в касательной к поверхности плоскости, их можно определить по-разному. Например, если на поверхность наложена траектория движения, то продольная ось триэдра направлена по касательной к траектории. Если дополнительных данных о трехграннике нет, то продольную его ось можно расположить по касательной к координатной линии.

Для неявно заданной поверхности уравнение касательной к поверхности плоскости имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z = 0,$$

а орт касательной к координатной линии Ох определяется как

$$\mathbf{t}_x = Ort(\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial z}, 0).$$

Матрица направляющих косинусов сопутствующего триэдра в этом случае имеет вид

$$\mathbf{M}=\{\mathbf{t}_x, \mathbf{n}, \mathbf{t}_x \times \mathbf{n}\}.$$

Для заданной в параметрическом виде поверхности уравнение касательного к координатной линии d орта имеет вид

$$\mathbf{t}_d = Ort(\frac{\partial x(d,g)}{\partial d}, \frac{\partial y(d,g)}{\partial d}, \frac{\partial z(d,g)}{\partial d}).$$

Матрица направляющих косинусов сопутствующего триэдра в этом случае имеет вид

$$\mathbf{M}=\{\mathbf{t}_d, \mathbf{t}_d \times \mathbf{t}_g, \mathbf{t}_d \times (\mathbf{t}_d \times \mathbf{t}_g)\}.$$

Поверхности, синтезируемые кинематическим способом, разделены на два класса: винтоидные поверхности и серпентины.

Винтоидные поверхности

Винтоидная поверхность описывается плоской кривой L, которая, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно совершает движение в своей плоскости и изменение масштаба. Если L лежит в плоскости оси вращения y и определяется уравнением

$$x_g = x_g(g),\ y_g = y_g(g),$$

то радиус-вектор винтоидной поверхности есть

$$\begin{Vmatrix} x(d,g) \\ y(d,g) \\ z(d,g) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos d & 0 \\ \sin d & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot (\begin{Vmatrix} x_h(d) \\ y_h(d) \end{Vmatrix} +$$

$$+ r_g(d,g) \begin{Vmatrix} \cos a(d) & \sin a(d) \\ -\sin a(d) & \cos a(d) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_g(g) \\ y_g(g) \end{Vmatrix}),$$

где g – параметр кривой, d – угол поворота, $\{x_h, y_h\}$ – радиус-вектор переноса кривой в ее плоскости, a – угол поворота кривой в ее плоскости, r_g – масштаб кривой.

Разновидности

Разновидности винтоидных поверхностей определяются видом кривой L и способами ее эволюций в своей плоскости. Например, по виду кривой могут быть винтоиды окружности и винтоиды парабол.

Винтоиды окружности по виду эволюций в своей плоскости могут подразделяться на

– сфероиды;
– колючки;

− тороиды;
− узлы;
− винты;
− геликоиды.

Винтоиды парабол по виду эволюций в своей плоскости могут подразделяться на

− кубки;
− конусы;
− седла.

Серпентины

Перемещение может быть описано выражением

$$\boldsymbol{r}\,(d,g) = \boldsymbol{r}_d\,(d) + \boldsymbol{M}_d\,(d)\,\boldsymbol{M}_o\,(d)\,\boldsymbol{r}_g\,(d,g),$$

$$d \in [a_d,\, b_d],\; g \in [a_g, b_g],$$

где d – параметр-директриса, a_d и b_d – границы его изменения, g – параметр-генератриса, a_g и b_g – границы его изменения, $\boldsymbol{r}\,(d,g) = \{\, x(d,g),\, y(d,g),\, z(d,g)\ \}$ – параметрическое представление искомой поверхности тремя координатными поверхностями, $\boldsymbol{r}_d\ (d) = \{\ x_d(d),\ y_d(d),\ z_d(d)\ \}$ – параметрическое представление траектории перемещения начала координат генератрисы, $\boldsymbol{M}_d(d)$ – матрица 3х3 направляющих косинусов сопровождающего триэдра при перемещении по траектории, $\boldsymbol{M}_o(d)$ – опциональная (задаваемая извне) матрица вращения, $\boldsymbol{r}_g(d,g) = \{\ x_g(d,g),\ y_g(d,g),\ z_g(d,g)\ \}$ – параметрическое представление образующей, иногда может быть двумерным с соответствующей коррекцией матрицы $\boldsymbol{M}_o$.

Перемещение имеет три составляющие: перенос, вращение, изменение размеров и формы.

Перенос определяется траекторией перемещения $\boldsymbol{r}_d\ (d)$, которая задает не только положение начала координат переносимого множества, но и определяет его ориентацию в пространстве. В случае, когда $\boldsymbol{r}_d(d)=const$, задают изображение поверхностей вращения, в противном случае – поверхности серпентинов.

У серпентинов возможен параллельный перенос, при параллельном переносе $\boldsymbol{M}_d = \boldsymbol{E}$. В случае параллельного перенесения нормаль генератрисы параллельна касательной к директрисе, это выполняется матрицей направляющих косинусов $\boldsymbol{M}_d$, которая в случае параллельного перенесения определяется сопровождающим триэдром. При перемещении по траектории может выполняться текущее масштабирование переносимого множества в целом или по координатным направлениям, а также другие изменения формы, например, интерполяция форм. Перемещение может сопровождаться вращением. Различают типы вращения: пируэт, кувырок, винт и кручение, которые задаются матрицей $\boldsymbol{M}_o$. С помощью серпентинов можно задавать поверхности трубопроводов различного профиля, змеевики, гофрированные поверхности, гирлянды, цепочки, различные узлы, детали технического происхождения и т.п.

Поверхности вращения создаются при перемещениях с одной неподвижной точкой, здесь r_d и M_d остаются неизменными. Если предположить, что окружность вращения конформно отображается на другие линии, то понятие поверхностей вращения существенно расширяется: к их числу относятся кроме сфер, цилиндров, конусов, торов еще и многогранники, звезды, винты, тороиды, узлы, геликоиды, разного рода технические детали и т.п.

Вычислительные модели

Заключительной операцией является создание графического изображения поверхности, для чего используются графические операторы, создающие растровые псевдообъемные полутоновые картины. Подобные операторы, как правило, имеются в развитых средах программирования таких как Delphi, Mathematica и др. [6, 7]. Для построения графического изображения в параметрический графический оператор нужно ввести набор опций: имя поверхности, по которому определяется доступ к сеточной модели и ее интерполянту, координаты точки зрения, источников освещения и др.. Располагая этими данными, графический оператор создаст требуемое графическое изображение.

Литература

1. Ньюмен У.,Спрулл Р., Основы интерактивной машинной графики – М.: Мир, 1976. – 574 с.
2. Корн Г.,Корн Т., Справочник по математике - Москва, Наука, 1974.- 832 с.
3. Грездов Г.И., Филиппенко Т.К., Фундаментальная локальная сплайн-интерполяция табличных функций нескольких переменных, К.: - 48 с. (Препринт / НАН Украины. Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике, №3/98).
4. Аммерал Л., Интерактивная трехмерная машинная графика - М, Сол Систем, 1992. – 318 с.
5. Грездов Г.И., Филиппенко Т.К., Метод параметрической интерполяции в машинной графике, К.- 2007: - 56 с. (Препринт / НАН Украины. Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике, №1/2007).
6. Сван Т., Delphi 4: Библия разработчика – К., М., СПб.: Диалектика, 1998. – 672 с.
7. Wolfram S., Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley, 1991. – 962 с.

Поступила в редакцию 30.03.2010