

2 ЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

2.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Приступаючи до вивчення лінійних кіл постійного струму, перш за все необхідно ознайомитися із основними поняттями електричного кола, схеми, її складовими елементами, поняттями електричного струму, напруги, електрорушійної сили (ЕРС), потужності.

Електричне коло – це сукупність пристроїв і об'єктів, що утворюють шляхи для електричного струму, електромагнітні процеси в яких можуть бути описані за допомогою понять електрорушійної сили, струму та напруги.

Складові частини електричного кола можна розділити на дві групи: джерела електричної енергії та приймачі (навантаження). Вони з'єднуються між собою за допомогою з'єднувальних проводів.

Джерелами електричної енергії (гальванічні елементи, акумулятори, генератори постійного струму, тощо) є різні пристрої, в яких відбувається перетворення хімічної, теплової, механічної та інших видів енергії в електричну.

Приймачі електричної енергії (реостати, електричні двигуни, освітлювальні прилади, тощо) – це елементи електричного кола, в яких відбувається перетворення електричної енергії в інші види енергії (теплову, механічну, хімічну).

Активні кола – це кола, які мають джерела енергії, а *пасивні* – ті, що не мають їх.

Графічне зображення електричного кола за допомогою умовних позначень називається *схемою*. Схема простого електричного кола подана на рис. 2.1.

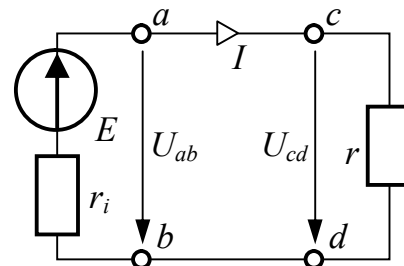


Рис. 2.1

Джерела електричної енергії характеризуються ЕРС E , яка може бути визначена як робота сторонніх сил (тобто сил, обумовлених неелектромагнітними процесами, такими як хімічні реакції, теплові процеси, дія механічних сил), що витрачається при переміщенні одиничного позитивного заряду усередині джерела від затискача з меншим потенціалом до затискача з більшим потенціалом. ЕРС – скалярна величина, напрям якої збігається з напрямом переміщення позитивних зарядів усередині джерела, тобто з напрямом струму, спричиненого цим джерелом.

Електричний *струм провідності* або *струм переносу* – це упорядкований рух вільних носіїв електричного заряду. Такими носіями є: у металах – негативно заряджені частинки – електрони, в рідинах і газах – як позитивно, так і негативно заряджені іони.

Кількісно струм оцінюється зарядом, що проходить крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу, тобто $i = \frac{dq}{dt}$.

У разі постійного струму $I = \frac{q}{t}$.

У міжнародній системі одиниць (СІ) заряд виражають в кулонах ($Kл$), час – в секундах (c), струм – в амперах (A).

При переміщенні одиничного позитивного заряду із точки a у точку b силами електричного поля виконується робота, що дорівнює різниці потенціалів цих точок. Нагадаємо, що потенціал довільної точки електричного поля визначається як робота, що виконується силами електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду із даної точки у точку з нульовим потенціалом. За точку з нульовим потенціалом зазвичай береться точка, віддалена в нескінченність або на поверхні землі.

Різниця потенціалів точок a і b називається *напругою* між цими точками: $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$. У системі одиниць СІ напругу, як і ЕРС, виражають у Вольтах (B). Напруга являє собою скалярну величину, якій надають певний напрям. Зазвичай під позитивним напрямом напруги розуміють напрям від точки кола із більшим потенціалом до точки із меншим потенціалом.

Протікання струму у внутрішньому опорі r_e джерела та в опорі навантаження r супроводжується перетворенням електричної енергії у теплову. Швидкість перетворення енергії характеризується потужністю

$$p = \frac{dW}{dt}, \text{ де } W - \text{енергія (Дж)}.$$

Потужність джерела енергії $P_{\Gamma} = E \cdot I = P_{\Pi} + \Delta P$,
де $P_{\Pi} = U \cdot I = I^2 \cdot r$ – потужність приймача енергії,
 $\Delta P = I^2 \cdot r_i$ – потужність втрат усередині джерела.

Згідно із законом збереження енергії для рис. 2.1

$$E = U_{ab} + I \cdot r_i, \text{ звідки } U_{ab} = E - I \cdot r_i,$$

тобто напруга на затискачах джерела відрізняється від ЕРС на величину внутрішнього падіння напруги. При зміні опору приймача змінюється струм кола, а отже, і напруга на затискачах джерела.

Залежність напруги на затискачах джерела від струму у ньому називається *зовнішньою характеристикою* (рис. 2.2). Точка 1 на рис. 2.2 характеризує режим неробочого ходу джерела, коли опір приймача $r = \infty$, а струм кола $I_{HX} = 0$. Очевидно, що $I_{HX} \cdot r_i = 0$, отже $U_{abHX} = U_{cdHX} = U_{HX} = E$. Таким чином, ЕРС джерела можна визначити, якщо виміряти напругу на затискачах генератора у режимі неробочого ходу.

Точка 2 на рис. 2.2 характеризує режим *короткого замикання* джерела, за якого $r = 0$, а отже, $U_{K3} = 0$. Очевидно, в цьому випадку струм кола (струм короткого замикання) можна обчислити за формулою $I_{K3} = E/r_i$.

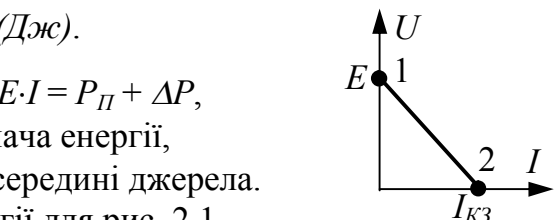


Рис. 2.2

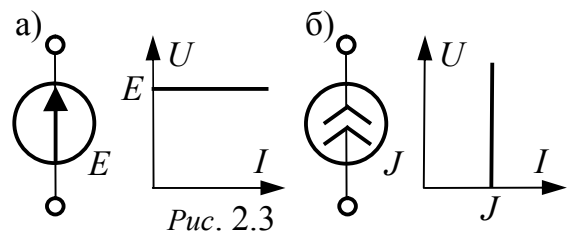


Рис. 2.3

Джерело енергії, внутрішній опір якого дорівнює нулю ($r_i = 0$) називають ідеальним *джерелом ЕРС*, а ідеальне джерело енергії з нескінченно великим внутрішнім опором ($r_i = \infty$) – *джерелом струму*. На рис. 2.3 наведені умовні позначення та зовнішні характеристики ідеальних джерел.

Для розрахунку простих кіл (або резистивних ділянок кіл) застосовують *узагальнений закон Ома*

$$I = \frac{U + \sum \pm E_i}{\sum r_k},$$

де U – спрямована по струму напруга на ділянці кола,

$\sum r_k$ – сумарний резистивний опір даної ділянки,

$\sum \pm E_i$ – алгебрична сума ЕРС у вітці із шуканим струмом, причому зі знаком «плюс» беруть ЕРС, напрям яких збігається з напрямом струму.

При розрахунку режиму роботи електричного кола, як правило, потрібно визначити струми, напруги та потужності на всіх його ділянках при заданих значеннях ЕРС джерел і опорів кола. Такий розрахунок базується на застосуванні законів Кірхгофа, для запису яких введемо поняття вітки, вузла і контуру.

Віткою електричного кола називається ділянка, яка складається з одного або декількох елементів, розміщених між двома вузлами та через які тече однаковий струм. Таке з'єднання елементів називається *послідовним* (рис. 2.4).

Точка електричного кола називається *вузлом*, якщо в ній з'єднуються не менш, як три вітки (рис. 2.5, вузол A).

Контуром електричного кола є замкнений шлях по вітках електричного кола, причому кожна вітка і кожен вузол на шляху зустрічаються лише одного разу.

Для складання рівнянь за законами Кірхгофа необхідно задатися додатними напрямками струмів у кожній вітці.

У відповідності до *першого закону Кірхгофа* алгебрична сума струмів у вузлі дорівнює нулю. Математично: $\sum_q \pm I_q = 0$, де струми, що направлені до

вузла, рекомендується брати із знаком «мінус», а ті, що від вузла, – із «плюсом».

Згідно *другого закону Кірхгофа* у будь-якому контурі електричного кола алгебрична сума напруг на окремих ділянках дорівнює алгебричній сумі ЕРС, що діють у цьому ж контурі: $\sum_q \pm I_q \cdot R_q = \sum_p \pm E_p$. Напрямок обходу

контуру вибирається довільно; ЕРС і напруги, напрями яких збігаються з обходом контуру, враховується у рівнянні із знаком «плюс», а направлені проти обходу – із знаком «мінус». При складанні рівнянь слід дотримуватися правила, щоб в кожному наступному контурі була хоч би одна вітка, що не увійшла до попередніх контурів. Такі контури називають *незалежними*. Другий закон Кірхгофа не має сенсу застосовувати до контурів, що містять джерела струму.

Універсальною перевіркою розрахунку струмів є складання балансу потужностей (БП), який є наслідком закону збереження енергії і декларує, що потужність всіх джерел дорівнює потужності всіх приймачів. З приводу складання БП дивись, наприклад, задачу 2.6.

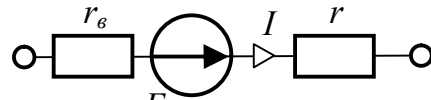


Рис. 2.4

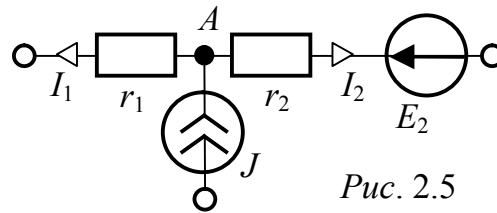


Рис. 2.5

2.2 РОЗРАХУНОК КІЛ ЗА ЗАКОНАМИ ОМА І КІРХГОФА

ЗАДАЧА 2.1. У колі рис. 2.6,а визначити струми при двох положеннях ключа S , якщо $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, $R_5 = 6 \text{ Ом}$, $U = 36 \text{ В}$.

Розв'язання

Вкажемо додатні напрями всіх струмів (рис. 2.6,а).

Виконаємо розрахунок кола при розімкненому ключі S . Резистори R_2 та R_3 з'єднані послідовно, замінюємо їх одним еквівалентним: $R_{23} = R_2 + R_3 = 1 + 2 = 3 \text{ Ом}$.

Одержуємо схему рис. 2.6,б.

Паралельно з'єднані резистори R_{23} та R_4 замінюємо опором

$$R_{234} = R_{23} \cdot R_4 / (R_{23} + R_4) = 3 \cdot 6 / (3 + 6) = 2 \text{ Ом}.$$

Отримаємо коло із послідовним з'єднанням резисторів R_1 - R_{234} - R_5 .

Вхідний опір отриманого кола:

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_{234} + R_5 = 4 + 2 + 6 = 12 \text{ Ом}.$$

Вхідний струм за законом Ома

$$I_1 = I_5 = U / R_{\text{вх}} = 36 / 12 = 3 \text{ А}.$$

Решту струмів визначаємо за правилом розкиду струму в паралельні вітки:

$$I_2 = I_3 = I_1 \cdot R_4 / (R_{23} + R_4) = 3 \cdot 6 / 9 = 2 \text{ А};$$

$$I_4 = I_1 \cdot R_{23} / (R_{23} + R_4) = 3 \cdot 3 / 9 = 1 \text{ А}.$$

Виконаємо розрахунок кола при замкненому ключі S (рис. 2.7,а).

У зв'язку з неочевидністю типу з'єднання опорів пронумеруємо точки, що мають різні потенціали (див. рис. 2.7,а), і накреслимо схему більш наочно (рис. 2.7,б). Два вузли позначено цифрою «3», оскільки вони з'єднані переключкою і, отже, мають однаковий потенціал. У цьому колі резистори R_3 і R_5 з'єднані паралельно, тому

$$R_{35} = R_3 \cdot R_5 / (R_3 + R_5) = 2 \cdot 6 / (2 + 6) = 1,5 \text{ Ом}.$$

Отриманий опір R_{35} з'єднаний послідовно із R_4 :

$$R_{354} = R_{35} + R_4 = 1,5 + 6 = 7,5 \text{ Ом}.$$

Далі маємо паралельне з'єднання $R_{354} \parallel R_2$:

$$R_{3542} = R_{354} \cdot R_2 / (R_{354} + R_2) = 7,5 \cdot 1 / (7,5 + 1) = 0,882 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола: $R_{\text{вх}} = R_1 + R_{3542} = 4 + 0,882 = 4,882 \text{ Ом}$.

Тепер обчислюємо струми:

$$I_1 = U / R_{\text{вх}} = 36 / 4,882 = 7,374 \text{ А};$$

$$I_2 = I_1 \cdot R_{354} / (R_{354} + R_2) = 7,374 \cdot 7,5 / 8,5 = 6,506 \text{ А};$$

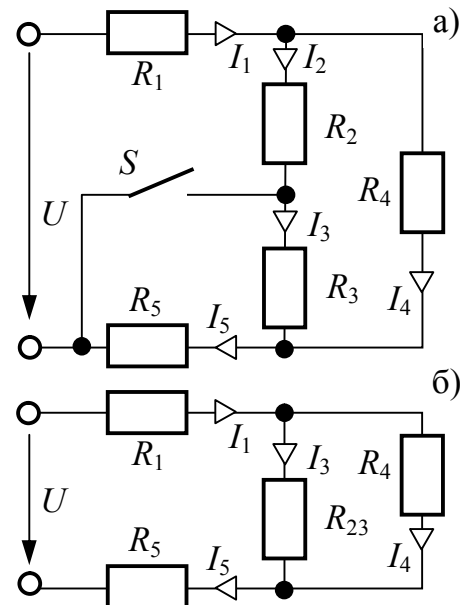


Рис. 2.6

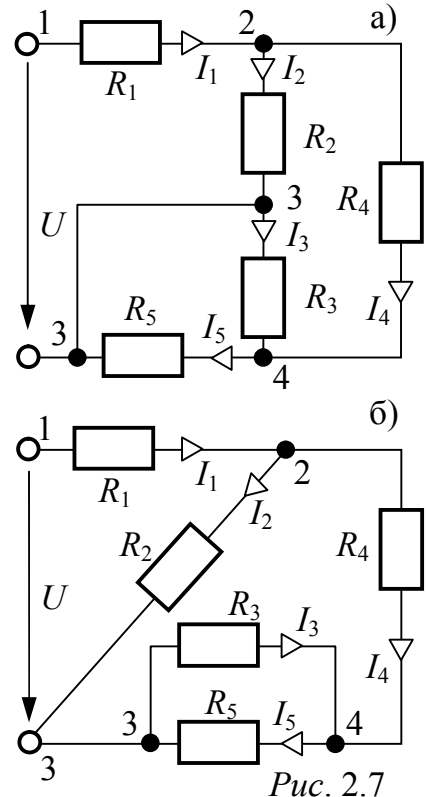


Рис. 2.7

$$I_4 = I_1 \cdot R_2 / (R_{354} + R_2) = 7,374 \cdot 1 / 8,5 = 0,868 \text{ A};$$

$$I_5 = I_4 \cdot R_3 / (R_3 + R_5) = 0,868 \cdot 2 / (2 + 6) = 0,217 \text{ A};$$

$$I_3 = I_5 - I_4 = 0,217 - 0,868 = -0,651 \text{ A}.$$

ЗАДАЧА 2.2. Потенціали вузлів ділянки кола рис. 2.8 виміряні вольтметром V і дорівнюють: $\varphi_1 = -15 \text{ В}$, $\varphi_2 = 52 \text{ В}$, $\varphi_3 = 64 \text{ В}$.

За допомогою закону Ома і першого закону Кірхгофа визначити всі показані на рисунку струми, якщо $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$, $E_1 = 80 \text{ В}$, $E_3 = 70 \text{ В}$.

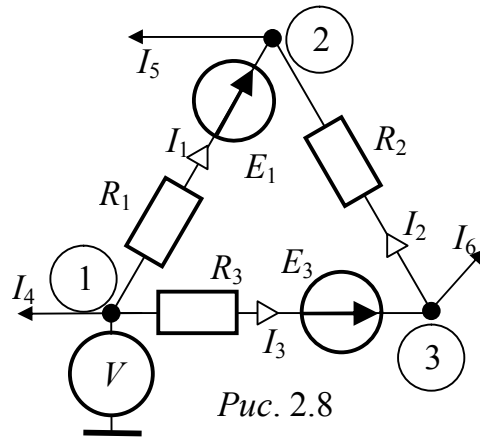


Рис. 2.8

Розв'язання

Відповідно до закону Ома в узагальненій формі обчислимо:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1) / R_1 = (-15 - 52 + 80) / 5 = 2,6 \text{ A};$$

$$I_2 = (\varphi_3 - \varphi_2) / R_2 = (64 - 52) / 10 = 1,2 \text{ A};$$

$$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_3) / R_3 = (-15 - 64 + 70) / 12 = -0,75 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа визначаємо решту струмів:

$$I_4 = -(I_1 + I_3) = -(2,6 - 0,75) = -1,85 \text{ A};$$

$$I_5 = I_1 + I_2 = 2,6 + 1,2 = 3,8 \text{ A};$$

$$I_6 = I_3 - I_2 = -0,75 - 1,2 = -1,95 \text{ A}.$$

ЗАДАЧА 2.3. Для схеми кола рис. 2.9 визначити еквівалентні опори між затискачами a і b , c і d , d і f , якщо $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 15 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 6 \text{ Ом}$.

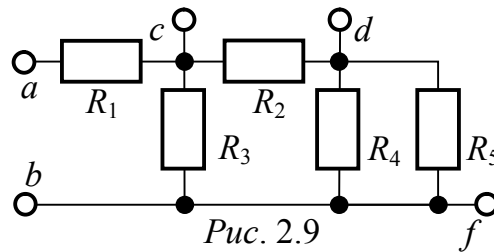


Рис. 2.9

Відповіді: $R_{df} = (R_4^{-1} + R_5^{-1} + (R_2 + R_3)^{-1})^{-1} = 4 \text{ Ом}$,

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_3 \cdot \left(R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} = 12 \text{ Ом},$$

$$R_{cd} = \frac{R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} = 4 \text{ Ом}.$$

ЗАДАЧА 2.4. Визначити опір кола між точками a та b при розімкненому і замкненому рубильнику S (рис. 2.10) якщо

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 10 \text{ Ом}.$$

Відповідь: при розімкненому контакті $12,1 \text{ Ом}$, при замкненому – $8,33 \text{ Ом}$.

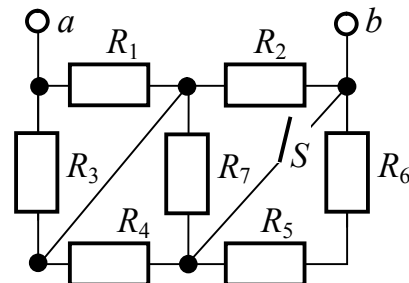


Рис. 2.10

ЗАДАЧА 2.5. Визначити опір кожного з кіл рис. 2.11 між затискачами 1-1' при неробочому ході (точки 2 і 2' розімкнені) і при короткому замиканні (точки 2 і 2' перемкнуті). Опори в Омах задано на схемі.

Відповіді: а) $R_{1HX} = 120 \text{ Ом}$, $R_{1K3} = 72 \text{ Ом}$; б) $R_{1HX} = 20 \text{ Ом}$, $R_{1K3} = 18 \text{ Ом}$;

в) $R_{1HX} = 838 \text{ Ом}, R_{1K3} = 200 \text{ Ом}.$

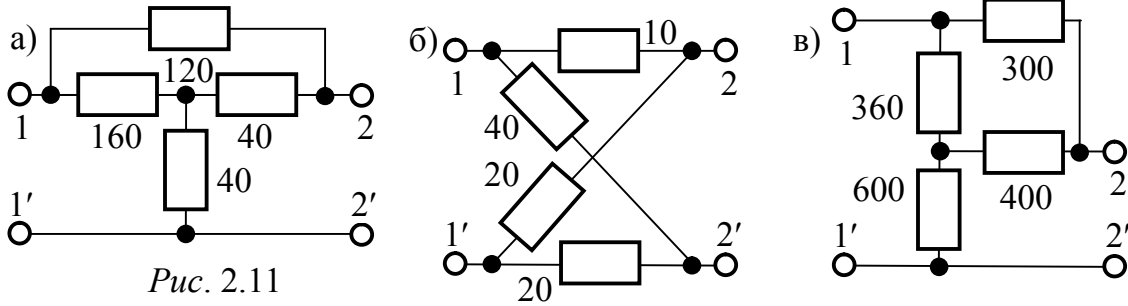


Рис. 2.11

ЗАДАЧА 2.6. Зовнішня характеристика генератора постійного струму була знята експериментально за схемою рис. 2.12,а, і подана на рис. 2.12,б. Початкова ділянка зовнішньої характеристики достатньо точно описується рівнянням прямої лінії $U = 110 - 0,25 \cdot I$, де $U[B]$, $I[A]$.

Номинальний струм генератора $I_n = 40 \text{ A}$, налаштування максимального струмового захисту $I_{max} = 60 \text{ A}$, реальний струм короткого замикання $I_{K3} = 200 \text{ A}$.

Побудувати схеми заміщення генератора та знайти їх параметри.

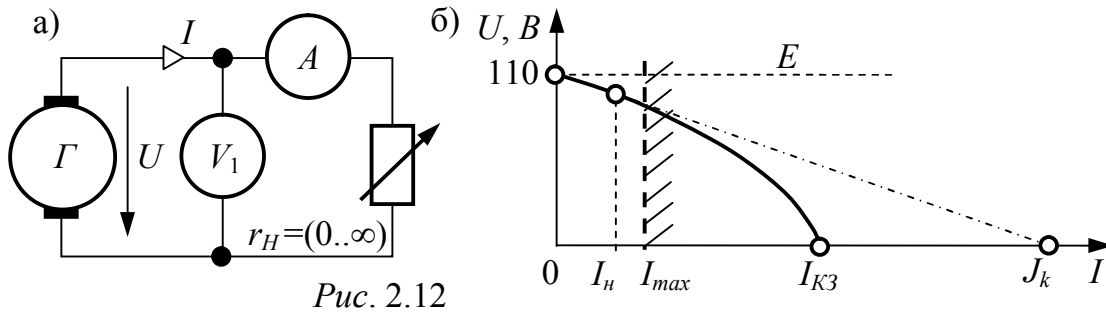


Рис. 2.12

Розв'язання

ЕРС генератора $E = U_{HX} = 110 \text{ В}$, його внутрішній опір $r_i = 0,25 \text{ Ом}$, розрахунковий струм короткого замикання для робочої ділянки зовнішньої характеристики $J_k = \frac{E}{r_i} = \frac{110}{0,25} = 440 \text{ A}$. Схема заміщення генератора із послі-

довним з'єднанням джерела ЕРС $E = 110 \text{ В}$ і опору $r_i = 0,25 \text{ Ом}$ наведена на рис. 2.13,а; схема із паралельним з'єднанням джерела струму і опору наведена на рис. 2.13,б.

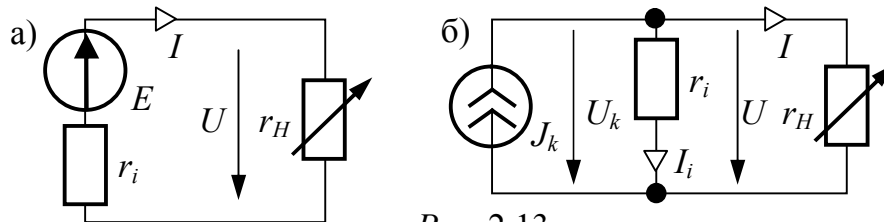


Рис. 2.13

Для послідовної схеми заміщення відповідно до другого закону Кірхгофа отримуємо $I \cdot r_H + I \cdot r_i = E$.

Помножимо весь цей вираз на струм кола I і отримаємо

$$I^2 \cdot r_H + I^2 \cdot r_i = E \cdot I. \quad (2.1)$$

Відповідно до закону Джоуля-Ленца

$I^2 \cdot r_H = P_H$ – потужність, що споживається навантаженням,

$I^2 \cdot r_i = \Delta P_i$ – потужність, що розсіюється як тепло у внутрішньому опорі генератора,

$E \cdot I = P_G$ – потужність джерела енергії (джерела ЕРС).

Вираз (2.1) відображає одну з основних властивостей електричного кола: сумарна потужність, яка генерується джерелами енергії, дорівнює сумарній потужності споживачів кола. Цю властивість можна сформулювати так: для електричного кола виконується *баланс потужностей*.

Для паралельної схеми заміщення (рис. 2.13,б) на підставі першого закону Кірхгофа отримуємо $I + I_i = J_k$. (2.2)

Для цієї схеми напруги на затискачах джерела струму U_k и на затискачах опорів U однакові. Помножимо отриманий вираз (2.2) на $U_k = U$ та одержимо: $U \cdot I + U \cdot I_i = U_k \cdot J_k$.

Але за законом Ома $U = I \cdot r_H$, $U = I_i \cdot r_i$; і ми остаточно приходимо до виразу балансу потужностей для схеми із джерелом струму:

$$I^2 \cdot r_H + I_i^2 \cdot r_i = P_G = U_k \cdot J_k. \quad (2.3)$$

ЗАДАЧА 2.7. У електричному колі рис. 2.14 відомі опори $r_1 = 100 \text{ Ом}$, $r_2 = 150 \text{ Ом}$, $r_3 = 50 \text{ Ом}$ і напруга $U = 150 \text{ В}$. Розрахувати струми при розімкненому рубильнику S . Як зміняться струми, якщо рубильник буде замкнений?

Розв'язання

При розімкненому рубильнику S струми опорів розрахуємо за законом Ома: $I_3 = 0$, оскільки рубильник розімкнений;

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{150}{150} = 1,0 \text{ А};$$

струм на вході паралельного з'єднання знайдемо

відповідно до першого закону Кірхгофа $I = I_1 + I_2 + I_3 = 1,5 + 1 + 0 = 2,5 \text{ А}$.

При замкненому рубильнику струми

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ А} \text{ – має попереднє значення,}$$

$$I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{150}{150} = 1,0 \text{ А} \text{ – також не зміниться,}$$

$$I_3 = \frac{U}{r_3} = \frac{150}{50} = 3 \text{ А.}$$

Струм загальної частини схеми зміниться:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1,5 + 1 + 3 = 5,5 \text{ А.}$$

ЗАДАЧА 2.8. Для схеми, що наведена на рис. 2.15, відомі покази приладів:

вольтметр V показує 120 В , ватметр W має показання 240 Вт . Відомі опори

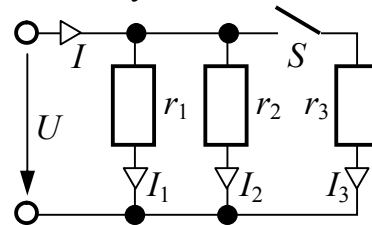


Рис. 2.14

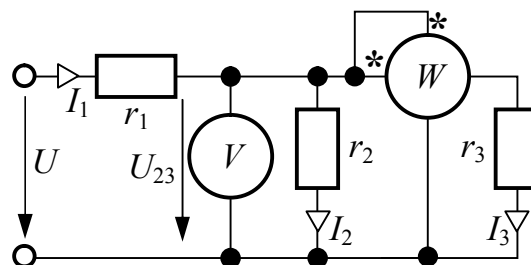


Рис. 2.15

$r_1 = 16 \text{ Ом}$, $r_2 = 40 \text{ Ом}$. Визначити струми, опір r_3 , напругу U . Перевірити баланс потужностей.

Розв'язання

Вольтметр V вимірює напругу $U_{23} = 120 \text{ В}$ на ділянці із паралельним з'єднанням опорів r_2 і r_3 . За законом Ома струм $I_2 = \frac{U_{23}}{r_2} = \frac{120}{40} = 3 \text{ А}$.

Ватметр вимірює потужність, що споживається опором r_3

$$P_3 = I_3^2 \cdot r_3 = U_{23} \cdot I_3,$$

тому $I_3 = \frac{P}{U_{23}} = \frac{240}{120} = 2 \text{ А}$, а за законом Ома $r_3 = \frac{U_{23}}{I_3} = \frac{120}{2} = 60 \text{ Ом}$.

Струм опору r_1 і джерела живлення відповідно до першого закону Кірхгофа $I_1 = I_2 + I_3 = 3 + 2 = 5 \text{ А}$.

Згідно з другим законом Кірхгофа для контуру r_1 - r_2 - U знайдемо напругу на вході схеми рис. 2.15

$$U = I_1 \cdot r_1 + U_{23} = 5 \cdot 16 + 120 = 200 \text{ В}.$$

Потужність генератора $P_{\Gamma} = U \cdot I_1 = 200 \cdot 5 = 1000 \text{ Вт}$.

Сумарна потужність приймачів

$$\Sigma P_{\Pi} = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 + I_3^2 \cdot r_3 = 5^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 40 + 2^2 \cdot 60 = 400 + 360 + 240 = 1000 \text{ Вт}.$$

Оскільки баланс потужностей $P_{\Gamma} = \Sigma P_{\Pi}$ виконується, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.9. В схемі рис. 2.16 струм $I_4 = 8 \text{ А}$. Деякі параметри схеми відомі:

$$E_1 = 120 \text{ В}, E_4 = 80 \text{ В}, E_5 = 6 \text{ В}, r_2 = r_4 = 6 \text{ Ом}, r_3 = r_5 = 2 \text{ Ом}, r_6 = 3 \text{ Ом}.$$

Визначити решту струмів, знайти опір r_1 . Для зовнішнього контуру побудувати потенціальну діаграму.

Розв'язання

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру a - b - p - a маємо

$$I_4 \cdot r_4 + I_3 \cdot r_3 = E_4, \text{ звідки}$$

$$I_3 = \frac{E_4 - I_4 \cdot r_4}{r_3} = \frac{80 - 8 \cdot 6}{2} = 16 \text{ А}.$$

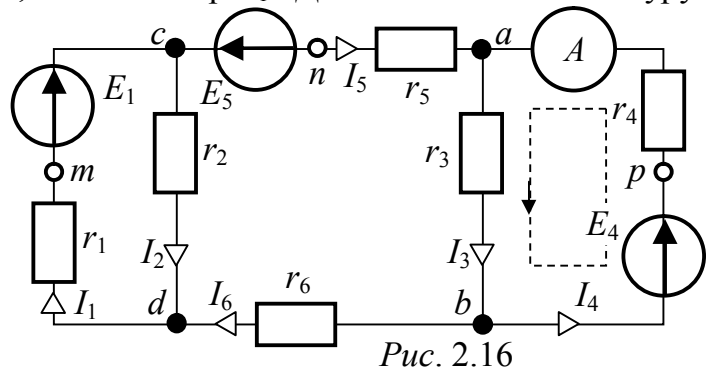


Рис. 2.16

За першим законом Кірхгофа для вузла a одержуємо $I_3 - I_5 - I_4 = 0$,

$$\text{для вузла } b \quad I_6 + I_4 - I_3 = 0,$$

звідки $I_5 = I_6 = I_3 - I_4 = 16 - 8 = 8 \text{ А}$.

За другим законом Кірхгофа для середнього контуру схеми маємо

$$I_6 \cdot r_6 - I_2 \cdot r_2 + I_5 \cdot r_5 + I_3 \cdot r_3 = -E_5, \text{ звідки}$$

$$I_2 = \frac{I_6 \cdot r_6 + I_5 \cdot r_5 + I_3 \cdot r_3 + E_5}{r_2} = \frac{8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 6}{6} = 13 \text{ А}.$$

За першим законом Кірхгофа для вузла d

$$I_1 = I_2 + I_6 = 13 + 8 = 21 \text{ А}.$$

На підставі другого закону Кірхгофа для лівого контуру схеми маємо

$$I_2 \cdot r_2 + I_1 \cdot r_1 = E_1, \text{ звідки } r_1 = \frac{E_1 - I_2 r_2}{I_1} = \frac{120 - 13 \cdot 6}{21} = 2 \text{ Ом.}$$

Потенціальна діаграма контуру схеми – це графік зміни потенціалу залежно від опорів, що входять в контур. У зовнішньому контурі проставимо так точки n, m, p , яких бракує, щоб кожен елемент був обмежений двома точками. Прийнемо потенціал однієї з точок рівним нулю, наприклад, $\varphi_d = 0$. Задасмося напрямом обходу контуру, наприклад, за годинниковою стрілкою і розрахуємо потенціали наступних після d точок:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \varphi_d - I_1 \cdot r_1 = 0 - 21 \cdot 2 = -42 \text{ В}; & \varphi_c &= \varphi_m + E_1 = -42 + 120 = 78 \text{ В}; \\ \varphi_n &= \varphi_c - E_5 = 78 - 6 = 72 \text{ В}; & \varphi_a &= \varphi_n - I_5 \cdot r_5 = 72 - 8 \cdot 2 = 56 \text{ В}; \\ \varphi_p &= \varphi_a + I_4 \cdot r_4 = 56 + 8 \cdot 6 = 104 \text{ В}; & \varphi_b &= \varphi_p - E_4 = 104 - 80 = 24 \text{ В}; \\ \varphi_d &= \varphi_b - I_6 \cdot r_6 = 24 - 8 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

Максимальне значення потенціалів точок складає 104 В , а мінімальне – $(-42) \text{ В}$, сумарний опір елементів, що входять в даний контур,

$$\Sigma r = r_1 + r_5 + r_4 + r_6 = 2 + 2 + 6 + 3 = 13 \text{ Ом.}$$

З урахуванням цього вибираємо масштаби. Потенціальна діаграма контуру подана на рис. 2.17.

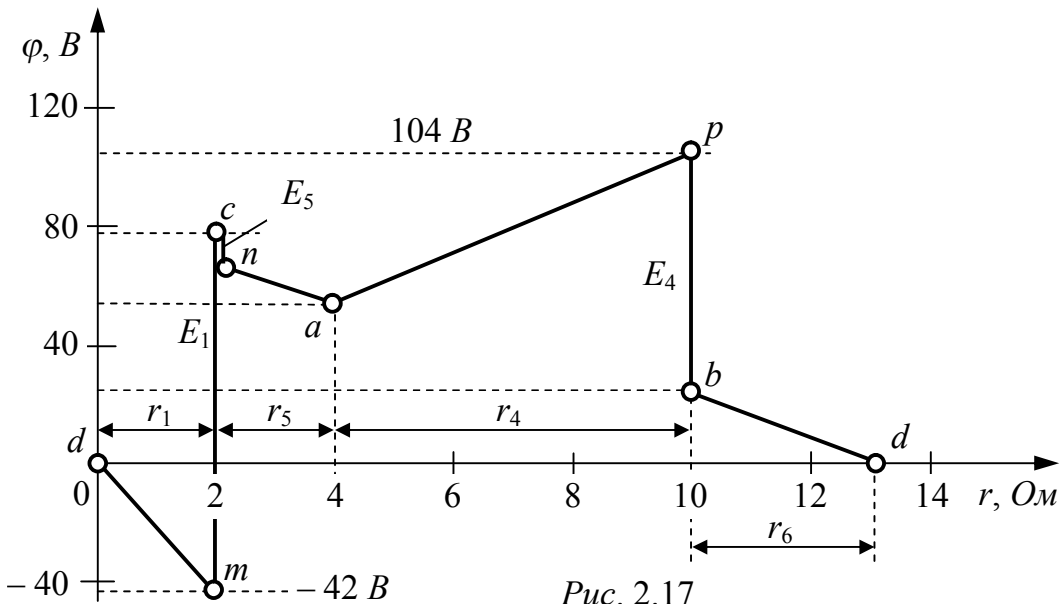


Рис. 2.17

ЗАДАЧА 2.10. Для схеми рис. 2.18 відомо, що $r_2 = 4 \text{ Ом}$, $r_3 = 10 \text{ Ом}$, $r_4 = 10 \text{ Ом}$, $r_6 = 5 \text{ Ом}$, $I_4 = 2 \text{ А}$, $I_3 = 1 \text{ А}$, потужність, що розсіюється в опорі r_5 складає 20 Вт .

Визначити r_5, E_1, E_2 , знайти решту струмів, перевірити баланс потужностей.

Відповіді: $r_5 = 20 \text{ Ом}$, $E_1 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 52 \text{ В}$,
 $I_1 = -1 \text{ А}$, $I_2 = 3 \text{ А}$, $I_5 = 1 \text{ А}$, $I_6 = 2 \text{ А}$, $\Sigma P_{\Gamma} = \Sigma P_{\Pi} = 126 \text{ Вт}$.

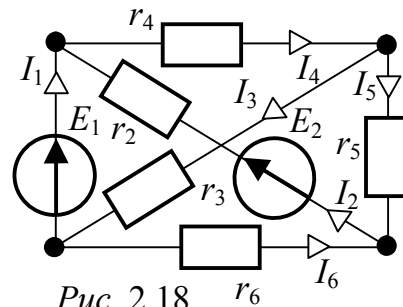
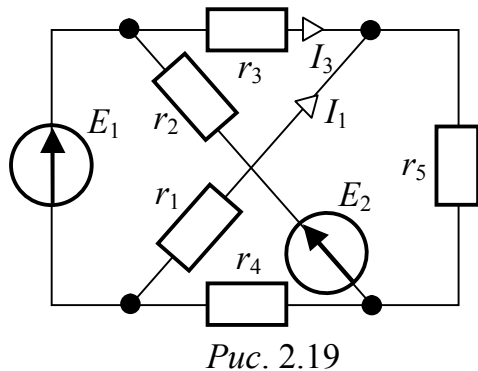
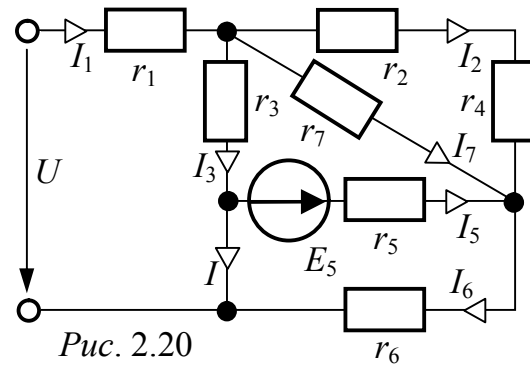


Рис. 2.18

ЗАДАЧА 2.11. У колі рис. 2.19 задані: струм в опорі r_3 $I_3 = 2 \text{ A}$, в опорі r_1 $I_1 = 1 \text{ A}$; опори кола: $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 4 \text{ Ом}$, $r_3 = 10 \text{ Ом}$, $r_4 = 5 \text{ Ом}$; потужність, що розсіюється в опорі r_5 дорівнює 20 Вт . Визначити r_5 , E_1 та E_2 .
Відповіді: $r_5 = 20 \text{ Ом}$, $E_1 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 52 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 2.12. В електричному колі рис. 2.20 визначити напругу мережі U , опір r_3 , ЕРС E_5 , струм I , якщо: $r_1 = 4 \text{ Ом}$, $r_2 = 3 \text{ Ом}$, $r_4 = 3 \text{ Ом}$, $r_5 = 1 \text{ Ом}$, $r_6 = 4 \text{ Ом}$, $r_7 = 3 \text{ Ом}$, $I_3 = 5 \text{ A}$; $I_5 = 1 \text{ A}$; $I_6 = 2 \text{ A}$. Перевірити баланс потужностей.
Відповіді: $r_3 = 2 \text{ Ом}$, $E_5 = 9 \text{ В}$, $I = 4 \text{ A}$, $\Sigma P_{\Gamma} = \Sigma P_{\Pi} = 213 \text{ Вт}$.



2.3 МЕТОД РІВНЯНЬ КІРХГОФА

У цьому підрозділі розглядається застосування законів Кірхгофа при розв'язанні задачі розрахунку довільного електричного кола в класичній постановці: для заданої схеми з відомими параметрами (ЕРС і струми джерел струму, опори приймачів енергії) потрібно розрахувати струми.

Рекомендується наступний порядок розрахунку електричного кола:

1. Коло аналізується, тобто визначається кількість вузлів « U », віток « B », кількість особливих віток (вітки з нульовим опором « B_0 », вітки з відомим струмом « B_C »), приймаються довільні напрями невідомих струмів віток.

2. Складається система із $N_I = U - 1$ лінійно незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа для всіх крім одного будь-якого вузлів.

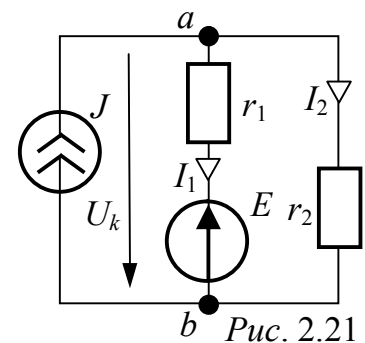
3. Решта $N_{II} = B - (U - 1) - B_C$ лінійно незалежних рівнянь складається на підставі другого закону Кірхгофа для незалежних контурів, що не містять джерела струму.

4. Розв'язують систему $N = N_I + N_{II}$ рівнянь і визначають величини струмів.

5. Правильність розв'язання перевіряється складанням балансу потужностей: $P_{\Gamma} = P_{\Pi}$, тобто

$$\Sigma E \cdot I + \Sigma J_k \cdot U_k = \Sigma I^2 \cdot r.$$

Напруга на затискачах джерела струму визначається за другим законом Кірхгофа, а відносна похибка по балансу потужностей не повинна перевищувати 3 – 5%.



ЗАДАЧА 2.13. Методом рівнянь Кірхгофа розрахувати струми в схемі рис. 2.21 при наступних параметрах: $J = 3 \text{ A}$, $E = 30 \text{ В}$, $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 5 \text{ Ом}$.

Розв'язання

Довільно вибрані напрями струмів I_1 і I_2 , а також напруги на затискачах джерела струму U_k вказані на схемі.

Аналіз кола: вузлів – $U = 2$; віток – $B = 3$; віток з відомим струмом – $B_C = 1$.

Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа: $N_I = U - 1 = 1$;

кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа: $N_{II} = B - N_I - B_C = 1$.

Система розрахункових рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - J = 0, \\ I_2 \cdot r_2 - I_1 \cdot r_1 = E. \end{cases}$$

Після підстановки чисел і переносу відомих у праву частину рівнянь маємо:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 3, \\ -10 \cdot I_1 + 5 \cdot I_2 = 30. \end{cases}$$

Розв'язав цю систему, маємо: $I_1 = -1 \text{ A}$, $I_2 = 4 \text{ A}$.

За допомогою другого закону Кірхгофа для контуру, що включає U_k та r_2 , одержуємо: $U_k - I_2 \cdot r_2 = 0$; $U_k = I_2 \cdot r_2 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ B}$.

Складаємо баланс потужностей $U_k \cdot J - E \cdot I_1 = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2$;

$$20 \cdot 3 - 30 \cdot (-1) = 1^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 5 \text{ або } 90 \text{ (Вт)} = 10 + 80 \text{ (Вт)},$$

тобто БП виконується.

ЗАДАЧА 2.14. Методом рівнянь Кірхгофа розрахувати струми в схемі рис. 2.22,а при наступних параметрах:

$$J_1 = 10 \text{ A}, \quad E_2 = 100 \text{ B}, \quad E_6 = 300 \text{ B}, \quad r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 20 \text{ Ом}.$$

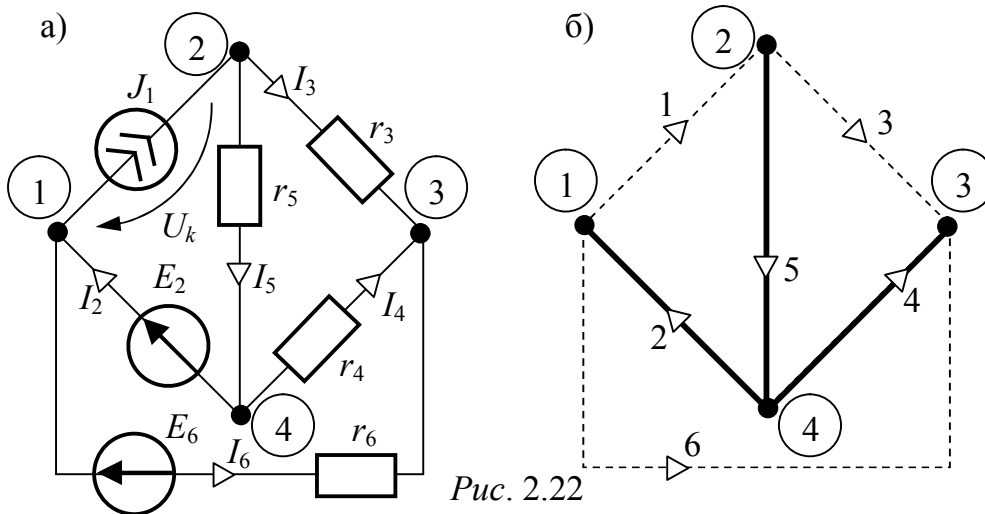


Рис. 2.22

Розв'язання

На схемі вказані довільно вибрані напрями U_k , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 .

Для цієї схеми кількість вузлів $U = 4$, а кількість віток з невідомими струмами $B - B_C = 5$.

Рівняння, записані за першим законом Кірхгофа для вузлів «1», «2», «3», відповідно, мають вигляд:

$$J_1 - I_2 + I_6 = 0; \quad I_3 + I_5 - J_1 = 0; \quad -I_3 - I_4 - I_6 = 0. \quad (2.4)$$

Для складання лінійно незалежних рівнянь за другим законом Кірхгофа скористаємося направленим графом електричного кола рис. 2.22,б. Цей граф побудований з урахуванням однієї особливості вихідного електричного кола: схема має вітку з джерелом струму J_1 , внутрішній опір якого $r_i = \infty$ і ЕРС $E_i = \infty$. Тому для контуру з джерелом струму неможливо записати рівняння за другим законом Кірхгофа у вигляді $\Sigma I \cdot r = \Sigma E$, оскільки воно стає невизначеним:

$$I_5 \cdot r_5 + J_1 \cdot r_i = E_2 + E_i \quad \text{або} \quad I_5 \cdot r_5 + \infty = E_2 + \infty.$$

Між іншим, необхідно пам'ятати, що нескінченності, що стоять в різних частинах рівняння можна об'єднати в лівій частині поданого рівняння, причому їх різниця дасть кінцеве число U_k , що виходить з рівняння, записаного за другим законом Кірхгофа для контуру, що включає напругу $U_k = E_i - J_1 \cdot r_i$ замість внутрішнього кола джерела струму: $I_5 \cdot r_5 - U_k = E_2$.

Таким чином, вказаний контур використовується для визначення напруги $U_k = -E_2 + I_5 \cdot r_5$ на затискачах джерела струму, а для складання рівнянь для розрахунку невідомих струмів віток використовуємо незалежні контури з невідомими струмами віток зв'язку, обходячи їх у напрямі струмів віток зв'язку.

$$\text{Для контуру з вітками 3, 4, 5 одержуємо} \quad I_3 \cdot r_3 - I_4 \cdot r_4 - I_5 \cdot r_5 = 0, \quad (2.5)$$

$$\text{для контуру з вітками 6, 4, 2} \quad I_6 \cdot r_6 - I_4 \cdot r_4 = -E_6 + E_2. \quad (2.6)$$

Система розрахункових рівнянь (2.4), (2.5), (2.6) включає в себе 5 рівнянь. Зменшимо число рівнянь у системі за допомогою методу підстановки. Для цього із рівнянь (2.4) виразимо струми віток дерева графу через струми віток зв'язку: $I_2 = J_1 + I_6$; $I_5 = J_1 - I_3$; $I_4 = -I_3 - I_6$.

Отримані вирази підставимо в (2.5) та (2.6) і приведемо подібні. Отримаємо $I_3 \cdot (r_3 + r_4 + r_5) + I_6 \cdot r_4 - J_1 \cdot r_5 = 0$, (2.7)

$$I_6 \cdot (r_6 + r_4) + I_3 \cdot r_4 = -E_6 + E_2. \quad (2.8)$$

Підставимо числа в отриману систему і перенесемо відоме $J_1 \cdot r_5$ в праву частину (2.7):
$$\begin{cases} 60 \cdot I_3 + 20 \cdot I_6 = 200, \\ 20 \cdot I_3 + 40 \cdot I_6 = -200. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 60 & 20 \\ 20 & 40 \end{vmatrix} = 60 \cdot 40 - 20 \cdot 20 = 2000.$$

Допоміжні визначники

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 200 & 20 \\ -200 & 40 \end{vmatrix} = 200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ -1 & 40 \end{vmatrix} = 200 \cdot (40 + 20) = 12000,$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 60 & 200 \\ 20 & -200 \end{vmatrix} = 200 \cdot \begin{vmatrix} 60 & 1 \\ 20 & -1 \end{vmatrix} = 200 \cdot (-60 - 20) = -16000.$$

$$\text{Струми віток зв'язку} \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12000}{2000} = 6 \text{ A}, \quad I_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta} = \frac{-16000}{2000} = -8 \text{ A}.$$

$$\text{Струми віток дерева} \quad I_2 = J_1 + I_6 = 10 - 8 = 2 \text{ A}, \\ I_4 = -I_3 - I_6 = -6 - (-8) = 2 \text{ A},$$

$$I_5 = J_1 - I_3 = 10 - 6 = 4 \text{ A.}$$

Напруга на затискачах джерела струму

$$U_k = -E_2 + I_5 \cdot r_5 = -100 + 4 \cdot 20 = -20 \text{ B.}$$

Баланс потужностей $U_k \cdot J_1 + E_2 \cdot I_2 - E_6 \cdot I_6 = I_3^2 \cdot r_3 + I_4^2 \cdot r_4 + I_5^2 \cdot r_5 + I_6^2 \cdot r_6$.

$$-20 \cdot 10 + 100 \cdot 2 - 300 \cdot (-8) = 6^2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 20 + 4^2 \cdot 20 + 8^2 \cdot 20,$$

$$2400 \text{ Вт} = 20 \cdot (36 + 4 \cdot 16 + 64) = 20 \cdot 120 = 2400 \text{ Вт.}$$

Баланс потужностей зійшовся, задача розрахунку струмів розв'язана вірно.

Відмітимо, що використаний метод підстановки для зменшення числа рівнянь в системі використовується для обґрунтування методу контурних струмів (МКС).

ЗАДАЧА 2.15. Мостова схема рис. 2.23,а живиться від реального джерела електричної енергії, ЕРС якого $E = 400 \text{ В}$, а внутрішній опір $r = 10 \text{ Ом}$. Опори плечей моста $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 40 \text{ Ом}$, $r_3 = 60 \text{ Ом}$, $r_4 = 30 \text{ Ом}$. Міст навантажений приймачем, опір якого $r_5 = 30 \text{ Ом}$.

Розрахувати струми в схемі методом рівнянь Кірхгофа.

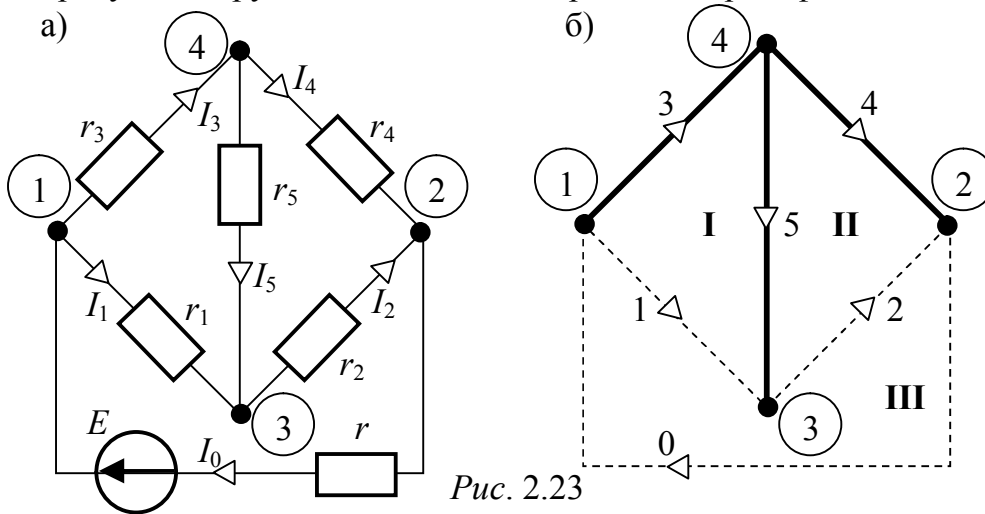


Рис. 2.23

Розв'язання

Обираємо довільні напрями струмів у вітках схеми та будуємо граф кола (рис. 2.23,б). В цьому графі вітки 3, 4, 5 обрані як вітки дерева, вітки 1, 2, 0 є вітками зв'язку, контури 1-5-3, 2-4-5, 0-3-4 є незалежними.

Кількість вузлів $V = 4$, невідомих струмів $B = 6$, кількість незалежних контурів $K = 3$.

Система рівнянь Кірхгофа для розрахунку струмів

Вузол 1: $I_3 + I_1 - I_0 = 0;$ (2.9)

2: $I_0 - I_2 - I_4 = 0;$ (2.10)

3: $I_2 - I_5 - I_1 = 0;$ (2.11)

Контур I: $I_1 \cdot r_1 - I_5 \cdot r_5 - I_3 \cdot r_3 = 0;$ (2.12)

II: $I_2 \cdot r_2 - I_4 \cdot r_4 + I_5 \cdot r_5 = 0;$ (2.13)

III: $I_0 \cdot r_0 + I_3 \cdot r_3 + I_4 \cdot r_4 = E.$ (2.14)

Для зменшення кількості рівнянь в системі скористаємося способом підстановки: із (2.9), (2.10), (2.11) виразимо струми віток дерева через струми

віток зв'язку і підставимо в (2.12), (2.13), (2.14). Отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 \cdot (r_1 + r_5 + r_3) - I_2 \cdot r_5 - I_0 \cdot r_3 = 0, \\ I_2 \cdot (r_2 + r_4 + r_5) - I_1 \cdot r_5 - I_0 \cdot r_4 = 0, \\ I_0 \cdot (r + r_3 + r_4) - I_1 \cdot r_3 - I_2 \cdot r_4 = E. \end{cases} \quad (2.15)$$

Система з числовими значеннями:

$$\begin{cases} 110 \cdot I_1 - 30 \cdot I_2 - 60 \cdot I_0 = 0, \\ -30 \cdot I_1 + 100 \cdot I_2 - 30 \cdot I_0 = 0, \\ -60 \cdot I_1 - 30 \cdot I_2 + 100 \cdot I_0 = 400. \end{cases}$$

За методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 110 & -30 & -60 \\ -30 & 100 & -30 \\ -60 & -30 & 100 \end{vmatrix} = 10^3 \cdot (11 \cdot 10 \cdot 10 - 3 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 6 - 6 \cdot 10 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 11 - 3 \cdot 3 \cdot 10) = 443 \cdot 10^3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -30 & -60 \\ 0 & 100 & -30 \\ 400 & -30 & 100 \end{vmatrix} = 400 \cdot (30 \cdot 30 + 60 \cdot 100) = 276 \cdot 10^4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 110 & 0 & -60 \\ -30 & 0 & -30 \\ -60 & 400 & 100 \end{vmatrix} = -400 \cdot (-30 \cdot 110 - 30 \cdot 60) = 204 \cdot 10^4;$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 110 & -30 & 0 \\ -30 & 100 & 0 \\ -60 & -30 & 400 \end{vmatrix} = 400 \cdot (110 \cdot 100 - 30 \cdot 30) = 404 \cdot 10^4.$$

Струми віток зв'язку $I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{276 \cdot 10^4}{443 \cdot 10^3} = 6,23 \text{ A};$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{204 \cdot 10^4}{443 \cdot 10^3} = 4,61 \text{ A};$$

$$I_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{404 \cdot 10^4}{443 \cdot 10^3} = 9,12 \text{ A}.$$

Струми віток дерева $I_3 = I_0 - I_1 = 9,12 - 6,23 = 2,89 \text{ A};$

$$I_4 = I_0 - I_2 = 9,12 - 4,605 = 4,52 \text{ A};$$

$$I_5 = I_2 - I_1 = 4,605 - 6,23 = -1,63 \text{ A}.$$

Баланс потужностей $E \cdot I_0 = \sum_{k=0}^5 I_k^2 \cdot r_k .$

$$400 \cdot 9,12 = 9,12^2 \cdot 10 + 6,23^2 \cdot 20 + 4,61^2 \cdot 40 + 2,89^2 \cdot 60 + 4,52^2 \cdot 30 + 1,63^2 \cdot 30,$$

$$\Sigma P_{\Gamma} = 3648 \text{ Вт}; \quad \Sigma P_{\Pi} = 3648 \text{ Вт}.$$

Баланс потужностей зійшовся. Задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.16. Розрахувати струми у всіх вітках кола на рис. 2.24, якщо:

$$E_1 = 100 \text{ В}, E_2 = 50 \text{ В}, r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}, r_3 = 20 \text{ Ом}.$$

Відповіді: $I_1 = 4 \text{ А}; I_2 = -1 \text{ А}; I_3 = 3 \text{ А}.$

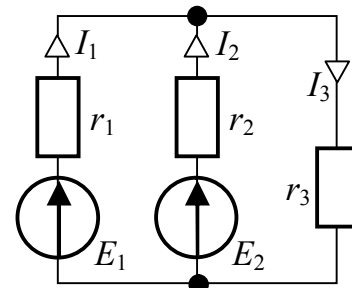


Рис. 2.24

ЗАДАЧА 2.17. У схемі рис. 2.25 визначити струми у всіх вітках із застосуванням законів Кірхгофа, якщо:

$$E_1 = 100 \text{ В}, E_2 = 50 \text{ В}, J = 5 \text{ А}; r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}, r_3 = 20 \text{ Ом}.$$

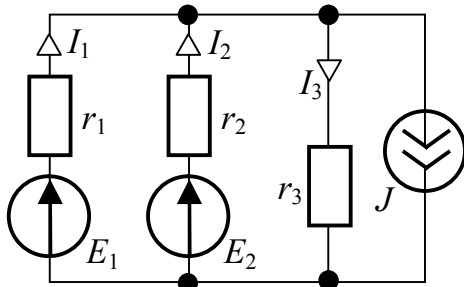


Рис. 2.25

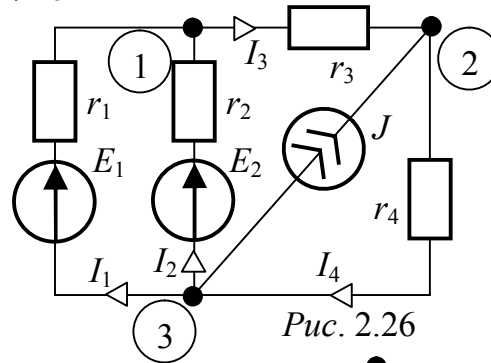


Рис. 2.26

Відповіді: $I_1 = 6 \text{ А}; I_2 = 1 \text{ А}; I_3 = 2 \text{ А}.$

ЗАДАЧА 2.18. Визначити струми за законами Кірхгофа у вітках схеми (рис. 2.26) і перевірити баланс потужностей, якщо: $E_1 = 120 \text{ В}, E_2 = 60 \text{ В}, J = 4 \text{ А}; r_1 = r_2 = 20 \text{ Ом}, r_3 = 5 \text{ Ом}, r_4 = 15 \text{ Ом}.$

Відповіді: $I_1 = 2 \text{ А}; I_2 = -1 \text{ А}; I_3 = 1 \text{ А}, I_4 = 5 \text{ А}, P = 480 \text{ Вт}.$

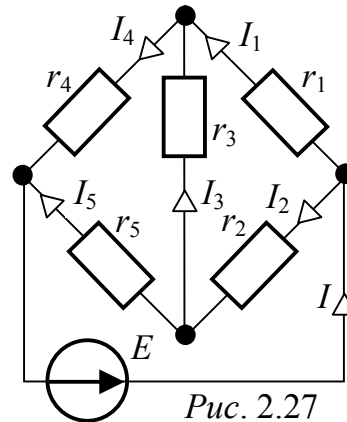


Рис. 2.27

ЗАДАЧА 2.19. Визначити струми у вітках мостової схеми (рис. 2.27), якщо відомі параметри кола:

$$E = 4,4 \text{ В}, r_1 = 20 \text{ Ом}, r_2 = 60 \text{ Ом}, r_3 = 120 \text{ Ом}, r_4 = 8 \text{ Ом}, r_5 = 44 \text{ Ом}.$$

Відповіді: $I = 0,2 \text{ А}; I_1 = 0,156 \text{ А}; I_2 = 0,044 \text{ А}; I_3 = 0,004 \text{ А}; I_4 = 0,16 \text{ А}; I_5 = 0,04 \text{ А}.$

2.4 МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ (МКС)

Цей метод дозволяє зменшити число розрахункових рівнянь в системі рівнянь Кірхгофа ($N = N_I + N_{II}$) до числа рівнянь, записаних лише за другим законом Кірхгофа (до числа незалежних контурів схеми).

Рекомендується наступний порядок розрахунку:

1. Складається направлений граф електричного кола і формуються незалежні контури. При цьому вітки з відомими струмами (вітки з джерелами струму) не можуть бути вітками дерева, а лише вітками зв'язку.

2. Вважають, що в незалежних контурах циркулюють контурні струми, напрям яких зазвичай збігається з напрямом струмів віток зв'язку. При цьому частина контурних струмів стає відомою відповідно до п.1 даних рекомендацій.

3. Для контурів з невідомими контурними струмами складаються кон-

турні рівняння за другим законом Кірхгофа. Таким чином, кількість рівнянь по МКС наступна: $N_{MKS} = B - (Y - 1) - B_C$.

4. Розв'язується система контурних рівнянь.

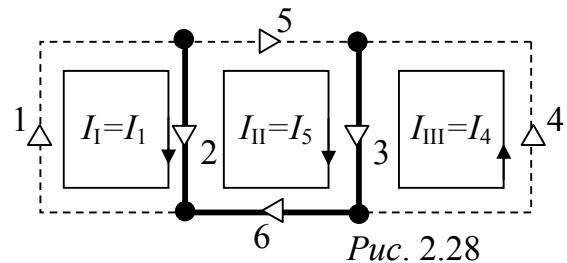
5. Струми у вітках визначають шляхом алгебричного підсумовування відповідних контурних струмів за принципом накладання.

6. Перевірка виконується складанням балансу потужностей або розрахунком струмів іншим методом.

ЗАДАЧА 2.20. Для схеми рис. 2.16 відомо: $E_1 = 120 \text{ В}$, $E_5 = 6 \text{ В}$, $r_1 = r_3 = r_5 = 2 \text{ Ом}$, $r_2 = r_4 = 6 \text{ Ом}$, $r_6 = 3 \text{ Ом}$, значення струму $I_4 = 8 \text{ А}$. Знайти решту струмів за допомогою МКС і перевірити баланс потужностей.

Розв'язання

Для наочності розрахунків представимо граф (рис. 2.28) схеми рис. 2.16, що розраховується, прийнявши вітку №4 з відомим струмом за вітку зв'язку. Контурний струм контуру III, таким чином, є відомим: $I_{III} = I_4 = 8 \text{ А}$.



Невідомі контурні струми $I_1 = I_1$, $I_{II} = I_5$.

Контурні рівняння для контурів:
$$\begin{cases} I_1 \cdot (r_1 + r_2) - I_5 \cdot r_2 = E_1, \\ I_5 \cdot (r_5 + r_3 + r_6 + r_2) - I_1 \cdot r_2 + I_4 \cdot r_3 = -E_5. \end{cases}$$

Після підстановки чисел і переносу доданку $I_4 \cdot r_3 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ В}$ в праву частину другого контурного рівняння система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 8 \cdot I_1 - 6 \cdot I_5 = 120, \\ -6 \cdot I_1 + 13 \cdot I_5 = -22. \end{cases}$$

Розв'язання системи: $I_1 = 21 \text{ А}$; $I_5 = 8 \text{ А}$. Решта струмів:

$I_2 = I_1 - I_5 = 21 - 8 = 13 \text{ А}$; $I_6 = I_5 = 8 \text{ А}$; $I_3 = I_5 + I_4 = 8 + 8 = 16 \text{ А}$.

Невідому ЕРС розрахуємо за другим законом Кірхгофа

$$E_4 = I_3 \cdot r_3 + I_4 \cdot r_4 = 16 \cdot 2 + 8 \cdot 6 = 80 \text{ В}.$$

Рівняння балансу потужностей

$$\begin{aligned} E_1 \cdot I_1 - E_5 \cdot I_5 + E_4 \cdot I_4 &= I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 + I_3^2 \cdot r_3 + I_4^2 \cdot r_4 + I_5^2 \cdot r_5 + I_6^2 \cdot r_6, \\ 120 \cdot 21 - 6 \cdot 8 + 80 \cdot 8 &= 21^2 \cdot 2 + 13^2 \cdot 6 + 16^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 3, \\ 3112 \text{ Вт} &= 3112 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Баланс потужностей зійшовся, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.21. Параметри схеми рис. 2.29,а задані:

$$\begin{aligned} J_1 &= 4 \text{ А}, \quad E_1 = 160 \text{ В}, \quad E_2 = 100 \text{ В}, \quad E_5 = 120 \text{ В}, \quad E_6 = 60 \text{ В}, \\ r_1 &= 50 \text{ Ом}, \quad r_3 = 40 \text{ Ом}, \quad r_4 = 60 \text{ Ом}, \quad r_5 = 30 \text{ Ом}, \quad r_6 = 20 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Розрахувати струми МКС.

Розв'язання

Довільно вибрані напрями струмів у вітках схеми вказані на рис. 2.29,а (за постановкою задачі 2.21 цих напрямів немає). Звертаємо увагу на наявність у схемі двох ідеальних (особливих) віток.

Перша містить джерело струму J_1 , струм якого не залежить від параметрів кола. Для нормальної роботи джерела струму потрібне єдине: наявність кола для замикання струму при будь-яких перетвореннях схеми або її змінах шляхом відключення частини віток або підключення нових віток.

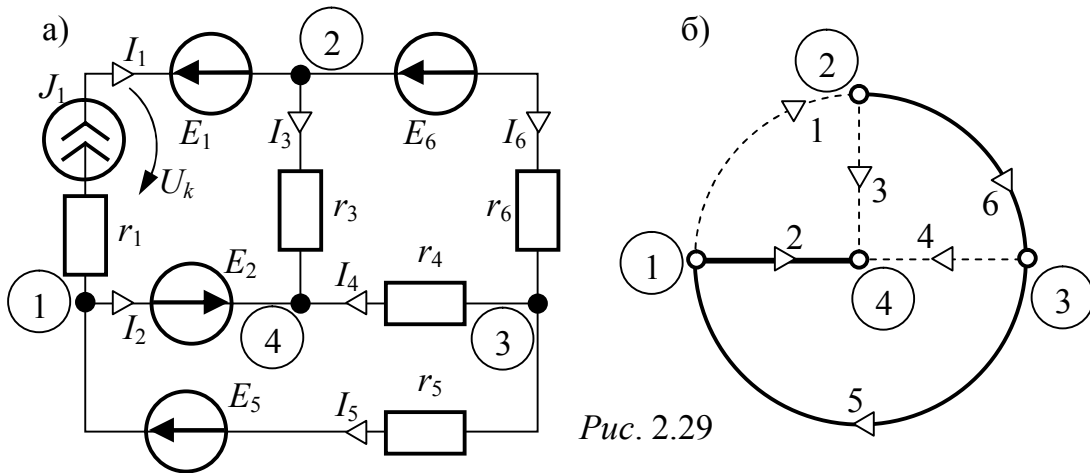


Рис. 2.29

Опір першої вітки $r_{e1} = r_1 + r_{ДС} = 50 + \infty = \infty$, де $r_{ДС} = \infty$ – теоретичне значення внутрішнього опору ідеального джерела струму;

провідність цієї вітки
$$g_{e1} = \frac{1}{r_{e1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Друга вітка схеми містить лише ідеалізоване джерело ЕРС з внутрішнім опором $r_{EPC} = 0$, тому опір цієї вітки $r_{e2} = 0$, а її провідність $g_{e2} = \frac{1}{r_{e2}} = \infty.$

Раніше було вказано, що вітка з джерелом струму обов'язково має бути віткою зв'язку, що враховане при складанні графа схеми рис. 2.29,б.

Оскільки при використанні МКС в контурних рівняннях з'являються доданки, які враховують зв'язок контурів через спільні вітки, то має практичний сенс включити до віток дерева вітку з ідеальним джерелом ЕРС, оскільки його внутрішній опір $r_2 = 0$. Це також враховано при складанні графа схеми.

Таким чином, для поданої схеми отримано 3 контурні струми, один з яких замикається по вітках 1-6-5 і дорівнює струму джерела струму

$$I_I = J_1 = 4 \text{ A}.$$

Другий, невідомий контурний струм $I_{II} = I_3$ замикається по вітках 3-2-5-6. Третій, також невідомий, контурний струм $I_{III} = I_4$ замикається по вітках 4-2-5.

Контурні рівняння для невідомих контурних струмів (з урахуванням $r_2 = 0$)

$$\begin{cases} I_{II}(r_3 + r_5 + r_6) + I_{III}r_5 - J_1(r_6 + r_5) = -E_2 - E_5 + E_6, \\ I_{III}(r_4 + r_5) + I_{II}r_5 - J_1r_5 = -E_2 - E_5. \end{cases}$$

З числовими значеннями:

$$\begin{cases} 90 \cdot I_{II} + 30 \cdot I_{III} = 40, \\ 30 \cdot I_{II} + 90 \cdot I_{III} = -100, \end{cases} \text{ звідки } I_{II} = 0,917 \text{ A}, \quad I_{III} = -1,417 \text{ A}.$$

Струми віток схеми

$$I_2 = -I_{II} - I_{III} = -0,917 + 1,417 = 0,5 \text{ A}, \quad I_3 = I_{II} = 0,917 \text{ A}, \quad I_4 = I_{III} = -1,417 \text{ A}, \\ I_5 = -I_{II} - I_{III} + I_1 = -0,917 + 1,417 + 4 = 4,5 \text{ A}, \quad I_6 = I_1 - I_{III} = 4 - 0,917 = 3,083 \text{ A}.$$

Напругу на затискачах джерела струму знайдемо за допомогою другого закону Кірхгофа для контуру з вітками 1-3-2:

$$U_k - I_3 \cdot r_3 - I_1 \cdot r_1 = E_1 + E_2,$$

звідки $U_k = E_1 + E_2 + I_1 \cdot r_1 + I_3 \cdot r_3 = 160 + 100 + 4 \cdot 50 + 0,917 \cdot 40 = 496,7 \text{ B}.$

Рівняння балансу потужностей:

$$U_k \cdot J_1 - E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_5 \cdot I_5 - E_6 \cdot I_6 = I_1^2 \cdot r_1 + I_3^2 \cdot r_3 + I_4^2 \cdot r_4 + I_5^2 \cdot r_5 + I_6^2 \cdot r_6.$$

Сумарна потужність джерел живлення (генераторів)

$$\Sigma P_{\Gamma} = 496,7 \cdot 4 - 160 \cdot 4 + 100 \cdot 0,5 + 120 \cdot 4,5 - 60 \cdot 3,083 = 1752 \text{ Вт}.$$

Сумарна потужність споживачів

$$\Sigma P_{II} = 4^2 \cdot 50 + 0,917^2 \cdot 40 + 1,417^2 \cdot 60 + 4,5^2 \cdot 30 + 3,083^2 \cdot 20 = 1798 \text{ Вт}.$$

Середнє значення потужностей

$$\Sigma P_{CP} = \frac{\Sigma P_{\Gamma} + \Sigma P_{II}}{2} = \frac{1752 + 1798}{2} = 1755 \text{ Вт}.$$

Відхилення (абсолютна похибка), виникнення якого пояснюється тим, що відповіді для струмів округлювались, складає

$$\Delta P = |\Sigma P_{\Gamma} - \Sigma P_{CP}| = |\Sigma P_{II} - \Sigma P_{CP}| = 1798 - 1755 = 23 \text{ Вт}.$$

Відносна похибка обчислень $\varepsilon\% = \frac{\Delta P}{\Sigma P_{CP}} \cdot 100 = \frac{23 \cdot 100}{1755} = 1,31\%,$

що менше допустимих 3%. Отже, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.22. Методом контурних струмів розрахувати стан мостової схеми рис. 2.30, яка живиться від джерела струму $J = 80 \text{ mA}$, якщо

$$r_1 = 2 \text{ кОм}, \quad r_2 = 4 \text{ кОм}, \quad r_3 = 8 \text{ кОм}, \quad r_4 = 6 \text{ кОм}, \quad r_5 = 3 \text{ кОм}.$$

Перевірити баланс потужностей.

Відповіді: величини струмів наступні: $I_1 = 61 \text{ mA}, \quad I_2 = 51 \text{ mA}, \quad I_3 = 19 \text{ mA}, \\ I_4 = 29 \text{ mA}, \quad I_5 = 10 \text{ mA}; \quad \Sigma P = 26,08 \text{ Вт}.$

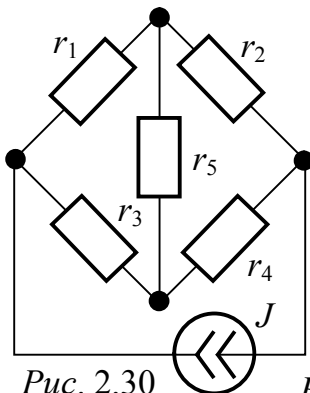


Рис. 2.30

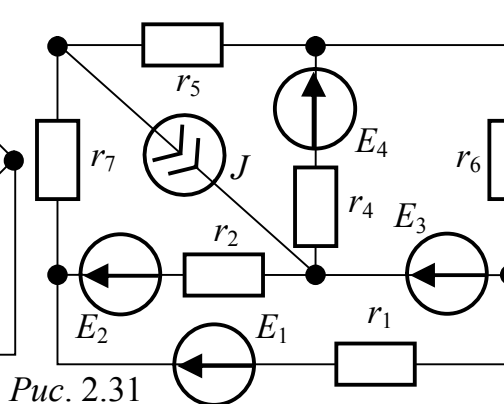


Рис. 2.31

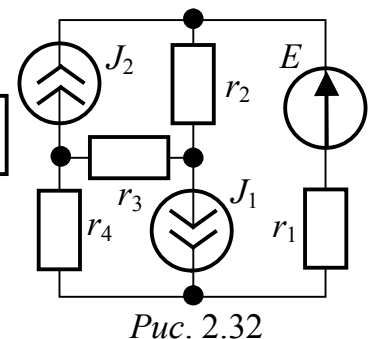


Рис. 2.32

ЗАДАЧА 2.23. Параметри схеми рис. 2.31 відомі: $J = 5 \text{ A}, \quad E_1 = 30 \text{ B}, \quad E_2 = 70 \text{ B}, \quad E_3 = 10 \text{ B}, \quad E_4 = 20 \text{ B}; \quad r_1 = 10, \quad r_2 = 10, \quad r_4 = 5, \quad r_5 = 15, \quad r_6 = 5, \quad r_7 = 20.$ Всі опори задані в Ом. Методом контурних струмів розрахувати струми в схемі і перевірити баланс потужностей.

Відповіді: величини струмів наступні: $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 4 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 4 \text{ A}$,
 $I_5 = 2 \text{ A}$; $I_6 = 2 \text{ A}$, $I_7 = 3 \text{ A}$; $\Sigma P = 510 \text{ Вт}$.

ЗАДАЧІ 2.24 та 2.25. Розв'язати задачі 2.17 і 2.18 МКС.

ЗАДАЧА 2.26. МКС визначити всі струми в схемі рис. 2.32, якщо $E = 100 \text{ В}$,
 $J_1 = J_2 = 2 \text{ А}$, $r_1 = r_3 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = r_4 = 40 \text{ Ом}$.

Відповіді: $I_1 = 1 \text{ А}$, $I_2 = 3 \text{ А}$, $I_3 = 1 \text{ А}$, $I_4 = 1 \text{ А}$.

2.5 МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ (МВП)

Цей метод дозволяє зменшити число розрахункових рівнянь від кількості $B-B_C$ (число віток з невідомими струмами) при використанні методу рівнянь Кірхгофа до кількості $(Y-1)$, тобто до числа рівнянь, записаних лише за першим законом Кірхгофа.

У даному методі (МВП) спочатку складається система рівнянь для розрахунку потенціалів вузлів схеми. Струми кола залежать від різниці потенціалів, а не від їх абсолютного значення, тому потенціал одного з вузлів схеми завжди можна прийняти рівним будь-якому числу (краще всього нулю, оскільки при цьому спрощуються і рівняння, і обчислення). Цей вузол прийнято називати *базисним* та при подальших розрахунках вважати, що $\varphi_B = 0$.

Для кожного з вузлів схеми з невідомим потенціалом складається вузлове рівняння. Для вузла a , потенціал якого φ_a , вузлове рівняння має вигляд:

$$\varphi_a \cdot \sum_a g - \varphi_b \cdot \sum_{a-b} g - \varphi_c \cdot \sum_{a-c} g - \dots = \sum_a Eg + \sum_a J,$$

де φ_b , φ_c – потенціали вузлів схеми, частина яких може бути відома, а решта не відомі;

$\sum_a g$ – *власна провідність* вузла a , тобто сума провідностей віток, що

безпосередньо підключені до вузла a , для якого і записується вузлове рівняння;

$\sum_{a-q} g$ – *спільна провідність* вузлів a і q , це – сума провідностей віток,

що знаходяться безпосередньо між вузлами a і q (для цих віток a і q – кінцеві точки);

$\sum_a Eg$ – алгебрична сума струмів короткого замикання віток з джерелами ЕРС, що примикають до вузла a , причому доданок Eg береться із знаком «+», якщо ЕРС вітки направлена до вузла a ;

$\sum_a J$ – алгебрична сума струмів джерел струмів віток, що примикають до вузла a , причому струм J береться із знаком «+», якщо він направлений до вузла a .

Рекомендується наступний порядок розрахунку струмів за МВП:

1. Обирають довільні напрями струмів у вітках схеми.
2. Обирають базисний вузол і приймають його потенціал рівним нулю $\varphi_B = 0$.
3. Для вузлів з невідомими потенціалами складають і розв'язують вузлові рівняння.

4. За законом Ома розраховують струми віток.
 5. Перевіряють правильність розв'язання задачі (у загальному випадку за виконанням балансу потужностей або за першим законом Кірхгофа).

ЗАДАЧА 2.27. Визначити струми задачі 2.13 МВП.

Розв'язання

У схемі рис. 2.21 усього 2 вузли. Прийmemo $\varphi_b = 0$. Вузлове рівняння для вузла a набуває вигляду: $\varphi_a \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = J + \frac{E}{r_1}$.

Підставивши числа, одержуємо $\varphi_a \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) = 3 + \frac{30}{10}$ або $\varphi_a \cdot 3 = 60$,

звідки $\varphi_a = 20$ В.

$$\text{Струми: } I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E}{r_1} = \frac{20 - 0 - 30}{10} = -1 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{r_2} = \frac{20 - 0}{5} = 4 \text{ А.}$$

Перевірка правильності розв'язання згідно із першим законом Кірхгофа: чи виконується для вузла a $J = I_1 + I_2$?

$3 = -1 + 4$. Так, виконується. Значить, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.28. Розрахувати струми мостової схеми задачі 2.15 МВП.

Розв'язання

Прийmemo вузол «4» за базисний, поклавши $\varphi_4 = 0$.

Для вузлів з невідомими потенціалами $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4$ складемо систему

вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \varphi_3 \cdot \frac{1}{r_1} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{E}{r}, \\ \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{r} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{r_2} = -\frac{E}{r}, \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{r_1} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{r_2} = 0. \end{cases}$$

Підставимо числа

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} \right) - \varphi_3 \cdot \frac{1}{20} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{400}{10}, \\ \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{10} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{40} = -\frac{400}{10}, \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{20} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{40} = 0. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot 10 - \varphi_2 \cdot 6 - \varphi_3 \cdot 3 = 2400, \\ -\varphi_1 \cdot 12 + \varphi_2 \cdot 19 - \varphi_3 \cdot 3 = -4800, \\ -\varphi_1 \cdot 6 - \varphi_2 \cdot 3 + \varphi_3 \cdot 13 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо: $\varphi_1 = 173,4 \text{ В}$, $\varphi_2 = -135,4 \text{ В}$, $\varphi_3 = 48,8 \text{ В}$.

За законом Ома розрахуємо струми у вітках схеми:

$$I_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E}{r} = \frac{-135,4 - 173,4 + 400}{10} = 9,12 \text{ А}, \quad I_3 = \frac{\varphi_1}{r_3} = \frac{173,4}{60} = 2,89 \text{ А},$$

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r_1} = \frac{173,4 - 48,8}{20} = 6,23 \text{ А}, \quad I_4 = \frac{-\varphi_2}{r_4} = \frac{135,4}{30} = 4,52 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r_2} = \frac{48,8 - (-135,4)}{40} = 4,61 \text{ А}, \quad I_5 = \frac{-\varphi_3}{r_5} = \frac{-48,8}{30} = -1,63 \text{ А}.$$

Отримані значення струмів збіглися із раніше обчисленими за методом рівнянь Кірхгофа.

ЗАДАЧА 2.29. Розрахувати струми задачі 2.21 МВП.

Розв'язання

У схемі задачі є вітка №2, опір якої $r_2 = 0$, а провідність $g_2 = \infty$. Тому для вузлів «1» і «4», які є кінцевими точками вітки №2, вузлові рівняння виявляються виродженими, з них виходить, що $\varphi_4 - \varphi_1 = E_2$.

Приємомо потенціал вузла «1» $\varphi_1 = 0$, тоді $\varphi_4 = E_2 = 100 \text{ В}$.

Для вузлів з невідомими потенціалами складаємо систему вузлових

рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} \right) - \varphi_3 \cdot \frac{1}{r_6} - \varphi_4 \cdot \frac{1}{r_3} = J_1 + \frac{E_6}{r_6}, \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{r_6} - \varphi_4 \cdot \frac{1}{r_4} = -\frac{E_6}{r_6} - \frac{E_5}{r_5}. \end{cases}$$

Після підстановки чисел і перенесення відомих величин $\varphi_4 \cdot r_3^{-1}$ і $\varphi_4 \cdot r_4^{-1}$ в праві частини рівнянь системи отримуємо:

$$\begin{cases} \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{20} \right) - \varphi_3 \cdot \frac{1}{20} = 4 + \frac{60}{20} + \frac{100}{40}, \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{20} = -\frac{60}{20} - \frac{120}{30} + \frac{100}{60}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \varphi_2 \cdot 3 - \varphi_3 \cdot 2 = 380, \\ -\varphi_2 \cdot 3 + \varphi_3 \cdot 6 = -320, \end{cases}$$

звідки $\varphi_2 = 136,7 \text{ В}$, $\varphi_3 = 15 \text{ В}$.

Струми віток схеми рис. 2.30 розраховуємо за законом Ома:

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{r_3} = \frac{136,7 - 100}{40} = 0,917 \text{ А},$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{r_4} = \frac{15 - 100}{60} = -1,417 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_5}{r_5} = \frac{15 + 120}{30} = 4,5 \text{ А},$$

$$I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_6}{r_6} = \frac{136,7 - 15 - 60}{20} = 3,085 \text{ А},$$

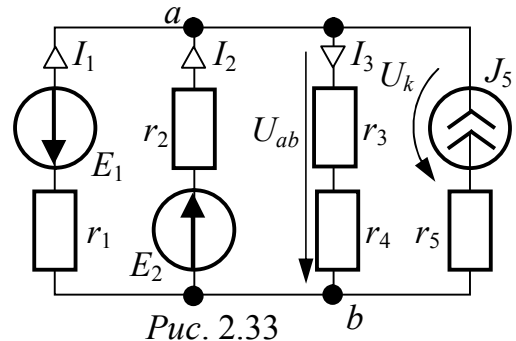
$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_2}{r_2} = \frac{0 - 100 + 100}{0} = \frac{0}{0} \text{ — невизначеність, яка розкривається}$$

за допомогою першого закону Кірхгофа, наприклад, для вузла «1»:

$$I_2 = I_5 - I_1 = 4,5 - 4 = 0,5 \text{ A.}$$

Отримані значення збігаються з раніше обчисленими за МКС, тому баланс потужності не перевіряється.

ЗАДАЧА 2.30. Розрахувати струми в схемі рис. 2.33 методом двох вузлів, якщо:
 $E_1 = 120 \text{ В}$, $E_2 = 80 \text{ В}$, $J_5 = 8 \text{ А}$, $r_1 = 20 \text{ Ом}$,
 $r_2 = 40 \text{ Ом}$, $r_3 = 25 \text{ Ом}$, $r_4 = 15 \text{ Ом}$, $r_5 = 80 \text{ Ом}$.
 Перевірити баланс потужностей.



Розв'язання

Вибираємо довільні напрями струмів у вітках схеми I_1, I_2, I_3 , напруги на затискачах джерела струму U_k та напруги U_{ab} . Відмітимо, що дана схема має лише два різні потенціали, різниця яких називається *вузловою напругою*

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b,$$

яка розраховується як окремий випадок вузлового рівняння для вузла з невідомим потенціалом φ_a при $\varphi_b = 0$:

$$U_{ab} = \varphi_a = \frac{\sum_a E g + \sum_a J}{\sum g} = \frac{-E_1 \cdot \frac{1}{r_1} + E_2 \cdot \frac{1}{r_2} + J_5}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4}} = \frac{-\frac{120}{20} + \frac{80}{40} + 8}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{25 + 15}} = 40 \text{ В.}$$

Струми у вітках розраховуються за законом Ома:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} - E_1}{r_1} = \frac{-40 - 120}{20} = -8 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{r_2} = \frac{80 - 40}{40} = 1 \text{ А,}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{r_3 + r_4} = \frac{40}{25 + 15} = 1 \text{ А.}$$

Перевірка правильності розв'язання задачі за першим законом Кірхгофа $I_1 + I_2 + J_5 = I_3$: $-8 + 1 + 8 = 1$ — виконується.

Для перевірки балансу потужностей визначимо напругу U_k на затискачах джерела струму за допомогою другого закону Кірхгофа:

$$U_k + I_3 \cdot (r_3 + r_4) + J_5 \cdot r_5 = 0,$$

$$\text{звідки } U_k = -1 \cdot (25 + 15) - 8 \cdot 80 = -680 \text{ В.}$$

Рівняння балансу потужностей

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 - U_k \cdot J_5 = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 + I_3^2 \cdot (r_3 + r_4) + J_5^2 \cdot r_5$$

або

$$-120 \cdot (-8) + 80 \cdot 1 - (-680) \cdot 8 =$$

$$= 8^2 \cdot 20 + 1^2 \cdot 40 + 1^2 \cdot (25 + 15) + 8^2 \cdot 80$$

$$6480 \text{ Вт} = 6480 \text{ Вт.}$$

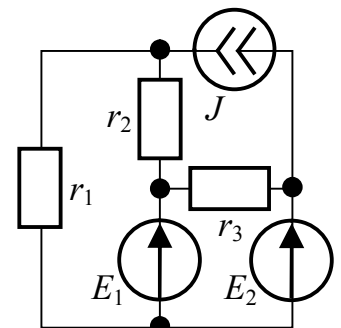


Рис. 2.34

ЗАДАЧІ 2.31, 2.32, 2.33. Розв'язати задачі 2.17, 2.18, 2.21 МВП.

ЗАДАЧА 2.34. Визначити струми в схемі рис. 2.34 МВП, якщо $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 50 \text{ В}$, $J = 10 \text{ А}$, $r_1 = r_2 = 20 \text{ Ом}$, $r_3 = 10 \text{ Ом}$.

Відповіді: величини струмів наступні: $I_1 = 7,5 \text{ А}$, $I_2 = 2,5 \text{ А}$, $I_3 = 5 \text{ А}$,
 $I_{E1} = 2,5 \text{ А}$, $I_{E2} = 5 \text{ А}$.

2.6 ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Сутність еквівалентних перетворень полягає в тому, що частина електричного кола замінюється простішою схемою: або з меншою кількістю віток і опорів, або з меншим числом вузлів або контурів. Перетворення вважається *еквівалентним*, якщо струми і напруга не перетвореної частини схеми залишаються попередніми, тобто однаковими у вихідній і перетвореній схемах. Самі по собі еквівалентні перетворення не є методом розрахунку, проте сприяють спрощенню розрахунків.

Часто використовуються наступні еквівалентні перетворення:

1. Заміна послідовного з'єднання опорів r_1, r_2, \dots, r_n одним еквівалентним

$$r_E = \sum_{k=1}^n r_k.$$

2. Заміна паралельного з'єднання пасивних віток з провідностями g_1, g_2, \dots, g_n

однією еквівалентною $g_E = \sum_{k=1}^n g_k$.

3. Заміна мішаного з'єднання опорів рис. 2.35,а одним еквівалентним (рис. 2.35,б), де $r_E = r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}$, що

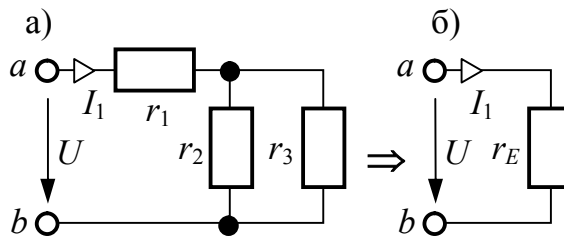


Рис. 2.35

виходить з поетапного застосування п.2 і п.1 даних рекомендацій.

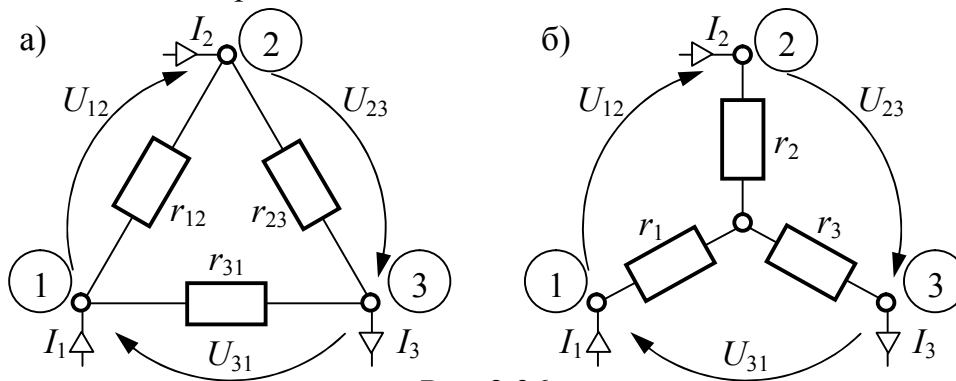


Рис. 2.36

4. Еквівалентні перетворення пасивних триполюсників – трикутника (рис. 2.36,а) та зірки (рис. 2.36,б). При цьому опори еквівалентного трикутника

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}, \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}, \quad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 \cdot r_1}{r_2},$$

а опори еквівалентної зірки $r_1 = \frac{r_{12} \cdot r_{31}}{r_{\Delta}}$, $r_2 = \frac{r_{23} \cdot r_{12}}{r_{\Delta}}$, $r_3 = \frac{r_{31} \cdot r_{23}}{r_{\Delta}}$,

де $r_{\Delta} = r_{12} + r_{23} + r_{31}$ – сума опорів віток трикутника.

5. При подальшому вивченні курсу ТОЕ будуть розглянуті формули еквівалентних замін пасивних чотириполіусників Т- і П-схемами, замін кіл з розподіленими параметрами еквівалентними чотириполіусниками, усунення індуктивного зв'язку в колах, тощо.

Особливо зручно користуватися методом еквівалентних перетворень при розрахунку вхідних та взаємних опорів або вхідної та взаємної провідності схем, коефіцієнтів передачі напруг і струмів, що поступають на вхід схеми при передачі сигналу в навантаження, коли на схему впливає лише одне джерело енергії.

Група задач 2.42-2.45 є важливою для курсів «Електромагнітні перехідні процеси в електричних мережах», «ЕСіМ», «Релейний захист» при розрахунку струмів короткого замикання. Проте, ці задачі розв'язуються методами ТОЕ. Зазвичай розрахунки виконуються у відносних одиницях з подальшим перерахунком величин з використанням їх базисних значень.

ЗАДАЧА 2.35. Розрахувати струми мостової схеми задачі 2.15 (рис. 2.23) з використанням еквівалентних перетворень.

Розв'язання

Перевіряємо умову рівноваги моста:

$$r_2 \cdot r_3 = 40 \cdot 60 = 2400; \quad r_1 \cdot r_4 = 20 \cdot 30 = 600.$$

Оскільки $r_1 \cdot r_4 \neq r_2 \cdot r_3$, то міст незрівноважений, всі його струми відмінні від нуля.

Замінимо трикутник опорів r_2 - r_4 - r_5 еквівалентним з'єднанням в зірку і отримаємо схему рис. 2.37, для

$$\text{якої} \quad r_a = \frac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5 + r_2} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30 + 40} = 9 \text{ Ом},$$

$$r_b = \frac{r_4 \cdot r_2}{r_4 + r_5 + r_2} = \frac{30 \cdot 40}{100} = 12 \text{ Ом},$$

$$r_c = \frac{r_2 \cdot r_5}{r_4 + r_5 + r_2} = \frac{40 \cdot 30}{30 + 30 + 40} = 12 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір схеми по відношенню до затискачів джерела ЕРС

$$r_{\text{вх}} = r + \frac{(r_3 + r_a)(r_1 + r_c)}{r_3 + r_a + r_1 + r_c} + r_b = 10 + \frac{(60 + 9)(20 + 12)}{60 + 9 + 20 + 12} + 12 = 43,86 \text{ Ом}.$$

$$\text{Струм на вході мостової схеми} \quad I_0 = \frac{E}{r_{\text{вх}}} = \frac{400}{43,86} = 9,12 \text{ А}.$$

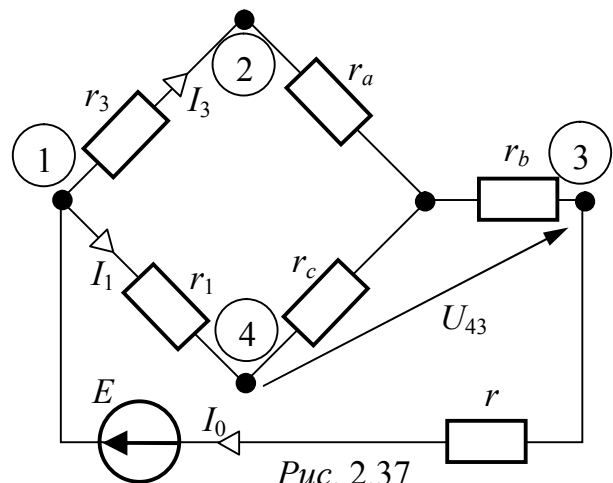


Рис. 2.37

Струми паралельних віток схеми рис. 2.37

$$I_1 = I_0 \cdot \frac{r_3 + r_a}{r_3 + r_a + r_1 + r_c} = 9,12 \cdot \frac{69}{101} = 6,23 \text{ A},$$

$$I_3 = I_0 \cdot \frac{r_1 + r_c}{r_3 + r_a + r_1 + r_c} = 9,12 \cdot \frac{32}{101} = 2,89 \text{ A}.$$

Напряга $U_{43} = I_1 \cdot r_c + I_0 \cdot r_b = 6,23 \cdot 12 + 9,12 \cdot 12 = 184,2 \text{ B}.$

Повертаємося до первинної схеми та розраховуємо струми трикутника

опорів: $I_2 = \frac{U_{34}}{r_2} = \frac{184,2}{40} = 4,61 \text{ A},$

$$I_4 = I_0 - I_2 = 9,12 - 4,61 = 4,51 \text{ A},$$

$$I_5 = I_2 - I_1 = 4,61 - 6,23 = -1,62 \text{ A}.$$

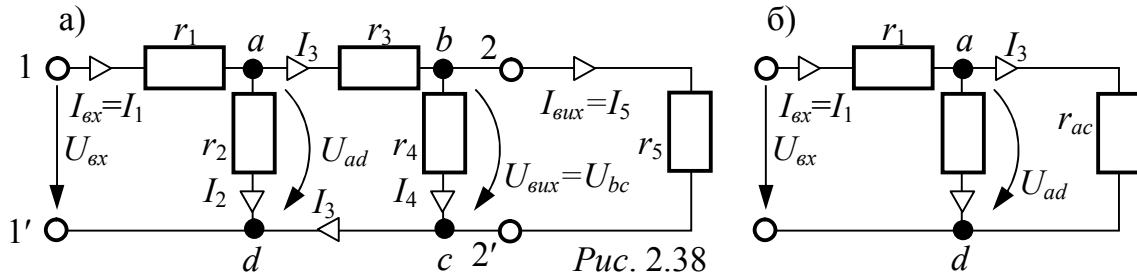


Рис. 2.38

ЗАДАЧА 2.36. Визначити струми в схемі рис. 2.38,а, використовуючи еквівалентні перетворення, якщо напруга на вході схеми $U_{ex} = 400 \text{ B}$, а параметри кола $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 60 \text{ Ом}$, $r_3 = 20 \text{ Ом}$, $r_4 = 100 \text{ Ом}$; опір навантаження, увімкненого на виході схеми (вихід чотириполюсника), $r_5 = 50 \text{ Ом}$.

Розрахувати також коефіцієнт передачі напруги k_U і коефіцієнт передачі струму k_I чотириполюсника.

Розв'язання

Варіант 1. Замінімо мішане з'єднання опорів r_3, r_4, r_5 еквівалентним опором r_{ac} (рис. 2.38,б):

$$r_{ac} = r_3 + \frac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5} = 20 + \frac{100 \cdot 50}{100 + 50} = 53,33 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір і струм схеми:

$$r_{ex} = r_1 + \frac{r_2 \cdot r_{ac}}{r_2 + r_{ac}} = 10 + \frac{60 \cdot 53,33}{60 + 53,33} = 38,24 \text{ Ом}.$$

$$I_{ex} = I_1 = \frac{U_{ex}}{r_{ex}} = \frac{400}{38,24} = 10,46 \text{ A}.$$

Напруга на розгалуженні схеми рис. 2.38,б:

$$U_{ad} = I_1 \cdot \frac{r_2 \cdot r_{ac}}{r_2 + r_{ac}} = 10,46 \cdot \frac{60 \cdot 53,33}{113,33} = 295,4 \text{ B},$$

а струми $I_2 = \frac{U_{ad}}{r_2} = \frac{295,4}{60} = 4,92 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{ad}}{r_{ac}} = \frac{295,4}{53,33} = 5,54 \text{ A}.$

Напруга на розгалуженні правої ділянки схеми рис. 2.38,а з мішаним з'єднанням $U_{bc} = U_{вух} = I_3 \cdot \frac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5} = 5,54 \cdot \frac{100 \cdot 50}{150} = 184,6 \text{ В},$

а струми паралельних віток $I_4 = \frac{U_{bc}}{r_4} = \frac{184,6}{100} = 1,85 \text{ А},$

$$I_5 = I_{вух} = \frac{U_{bc}}{r_5} = \frac{184,6}{50} = 3,69 \text{ А}.$$

Коефіцієнт передачі напруги $k_U = \frac{U_{вух}}{U_{вх}} = \frac{184,6}{400} = 0,462.$

Коефіцієнт передачі струму $k_I = \frac{I_{вух}}{I_{вх}} = \frac{3,69}{10,46} = 0,353.$

Варіант 2. Схеми з одним джерелом живлення (це має місце завжди при вивченні питань, пов'язаних з передачею сигналу з входу схеми у навантаження) зручно розраховувати методом *пропорційних величин*. При цьому задаються довільним значенням струму або напруги найвіддаленішої від джерела живлення ділянки – в нашому випадку прийемо струм $I_5 = 10 \text{ А}.$

Потім за допомогою законів Кірхгофа розраховують напругу на вході (так званій *вплив*), яка на виході створює струм I_5 (так звана *реакція кола*), який дорівнює прийнятому значенню:

$$U_5 = I_5 \cdot r_5 = 10 \cdot 50 = 500 \text{ В},$$

$$I_4 = \frac{U_5}{r_4} = \frac{500}{100} = 5 \text{ А}, \quad I_3 = I_5 + I_4 = 10 + 5 = 15 \text{ А},$$

$$U_{ad} = I_3 \cdot r_3 + I_5 \cdot r_5 = 15 \cdot 20 + 500 = 800 \text{ В},$$

$$I_2 = \frac{U_{ad}}{r_2} = \frac{800}{60} = 13,33 \text{ А}, \quad I_1 = I_2 + I_3 = 13,33 + 15 = 28,33 \text{ А},$$

$$U_{вх}' = I_1 \cdot r_1 + U_{ad} = 28,33 \cdot 10 + 800 = 1083 \text{ В}.$$

Далі знаходять коефіцієнт пропорційності $k = \frac{U_{вх}}{U_{вх}'} = \frac{400}{1083} = 0,369,$ на

який необхідно помножити всі раніше одержані значення, аби отримати шукані величини при заданій напрузі $U_{вх} = 400 \text{ В}.$

$$\text{Остаточнo маємо } I_1 = I_1 \cdot k = 28,33 \cdot 0,369 = 10,46 \text{ А},$$

$$I_2 = I_2 \cdot k = 13,33 \cdot 0,369 = 4,92 \text{ А}, \quad I_3 = I_3 \cdot k = 15 \cdot 0,369 = 5,54 \text{ А},$$

$$I_4 = I_4 \cdot k = 5 \cdot 0,369 = 1,85 \text{ А}, \quad I_5 = I_5 \cdot k = 10 \cdot 0,369 = 3,69 \text{ А},$$

$$U_{ad} = U_{ad} \cdot k = 800 \cdot 0,369 = 295,4 \text{ В}, \quad U_5 = U_{вух} = U_5 \cdot k = 500 \cdot 0,369 = 185 \text{ В},$$

що збігається з розв'язанням за варіантом 1.

ЗАДАЧА 2.37. Розрахувати струми в схемі рис. 2.39 методом перетворення електричного кола, перевірити БП, якщо:

$$r_1 = r_2 = 6 \text{ Ом}, \quad r_3 = 3 \text{ Ом}, \quad r_4 = 12 \text{ Ом}, \\ r_5 = 4 \text{ Ом}, \quad J = 6 \text{ А}.$$

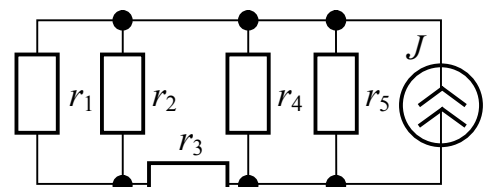


Рис. 2.39

Відповіді: величини струмів наступні: $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$,
 $I_4 = 1 \text{ A}$, $I_5 = 3 \text{ A}$; $\Sigma P = 72 \text{ Вт}$.

ЗАДАЧА 2.38. Розрахувати струми в умовах задачі 2.22 (рис. 2.30) за допомогою еквівалентних перетворень.

ЗАДАЧА 2.39. Розв'язати задачу 2.19 за допомогою еквівалентних перетворень кола.

ЗАДАЧА 2.40. Визначити струми у вітках схеми рис. 2.40, замінивши трикутник опорів r_{ab} - r_{bc} - r_{ca} еквівалентною зіркою, якщо:

$$E_A = 50 \text{ В}, \quad E_B = 30 \text{ В}, \quad E_C = 100 \text{ В},$$

$$r_A = 3,5 \text{ Ом}, \quad r_B = 2 \text{ Ом}, \quad r_C = 7 \text{ Ом},$$

$$r_{ab} = 6 \text{ Ом}, \quad r_{bc} = 12 \text{ Ом}, \quad r_{ca} = 6 \text{ Ом}.$$

Відповіді: $I_A = -0,4 \text{ А}$, $I_B = -4,4 \text{ А}$, $I_C = 4,8 \text{ А}$,
 $I_{ab} = 2,1 \text{ А}$, $I_{bc} = -2,3 \text{ А}$, $I_{ca} = 2,5 \text{ А}$.

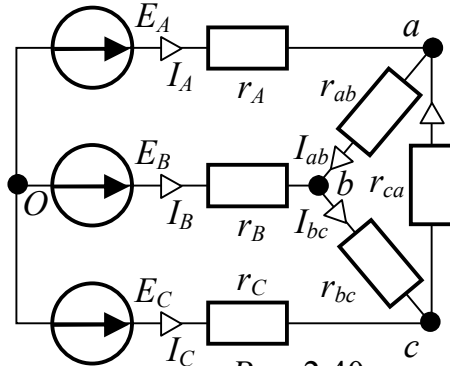


Рис. 2.40

ЗАДАЧА 2.41. У колі рис. 2.41 $J = 50 \text{ мА}$, $E = 60 \text{ В}$, $r_1 = 5 \text{ кОм}$, $r_2 = 4 \text{ кОм}$, $r_3 = 16 \text{ кОм}$, $r_4 = 2 \text{ кОм}$, $r_5 = 8 \text{ кОм}$. Обчислити струм вітки з опором r_5 , користуючись перетворенням схем з джерелами струму в еквівалентні схеми з джерелами ЕРС та навпаки.

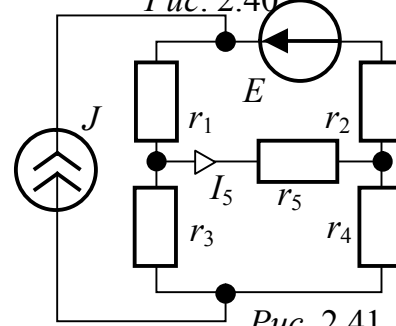


Рис. 2.41

Розв'язання

Варіант 1. Накреслимо схему рис. 2.41 у вигляді рис. 2.42,а. Еквівалентність вихідної і нової схем очевидна: до відповідних вузлів обох схем течуть однакові струми. Зокрема, сумарний струм, що підводиться до вузла a джерелами струму, дорівнює нулю. Перетворимо джерела струму J останньої схеми в джерела з ЕРС E_1 і E_3 (рис. 2.42,б):

$$E_1 = Jr_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 250 \text{ В};$$

$$E_3 = Jr_3 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^3 = 800 \text{ В}.$$

Додаючи відповідні елементи віток, доводимо рис. 2.42,б до вигляду рис. 2.42,в, для якого $E_6 = E - E_1 = 60 - 250 = -190 \text{ В}$;

$$r_6 = r_1 + r_2 = 9 \text{ кОм}; \quad r_7 = r_3 + r_4 = 18 \text{ кОм}.$$

Перетворимо схему рис. 2.42,в у схему з джерелами струму рис. 2.42,г:

$$J_6 = \frac{E_6}{r_6} = -\frac{190}{9} = -21,2 \text{ мА}; \quad J_7 = \frac{E_3}{r_7} = \frac{800}{18} = 44,4 \text{ мА}.$$

Поєднавши паралельні вітки, окрім r_5 , отримаємо схему рис. 2.42,д:

$$J_E = J_6 + J_7 = -21,1 + 44,4 = 23,3 \text{ мА}; \quad r_E = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6 \text{ кОм}.$$

У вітку r_5 відгалужується частина струму J_E , яка дорівнює

$$I_5 = J_E \cdot \frac{r_E}{r_E + r_5} = 23,3 \cdot \frac{6}{14} = 10 \text{ мА}.$$

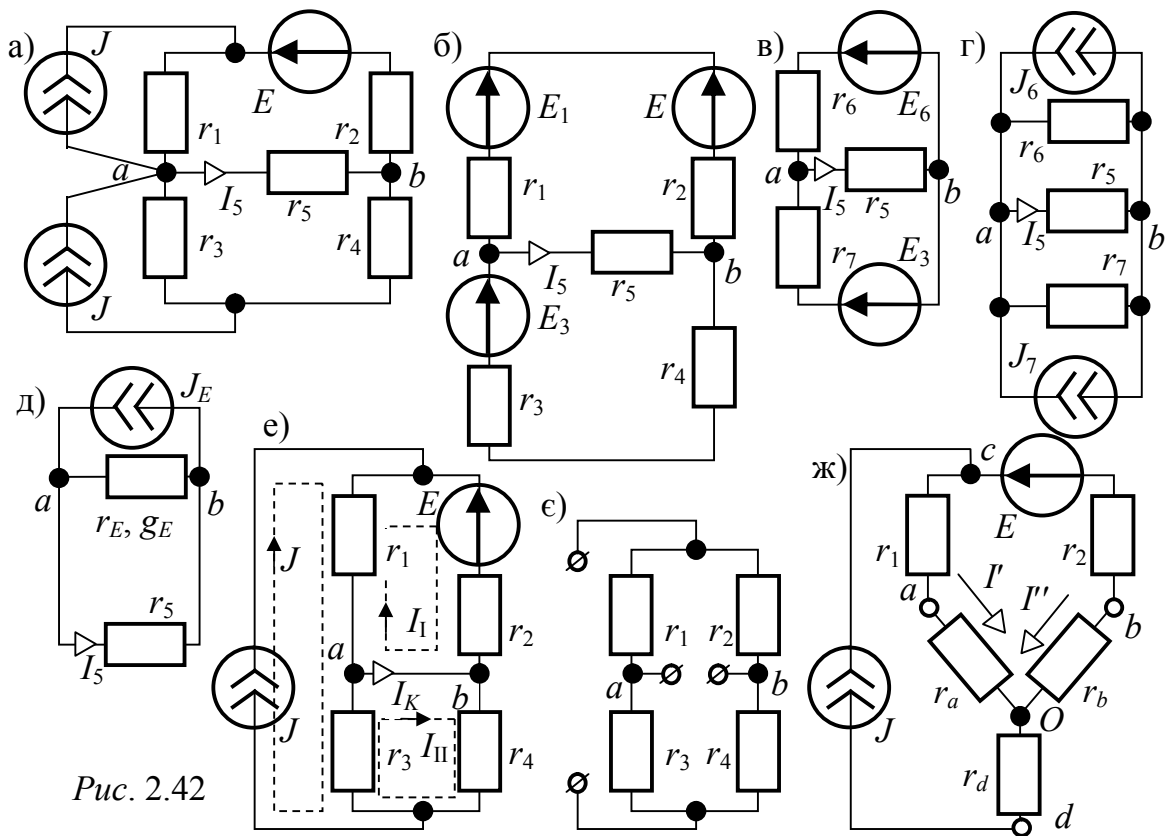


Рис. 2.42

Варіант 2. Визначимо струм J_E еквівалентного джерела струму, який дорівнює струму I_K при перемиканні опору r_5 (рис. 2.42,г). Струм I_K можна обчислити різними способами, наприклад, методом контурних струмів у схемі рис. 2.42,е:

$$\begin{cases} (r_1 + r_2) \cdot I_1 - r_1 \cdot J = -E; \\ (r_3 + r_4) \cdot I_{II} - r_3 \cdot J = 0. \end{cases}$$

Після розв'язання цих рівнянь з числовими значеннями знайдемо:

$$I_1 = 21,1 \text{ мА}; \quad I_{II} = 44,4 \text{ мА}; \quad J_E = I_{II} - I_1 = 23,3 \text{ мА}.$$

Потім розрахуємо внутрішню провідність g_E джерела струму. Вона дорівнює провідності пасивного кола між затискачами a і b при розімкненій вітці з r_5 (рис. 2.42,е); вітка, що містить джерело струму, показана розімкненою, оскільки внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченно великий:

$$g_E = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} \text{ См}; \quad r_E = \frac{1}{g_E} = 6 \text{ кОм}.$$

На рис. 2.42,д наведена схема еквівалентного джерела струму відносно затискачів a і b . З неї знаходимо шуканий струм:

$$I_5 = J_E \cdot \frac{r_E}{r_E + r_5} = 23,3 \cdot \frac{6}{14} = 10 \text{ мА}.$$

Варіант 3. Перетворимо трикутник опорів r_3 - r_4 - r_5 у еквівалентну зірку (рис. 2.42,ж). Її опори становлять:

$$r_a = \frac{r_3 r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{64}{13} \text{ кОм}; \quad r_b = \frac{8}{13} \text{ кОм}; \quad r_d = \frac{16}{13} \text{ кОм}.$$

Отримана схема містить лише два вузли O і c . Вузлова напруга відповідно до методу двох вузлів (див. задачу 2.30):

$$U_{cO} = \frac{E \frac{1}{r_2 + r_b} + J}{\frac{1}{r_1 + r_a} + \frac{1}{r_2 + r_b}} = \frac{60 \frac{1}{4 + 8/13} + 50}{\frac{1}{5 + 64/13} + \frac{1}{4 + 8/13}} = 198 \text{ В.}$$

Звертаємо увагу на те, що в знаменнику останнього виразу відсутній доданок, що враховує опір r_d . Це пов'язано з тим, що опір джерела струму нескінченно великий і додання до нього кінцевого опору r_d не змінює опору вітки з джерелом струму. За законом Ома знайдемо струми

$$I' = \frac{U_{cO}}{r_1 + r_a} = \frac{198}{5 + 64/13} = 20 \text{ мА}; \quad I'' = \frac{U_{cO} - E}{r_2 + r_b} = \frac{198 - 60}{4 + 8/13} = 30 \text{ мА}$$

і напругу між точками a і b $U_{ab} = I'r_a - I''r_b = (20 \cdot 64 - 30 \cdot 8)/13 = 80 \text{ В.}$

$$\text{Нарешті, визначаємо шуканий струм } I_5 = \frac{U_{ab}}{r_5} = \frac{80}{8} = 10 \text{ мА.}$$

ЗАДАЧА 2.42. В електричному колі рис. 2.43 відомі відносні величини:

$$E_3 = 1,1; \quad E_4 = 1,08; \quad r_3 = 0,1; \quad r_4 = 0,2; \quad r_5 = 1.$$

Виконати наступне:

1. Визначити струм короткого замикання в точці $K1$ (рубильники $S1$ і $S2$ розімкнені), а також решту струмів кола для випадків:

- $E_1 = E_2 = 1; \quad r_1 = r_2 = 0,3;$
- $E_1 = E_2 = 1; \quad r_1 = 0,3; \quad r_2 = 0,4;$
- $E_1 = 1; \quad E_2 = 1,05; \quad r_1 = 0,3; \quad r_2 = 0,4.$

2. Визначити струм короткого замикання в точці $K2$ у відносних одиницях (рубильники S_1 і S_2 замкнені), а також решту струмів кола, якщо $E_1 = 1; \quad E_2 = 1,05; \quad r_1 = 0,3; \quad r_2 = 0,4.$

3. Додатково визначити фактичний струм короткого замикання в точці $K2$ за умови, що базисні величини напруги та опору дорівнюють $U_B = 110 \text{ кВ}$ і $r_B = 200 \text{ Ом.}$

Розв'язання

1. У першому випадку (коротке замикання в точці $K1$) опір r_5 впливу не має і не враховується.

а) Виконаємо еквівалентне перетворення – заміну віток 1-2 однією еквівалентною (рис. 2.44). Оскільки $E_1 = E_2$ і $r_1 = r_2$, то $E_{12} = E_1 = 1$ і $r_{12} = \frac{1}{2}r_1 = 0,15$.

Шуканий струм короткого замикання знаходимо за законом Ома:

$$I_{K3} = E_{12}/r_{12} = 1/0,15 = 6,667.$$

Струми віток 1 і 2:

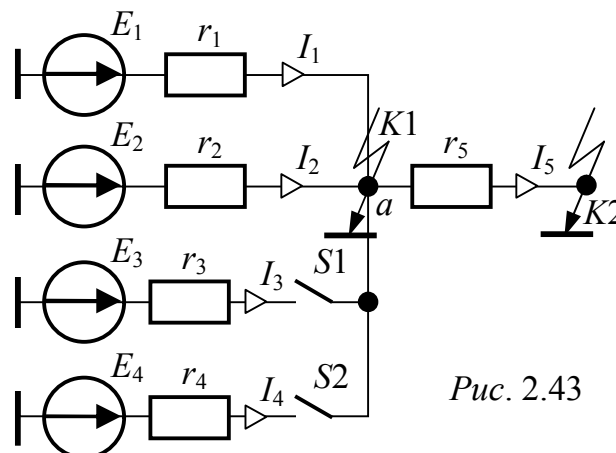


Рис. 2.43

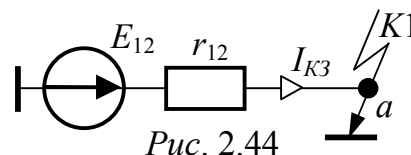


Рис. 2.44

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_{K3} = 3,333.$$

б) Оскільки в цьому випадку опори віток різні, а ЕРС однакові, то

$$E_{12} = E_1 = 1 \quad \text{і} \quad r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,3 + 0,4} = 0,1714.$$

Струм короткого замикання і струми віток:

$$I_{K3} = E_{12}/r_{12} = 1/0,1714 = 5,833,$$

$$I_1 = E_1/r_1 = 1/0,3 = 3,333,$$

$$I_2 = E_2/r_2 = 1/0,4 = 2,5.$$

в) В останньому випадку перетворення виконується на підставі формул методу двох вузлів:

$$E_{12} = \frac{E_1/r_1 + E_2/r_2}{r_1^{-1} + r_2^{-1}} = \frac{1/0,3 + 1,05/0,4}{0,3^{-1} + 0,4^{-1}} = 1,021; \quad r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,3 + 0,4} = 0,1714.$$

Струм короткого замикання і струми віток:

$$I_{K3} = E_{12}/r_{12} = 1,021/0,1714 = 5,958,$$

$$I_1 = E_1/r_1 = 1/0,3 = 3,333,$$

$$I_2 = E_2/r_2 = 1,05/0,4 = 2,625.$$

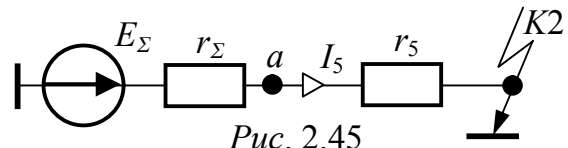


Рис. 2.45

2. При дії всіх чотирьох джерел

схеми рис. 2.43 і короткому замиканні в точці K2 знову виконаємо попереднє еквівалентне перетворення на основі методу двох вузлів і отримаємо схему рис. 2.45.

$$E_{\Sigma} = \frac{E_1 \cdot r_1^{-1} + E_2 \cdot r_2^{-1} + E_3 \cdot r_3^{-1} + E_4 \cdot r_4^{-1}}{r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} + r_4^{-1}} = \frac{1/0,3 + 1,05/0,4 + 1,1/0,1 + 1,08/0,2}{0,3^{-1} + 0,4^{-1} + 0,1^{-1} + 0,2^{-1}} = 1,073;$$

$$r_{\Sigma} = (r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} + r_4^{-1})^{-1} = (0,3^{-1} + 0,4^{-1} + 0,1^{-1} + 0,2^{-1})^{-1} = 0,048.$$

Струм короткого замикання:

$$I_{K3} = I_5 = E_{\Sigma}/(r_{\Sigma} + r_5) = 1,073/(0,048 + 1) = 1,024.$$

Обчислимо потенціал точки a:

$$\varphi_a = I_5 r_5 = 1,024 \cdot 1 = 1,024.$$

Решту струмів кола визначаємо за законом Ома в узагальненій формі:

$$I_1 = (E_1 - \varphi_a)/r_1 = (1 - 1,024)/0,3 = -0,08,$$

$$I_2 = (E_2 - \varphi_a)/r_2 = (1,05 - 1,024)/0,4 = 0,065,$$

$$I_3 = (E_3 - \varphi_a)/r_3 = (1,1 - 1,024)/0,1 = 0,76,$$

$$I_4 = (E_4 - \varphi_a)/r_4 = (1,08 - 1,024)/0,2 = 0,28.$$

Перевірка: $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -0,08 + 0,065 + 0,76 + 0,28 = 1,025 \approx I_{K3}$.

3. Фактичний струм короткого замикання у точці K2:

$$I_{K3\phi} = I_{K3} \cdot \frac{U_B}{r_B} = 1,025 \cdot \frac{110}{200} = 0,564 \text{ кА}.$$

ЗАДАЧА 2.43. В схемі рис. 2.46 відомі відносні величини:

$$E_1 = 1,1; \quad E_2 = 1,05; \quad r_1 = 0,1; \quad r_2 = 0,2; \quad r_3 = 0,8; \quad r_4 = 0,5; \quad r_5 = 0,6; \quad r_6 = 1.$$

Виконати наступне:

1. Визначити струм короткого замикання в точці $K1$, а також решту струмів кола.

2. Визначити струм короткого замикання в точці $K2$, а також решту струмів кола.

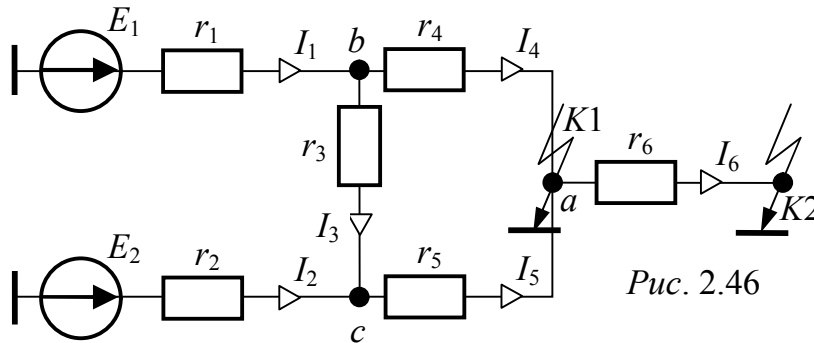


Рис. 2.46

Розв'язання

Замінімо трикутник опорів $r_3-r_4-r_5$ еквівалентною зіркою $r_a-r_b-r_c$:

$$r_a = \frac{r_4 \cdot r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{0,5 \cdot 0,6}{0,8 + 0,5 + 0,6} = 0,1579,$$

$$r_b = \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,8 + 0,5 + 0,6} = 0,2105,$$

$$r_c = \frac{r_3 \cdot r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,8 + 0,5 + 0,6} = 0,2526.$$

Отримаємо схему рис. 2.47, аналогічну схемі рис. 2.43 із задачі 2.42. І розрахунок виконаємо за тією ж самою методикою.

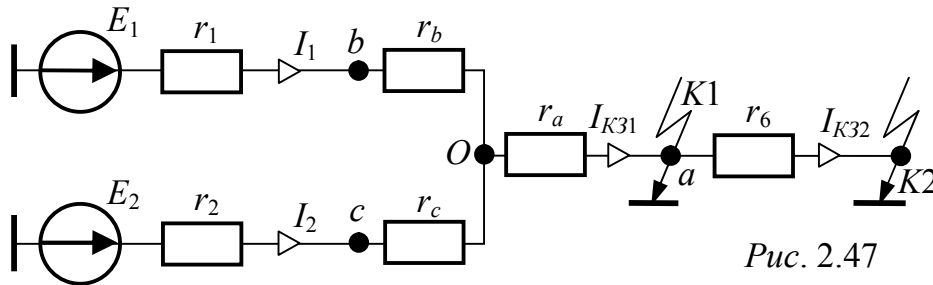


Рис. 2.47

$$E_{\Sigma} = \frac{E_1 \cdot (r_1 + r_b)^{-1} + E_2 \cdot (r_2 + r_c)^{-1}}{(r_1 + r_b)^{-1} + (r_2 + r_c)^{-1}} = \frac{1,1 / (0,1 + 0,2105) + 1,05 / (0,2 + 0,2526)}{(0,1 + 0,2105)^{-1} + (0,2 + 0,2526)^{-1}} = 1,080;$$

$$r_{\Sigma} = \left((r_1 + r_b)^{-1} + (r_2 + r_c)^{-1} \right)^{-1} = \left((0,1 + 0,2105)^{-1} + (0,2 + 0,2526)^{-1} \right)^{-1} = 0,1842.$$

1. Струм короткого замикання в точці $K1$ і струми віток:

$$I_{K31} = E_{\Sigma} / (r_{\Sigma} + r_a) = 1,080 / (0,1842 + 0,1579) = 3,157,$$

$$I_1 = (E_1 - I_{K31} \cdot r_a) / (r_1 + r_b) = (1,1 - 3,157 \cdot 0,1579) / (0,1 + 0,2105) = 1,937,$$

$$I_2 = (E_2 - I_{K31} \cdot r_a) / (r_2 + r_c) = (1,05 - 3,157 \cdot 0,1579) / (0,2 + 0,2526) = 1,218.$$

Обчислимо потенціали точок b і c :

$$\varphi_b = E_1 - I_1 \cdot r_1 = 1,1 - 1,937 \cdot 0,1 = 0,9063$$

$$\varphi_c = E_2 - I_2 \cdot r_2 = 1,05 - 1,218 \cdot 0,2 = 0,8064.$$

Решту струмів кола схеми рис. 2.46 визначаємо за законом Ома і першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I_3 &= (\varphi_b - \varphi_c)/r_3 = (0,9063 - 0,8064)/0,8 = 0,1249, \\ I_4 &= I_1 - I_3 = 1,937 - 0,1249 = 1,812, \\ I_5 &= I_2 + I_3 = 1,218 + 0,1249 = 1,343. \end{aligned}$$

2. Струм короткого замикання в точці K2 і струми віток:

$$\begin{aligned} I_{K32} &= E_\Sigma / (r_\Sigma + r_a + r_6) = 1,080 / (0,1842 + 0,1579 + 1) = 0,8047, \\ I_1 &= (E_1 - I_{K32} \cdot (r_a + r_6)) / (r_1 + r_b) = \\ &= (1,1 - 0,8047 \cdot (0,1579 + 1)) / (0,1 + 0,2105) = 0,5418, \\ I_2 &= (E_2 - I_{K32} \cdot (r_a + r_6)) / (r_2 + r_c) = \\ &= (1,05 - 0,8047 \cdot (0,1579 + 1)) / (0,2 + 0,2526) = 0,2612. \end{aligned}$$

Обчислимо потенціали точок b і c :

$$\begin{aligned} \varphi_b &= E_1 - I_1 \cdot r_1 = 1,1 - 0,5418 \cdot 0,1 = 1,046, \\ \varphi_c &= E_2 - I_2 \cdot r_2 = 1,05 - 0,2612 \cdot 0,2 = 0,9978. \end{aligned}$$

Решту струмів кола схеми рис. 2.46 визначаємо за законом Ома і першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I_3 &= (\varphi_b - \varphi_c) / r_3 = (1,046 - 0,9978) / 0,8 = 0,0603, \\ I_4 &= I_1 - I_3 = 0,5418 - 0,0603 = 0,4815, \\ I_5 &= I_2 + I_3 = 0,2612 + 0,0603 = 0,3215. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.44. В схемі рис. 2.48 відомі відносні величини: $E_1 = 1,1$; $E_2 = 1,05$; $r_1 = 0,1$; $r_2 = 0,2$; $r_3 = 0,8$; $r_4 = 1$. Визначити струм короткого замикання в точці a , а також решту струмів кола.

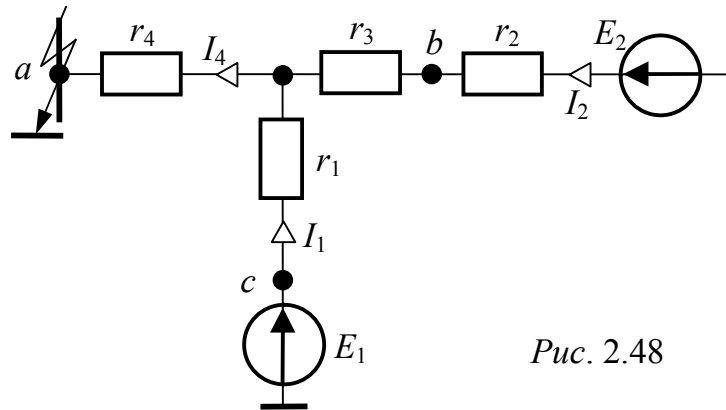


Рис. 2.48

Розв'язання

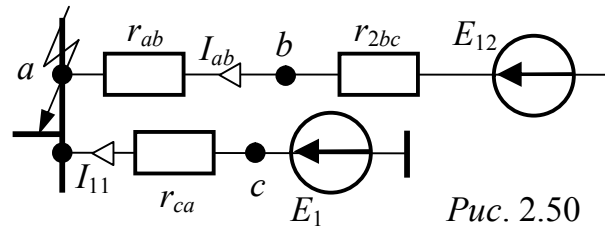
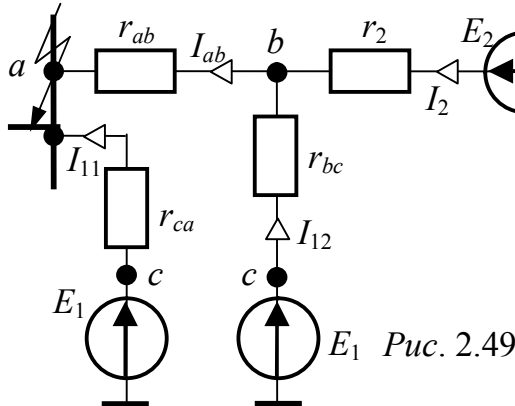
Замінімо зірку опорів r_1 - r_3 - r_4 еквівалентним трикутником r_{ab} - r_{bc} - r_{ca} :

$$\begin{aligned} r_{ab} &= r_3 + r_4 + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_1} = 0,8 + 1 + \frac{0,8 \cdot 1}{0,1} = 9,8, \\ r_{bc} &= r_1 + r_3 + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_4} = 0,1 + 0,8 + \frac{0,1 \cdot 0,8}{1} = 0,98, \\ r_{ca} &= r_1 + r_4 + \frac{r_1 \cdot r_4}{r_3} = 0,1 + 1 + \frac{0,1 \cdot 1}{0,8} = 1,225. \end{aligned}$$

Замість одного ідеального джерела E_1 можна намалювати два. В результаті одержуємо еквівалентну схему рис. 2.49. Тепер замінимо вітки 2 і bc однією еквівалентною. Дістаємо рис. 2.50:

$$E_{12} = \frac{E_1 \cdot r_{bc}^{-1} + E_2 \cdot r_2^{-1}}{r_{bc}^{-1} + r_2^{-1}} = \frac{1,1 / 0,98 + 1,05 / 0,2}{0,98^{-1} + 0,2^{-1}} = 1,058;$$

$$r_{2bc} = (r_{bc}^{-1} + r_2^{-1})^{-1} = (0,98^{-1} + 0,2^{-1})^{-1} = 0,1661.$$



Струми обчислюємо за законом Ома:

$$I_{ab} = E_{12} / (r_{2bc} + r_{ab}) = 1,058 / (0,1661 + 9,8) = 0,1062,$$

$$I_{11} = E_1 / r_{ca} = 1,1 / 1,225 = 0,8980.$$

Струм короткого замикання:

$$I_{K3} = I_4 = I_{ab} + I_{11} = 0,1062 + 0,8980 = 1,0042.$$

Визначаємо струми схем рис. 2.49 і 2.48:

$$I_2 = (E_2 - I_{ab} \cdot r_{ab}) / r_2 = (1,05 - 0,1062 \cdot 9,8) / 0,2 = 0,0462,$$

$$I_{12} = (E_1 - I_{ab} \cdot r_{ab}) / r_{bc} = (1,1 - 0,1062 \cdot 9,8) / 0,98 = 0,0604,$$

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = 0,8980 + 0,0604 = 0,9584.$$

ЗАДАЧА 2.45. В електричному колі рис. 2.51 розрахувати струм короткого замикання в точках $K1$, $K2$, $K3$, а також струми у всіх вітках. Числові дані:

$$E_1 = 1,1; E_2 = 1,05; E_3 = 0,8; E_4 = 0,7; r_1 = 0,05; r_2 = 0,1; r_3 = 2; r_4 = 2,5;$$

$$r_5 = 0,2; r_6 = 0,2; r_7 = 0,4; r_8 = 0,6; r_9 = 0,1; r_{10} = 0,5; r_{11} = 1.$$

Розв'язання

В схемі рис. 2.51 за аналогією до задачі 2.42 виконаємо наступні спрощення і отримаємо схему рис. 2.52:

- замінимо паралельно з'єднані опори r_5 одним еквівалентним $r_{13} = \frac{1}{2}r_5 = 0,1$;

- групу з трьох однакових віток $E_1 - r_1$ замінюємо однією еквівалентною $E_1 - r_{12}$: $r_{12} = r_1 / 3 = 0,0167$;

- аналогічно поступаємо з групами $E_2 - r_2$, $E_3 - r_3$ і $E_4 - r_4$:

$$r_{14} = \frac{1}{2}r_3 = 1; r_{15} = r_4 / 3 = 0,8333; r_{16} = \frac{1}{2}r_2 = 0,05.$$

1. Переходимо до перетворень в схемі рис. 2.52 при короткому замиканні в точці **K1**.

Вітки $r_{11} - (r_{10} + r_{16})$ замінюємо однією еквівалентною $E_5 - r_{23}$:

$$r_{23} = \frac{r_{11} \cdot (r_{10} + r_{16})}{r_{11} + r_{10} + r_{16}} = \frac{1 \cdot (0,5 + 0,5)}{1 + 0,5 + 0,05} = 0,3548;$$

Рисунок 2.51 – дивись файл “Album”

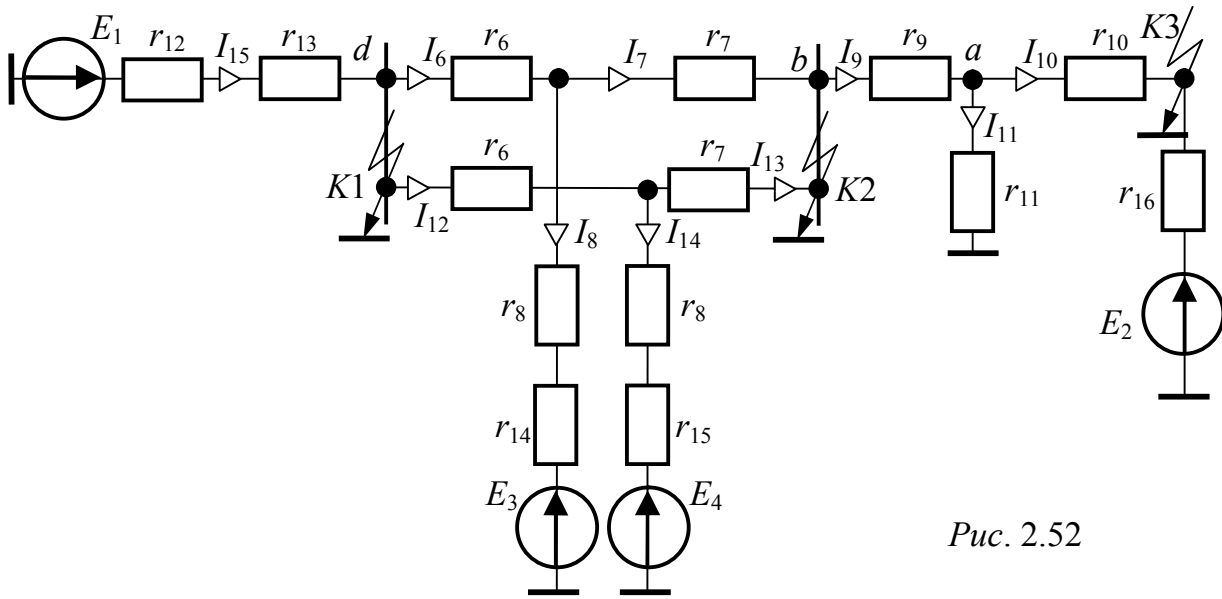


Рис. 2.52

$$E_5 = \frac{E_2 \cdot (r_{10} + r_{16})^{-1}}{(r_{10} + r_{16})^{-1} + r_{11}^{-1}} = \frac{1,05 / 0,55}{0,55^{-1} + 1^{-1}} = 0,6774.$$

Зірки опорів $r_6 - r_7 - (r_8 + r_{14})$ і $r_6 - r_7 - (r_8 + r_{15})$ замінюємо еквівалентними трикутниками $r_{17} - r_{19} - r_{20}$ і $r_{18} - r_{21} - r_{22}$, відповідно:

$$r_{17} = r_6 + (r_8 + r_{14}) + \frac{r_6 \cdot (r_8 + r_{14})}{r_7} = 0,2 + 0,6 + 1 + \frac{0,2 \cdot (0,6 + 1)}{0,4} = 2,6,$$

$$r_{19} = r_6 + r_7 + \frac{r_6 \cdot r_7}{r_8 + r_{14}} = 0,2 + 0,4 + \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,6 + 1} = 0,65,$$

$$r_{20} = r_7 + (r_8 + r_{14}) + \frac{r_7 \cdot (r_8 + r_{14})}{r_6} = 0,4 + 1,6 + \frac{0,4 \cdot (0,6 + 1)}{0,2} = 5,2,$$

$$r_{18} = r_6 + (r_8 + r_{15}) + \frac{r_6 \cdot (r_8 + r_{15})}{r_7} = 0,2 + 0,6 + 0,8333 + \frac{0,2 \cdot (0,6 + 0,8333)}{0,4} = 2,35,$$

$$r_{21} = r_6 + r_7 + \frac{r_6 \cdot r_7}{r_8 + r_{15}} = 0,2 + 0,4 + \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,6 + 0,8333} = 0,6558,$$

$$r_{22} = r_7 + (r_8 + r_{15}) + \frac{r_7 \cdot (r_8 + r_{15})}{r_6} = 0,4 + 1,4333 + \frac{0,4 \cdot (0,6 + 0,8333)}{0,2} = 4,70.$$

За допомогою прийому задачі 2.44 (рис. 2.49) одержуємо схему рис. 2.53, яку продовжуємо перетворювати в схему рис. 2.54.

$$r_{24} = \frac{r_{19} \cdot r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = \frac{0,65 \cdot 0,6558}{0,65 + 0,6558} = 0,3264,$$

$$E_6 = \frac{E_3 \cdot r_{20}^{-1} + E_4 \cdot r_{22}^{-1} + E_5 \cdot (r_{23} + r_9)^{-1}}{r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{23} + r_9)^{-1}} = \frac{0,8 / 5,2 + 0,7 / 4,7 + 0,6774 / (0,3548 + 0,1)}{5,2^{-1} + 4,7^{-1} + 0,4548^{-1}} = 0,6883;$$

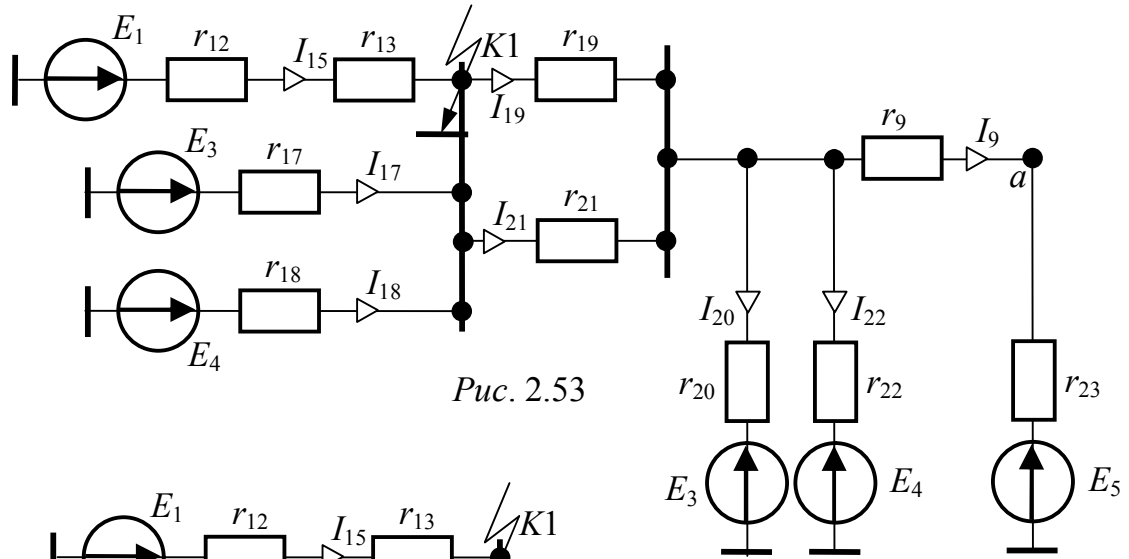


Рис. 2.53

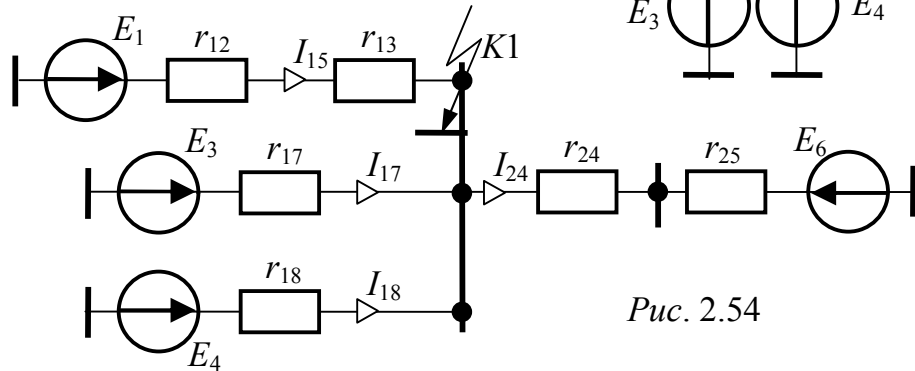


Рис. 2.54

$$r_{25} = (r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{23} + r_9)^{-1})^{-1} = (5,2^{-1} + 4,7^{-1} + 0,4548^{-1})^{-1} = 0,3840.$$

Розраховуємо струми за схемами рис. 2.52-2.54:

$$I_{15} = E_1 / (r_{12} + r_{13}) = 1,1 / (0,0167 + 0,1) = 9,426,$$

$$I_{17} = E_3 / r_{17} = 0,8 / 2,6 = 0,3077,$$

$$I_{18} = E_4 / r_{18} = 0,7 / 2,35 = 0,2979,$$

$$I_{24} = -E_6 / (r_{24} + r_{25}) = -0,6883 / (0,3264 + 0,3840) = -0,9689,$$

$$I_{19} = I_{24} \cdot \frac{r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = -0,9689 \cdot \frac{0,6558}{0,65 + 0,6558} = -0,4866,$$

$$I_{21} = I_{24} \cdot \frac{r_{19}}{r_{19} + r_{21}} = -0,9689 \cdot \frac{0,65}{0,65 + 0,6558} = -0,4823,$$

$$I_{20} = -(E_3 + I_{24} \cdot r_{24}) / r_{20} = -(0,8 - 0,9689 \cdot 0,3264) / 5,2 = -0,0930,$$

$$I_{22} = -(E_4 + I_{24} \cdot r_{24}) / r_{22} = -(0,7 - 0,9689 \cdot 0,3264) / 4,7 = -0,0816,$$

$$I_9 = -(E_5 + I_{24} \cdot r_{24}) / (r_{23} + r_9) = -(0,6774 - 0,9689 \cdot 0,3264) / (0,3548 + 0,1) = -0,7941,$$

$$\varphi_a = -I_{24} \cdot r_{24} - I_9 \cdot r_9 = 0,9689 \cdot 0,3264 + 0,7941 \cdot 0,1 = 0,3957,$$

$$I_{11} = \varphi_a / r_{11} = 0,3957 / 1 = 0,3957,$$

$$I_{10} = -(E_2 - \varphi_a) / (r_{10} + r_{16}) = -(1,05 - 0,3957) / (0,5 + 0,05) = -1,190,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} I_{10} = 0,5 \cdot 1,190 = 0,595,$$

$$I_8 = I_{20} - I_{17} = -0,093 - 0,3077 = -0,4007,$$

$$I_{14} = I_{22} - I_{18} = -0,0816 - 0,2979 = -0,3795,$$

$$I_6 = -(E_3 + I_8 \cdot (r_8 + r_{14})) / r_6 = -(0,8 - 0,4007 \cdot (0,6 + 1)) / 0,2 = -0,7944,$$

$$I_7 = I_6 - I_8 = -0,7944 + 0,4007 = -0,3937,$$

$$I_{12} = -(E_4 + I_{14} \cdot (r_8 + r_{15})) / r_6 = -(0,7 - 0,3795 \cdot (0,6 + 0,8333)) / 0,2 = -0,7803,$$

$$I_{13} = I_{12} - I_{14} = -0,7803 + 0,3795 = -0,4008,$$

$$I_1 = I_{15} / 3 = 9,426 / 3 = 3,142,$$

$$I_5 = I_{15} / 2 = 9,426 / 2 = 4,713,$$

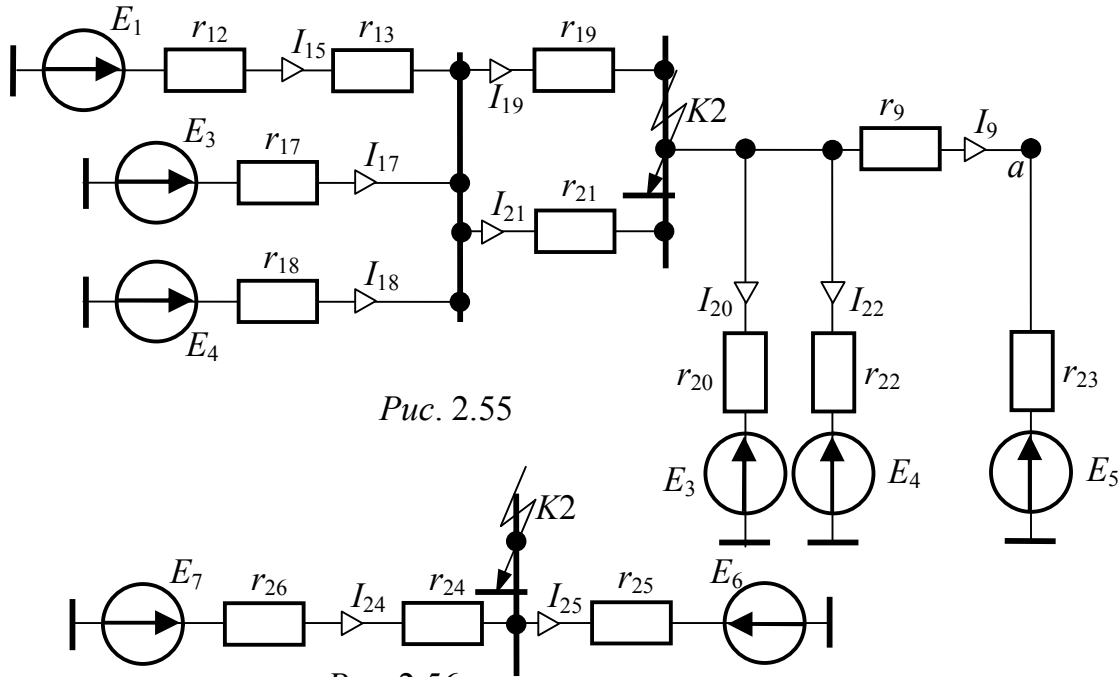
$$I_3 = I_8 / 2 = -0,4007 / 2 = -0,2004,$$

$$I_4 = I_{14} / 3 = -0,3795 / 3 = -0,1265,$$

$$I_{K3} = 2 \cdot I_5 - I_6 - I_{12} = 2 \cdot 4,713 + 0,7944 + 0,7803 = 11,0.$$

Перевірка: $I_{K3} = I_{15} + I_{17} + I_{18} - I_{24} = 9,426 + 0,3077 + 0,2979 + 0,9689 = 11.$

Розрахунок кола при короткому замиканні у точках $K2$ та $K3$ виконується за розглянутою методикою, тому наведемо лише опорні проміжні схеми та результати розрахунків.



2. При короткому замиканні в точці $K2$ кола рис. 2.52 у нагоді стають схеми рис. 2.55 і 2.56, у яких маємо:

$$r_{17} = 2,6, \quad r_{19} = 0,65, \quad r_{20} = 5,2, \quad r_{18} = 2,35, \quad r_{21} = 0,6558, \quad r_{22} = 4,70;$$

$$r_{23} = \frac{r_{11} \cdot (r_{10} + r_{16})}{r_{11} + r_{10} + r_{16}} = 0,3548; \quad E_5 = \frac{E_2 \cdot (r_{10} + r_{16})^{-1}}{(r_{10} + r_{16})^{-1} + r_{11}^{-1}} = 0,6774;$$

$$E_6 = \frac{E_3 \cdot r_{20}^{-1} + E_4 \cdot r_{22}^{-1} + E_5 \cdot (r_{23} + r_9)^{-1}}{r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{23} + r_9)^{-1}} = 0,6883,$$

$$r_{25} = (r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{23} + r_9)^{-1})^{-1} = 0,3840, \quad r_{24} = \frac{r_{19} \cdot r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = 0,3264,$$

$$E_7 = \frac{E_3 \cdot r_{17}^{-1} + E_4 \cdot r_{18}^{-1} + E_1 \cdot (r_{12} + r_{13})^{-1}}{r_{17}^{-1} + r_{18}^{-1} + (r_{12} + r_{13})^{-1}} = 1,0695,$$

$$r_{26} = (r_{17}^{-1} + r_{18}^{-1} + (r_{12} + r_{13})^{-1})^{-1} = 0,1066.$$

Схеми рис. 2.52, 2.55, 2.56 дозволяють розрахувати струми:

$$I_{24} = E_7 / (r_{26} + r_{24}) = 2,470, \quad I_{25} = -E_6 / r_{25} = -1,7924;$$

$$I_{20} = -E_3 / r_{20} = -0,1538, \quad I_{22} = -E_4 / r_{22} = -0,1489, \quad I_9 = -E_5 / (r_{23} + r_9) = -1,4894;$$

$$I_{19} = I_{24} \cdot \frac{r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = 1,2405, \quad I_{21} = I_{24} \cdot \frac{r_{19}}{r_{19} + r_{21}} = 1,2295;$$

$$I_{15} = (E_1 - I_{24} \cdot r_{24}) / (r_{12} + r_{13}) = 2,5175,$$

$$I_{17} = (E_3 - I_{24} \cdot r_{24}) / r_{17} = -0,0024, \quad I_{18} = (E_4 - I_{24} \cdot r_{24}) / r_{18} = -0,0452;$$

$$\varphi_a = -I_9 \cdot r_9 = 0,1489, \quad I_{11} = \varphi_a / r_{11} = 0,1489;$$

$$I_{10} = -(E_2 - \varphi_a) / (r_{10} + r_{16}) = -1,6384, \quad I_2 = -1/2 I_{10} = 0,8192;$$

$$I_8 = I_{20} - I_{17} = -0,1514, \quad I_{14} = I_{22} - I_{18} = -0,1037;$$

$$I_7 = (E_3 + I_8 \cdot (r_8 + r_{14})) / r_7 = 1,3944, \quad I_6 = I_7 + I_8 = 1,243;$$

$$I_{13} = (E_4 + I_{14} \cdot (r_8 + r_{15})) / r_7 = 1,3784, \quad I_{12} = I_{13} + I_{14} = 1,2747;$$

$$I_1 = I_{15} / 3 = 0,8392, \quad I_5 = I_{15} / 2 = 1,2788;$$

$$I_3 = I_8 / 2 = -0,0757, \quad I_4 = I_{14} / 3 = -0,0346;$$

$$I_{K3} = I_7 + I_{13} - I_9 = 1,3944 + 1,3784 + 1,4894 = 4,2622.$$

3. При короткому замиканні в точці **K3** кола рис. 2.52 у нагоді стають схеми рис. 2.57-2.60, у яких маємо:

$$r_{17} = 2,6, \quad r_{19} = 0,65, \quad r_{20} = 5,2, \quad r_{18} = 2,35, \quad r_{21} = 0,6558, \quad r_{22} = 4,70.$$

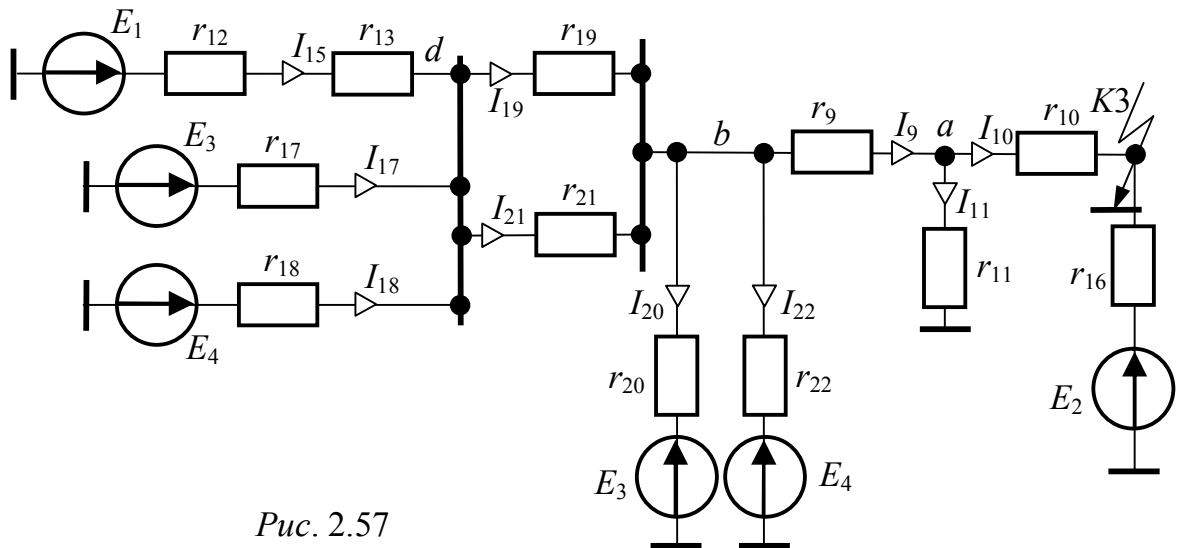


Рис. 2.57

$$r_{24} = \frac{r_{19} \cdot r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = 0,3264, \quad E_7 = \frac{E_3 \cdot r_{17}^{-1} + E_4 \cdot r_{18}^{-1} + E_1 \cdot (r_{12} + r_{13})^{-1}}{r_{17}^{-1} + r_{18}^{-1} + (r_{12} + r_{13})^{-1}} = 1,0695,$$

$$r_{26} = (r_{17}^{-1} + r_{18}^{-1} + (r_{12} + r_{13})^{-1})^{-1} = 0,1066;$$

$$E_8 = \frac{E_3 \cdot r_{20}^{-1} + E_4 \cdot r_{22}^{-1} + E_7 \cdot (r_{24} + r_{26})^{-1}}{r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{24} + r_{26})^{-1}} = 1,0214,$$

$$r_{27} = (r_{20}^{-1} + r_{22}^{-1} + (r_{24} + r_{26})^{-1})^{-1} = 0,3684;$$

$$E_9 = \frac{E_8 \cdot (r_{27} + r_9)^{-1}}{r_{11}^{-1} + (r_{27} + r_9)^{-1}} = 0,6956, \quad r_{28} = (r_{11}^{-1} + (r_{27} + r_9)^{-1})^{-1} = 0,3190;$$

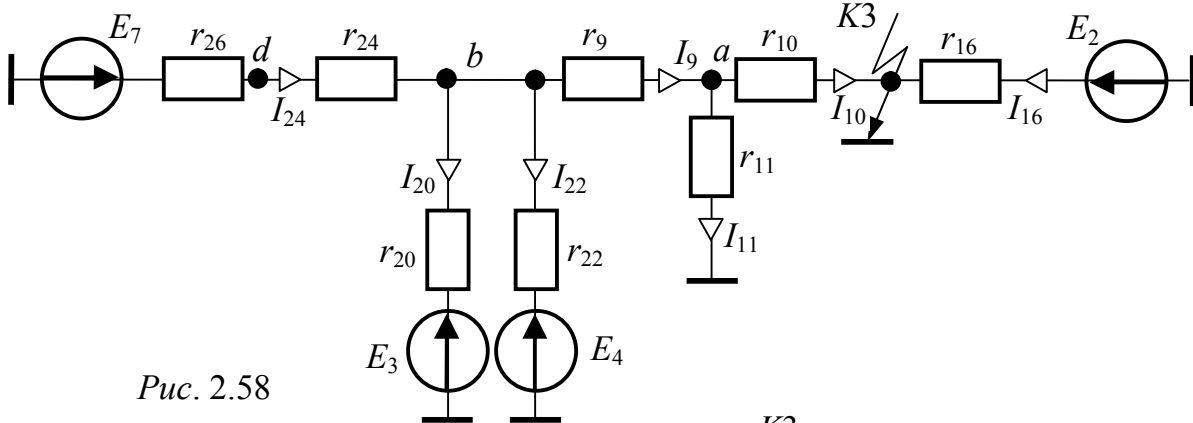


Рис. 2.58

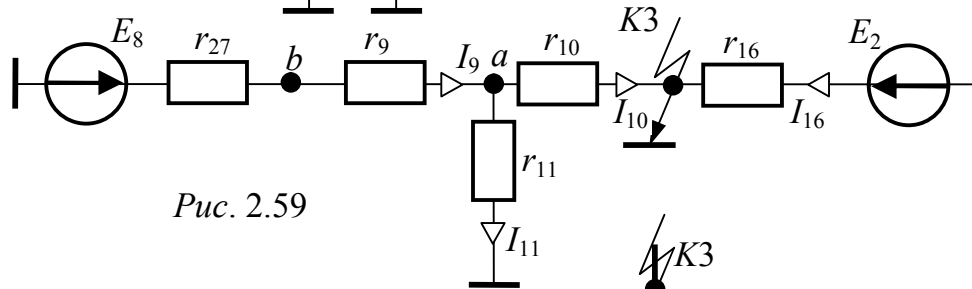


Рис. 2.59

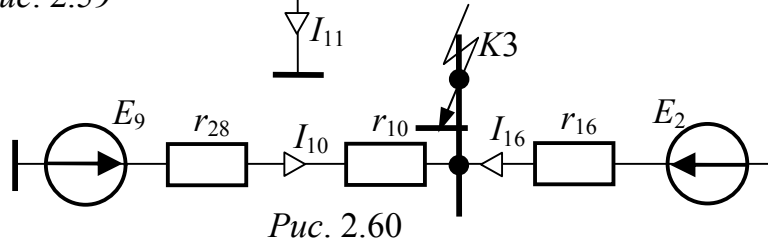


Рис. 2.60

Розрахуємо струми за допомогою схем рис. 2.52, 2.57-2.60:

$$\begin{aligned} I_{10} &= E_9 / (r_{28} + r_{10}) = 0,8493, \quad I_{16} = E_2 / r_{16} = 21; \\ \varphi_a &= I_{10} \cdot r_{10} = 0,4247, \quad I_{11} = \varphi_a / r_{11} = 0,4247, \quad I_9 = I_{10} + I_{11} = 1,274; \\ \varphi_b &= \varphi_a + I_9 \cdot r_9 = 0,5521, \quad I_{24} = (E_7 - \varphi_b) / (r_{26} + r_{24}) = 1,1949; \\ I_{20} &= -(E_3 - \varphi_b) / r_{20} = -0,0477, \quad I_{22} = -(E_4 - \varphi_b) / r_{22} = -0,0315; \\ I_{19} &= I_{24} \cdot \frac{r_{21}}{r_{19} + r_{21}} = 0,6001, \quad I_{21} = I_{24} \cdot \frac{r_{19}}{r_{19} + r_{21}} = 0,5948; \\ \varphi_d &= \varphi_b + I_{24} \cdot r_{24} = 0,9421, \quad I_{15} = (E_1 - \varphi_d) / (r_{12} + r_{13}) = 1,353, \\ I_{17} &= (E_3 - \varphi_d) / r_{17} = -0,0547, \quad I_{18} = (E_4 - \varphi_d) / r_{18} = -0,1030, \\ I_8 &= I_{20} - I_{17} = 0,007, \quad I_{14} = I_{22} - I_{18} = 0,0715; \\ I_7 &= (E_3 + I_8 \cdot (r_8 + r_{14}) - \varphi_b) / r_7 = 0,6478, \quad I_6 = I_7 + I_8 = 0,6548; \\ I_{13} &= (E_4 + I_{14} \cdot (r_8 + r_{15}) - \varphi_b) / r_7 = 0,6260, \quad I_{12} = I_{13} + I_{14} = 0,6975, \\ I_1 &= I_{15} / 3 = 0,451, \quad I_5 = I_{15} / 2 = 0,6765, \quad I_3 = I_8 / 2 = 0,0035, \quad I_4 = I_{14} / 3 = 0,0238, \\ I_2 &= I_{16} / 2 = 10,5, \quad I_{K3} = I_{16} + I_{10} = 21,8493. \end{aligned}$$

2.7 МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

У цього загально відомого методу є і інші назви:

- метод Тевенена – на ім'я автора, французького електротехніка;
- метод холостого ходу і короткого замикання;

- метод активного двополюсника.

Зазвичай його застосовують, коли потрібно знайти струм I_H лише в одній вітці схеми, яка увімкнена, наприклад, до точок a і b вказаного лінійного електричного кола (рис. 2.61,а).

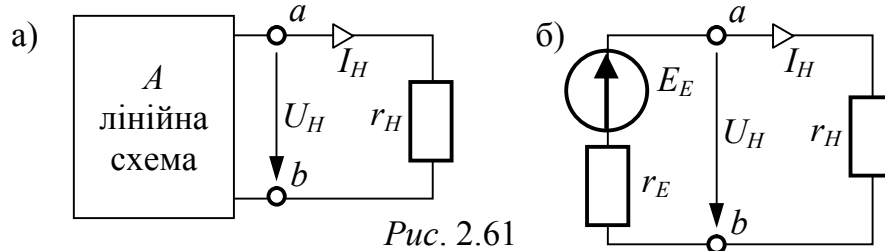


Рис. 2.61

Відповідно до теореми про еквівалентний генератор лінійна частина кола може бути замінена еквівалентною схемою джерела живлення, що є послідовним з'єднанням джерела ЕРС E_E і його внутрішнього опору r_E (рис.

2.61,б), а шуканий струм навантаження
$$I_H = \frac{E_E}{r_E + r_H}. \quad (2.16)$$

Можна рекомендувати наступний порядок розрахунку шуканого струму:

1. *Визначення ЕРС еквівалентного генератора.* Для цього:

- у вітці, що досліджується, приймається додатний напрям струму, вітка розмикається і між розімкненими затискачами за напрямом струму вводиться напруга U_{HX} ;
- для найпростішого контуру з участю U_{HX} за другим законом Кірхгофа складається рівняння, при цьому струми помічають індексом « HX »: I_{qHX} ;
- при розімкненій вітці будь-яким методом знаходять струми, що увійшли до рівняння відносно U_{HX} ;
- підставивши їх в рівняння, отримують $U_{HX} = E_E$.

2. *Визначення внутрішнього опору генератора r_E .* Для цього у частині кола, що залишилася, виключають джерела, замінюючи їх внутрішніми опорами $R_E = 0$, $R_J = \infty$, і визначають її вхідний опір відносно затисків розімкненої вітки: $R_{gx} = r_E$.

3. *Шуканий струм знаходять за законом Ома (2.16).*

ЗАДАЧА 2.46. Визначити струм I_4 у схемі рис. 2.29,а (задача 2.21) методом еквівалентного генератора.

Розв'язання

Розмикаємо вітку з опором r_4 (вилучаємо його), отримуємо режим неробочого ходу відносно затисків «3» і «4» еквівалентного генератора, що враховано на рис. 2.62,а. На рис. 2.62,б представлена пасивна частина схеми, що залишилася, за допомогою якої зручно розраховувати внутрішній опір еквівалентного генератора.

За другим законом Кірхгофа для нижнього контуру схеми рис. 2.62,а маємо:

$$U_{HX} = -E_2 - E_5 + I_{5HX} \cdot r_5.$$

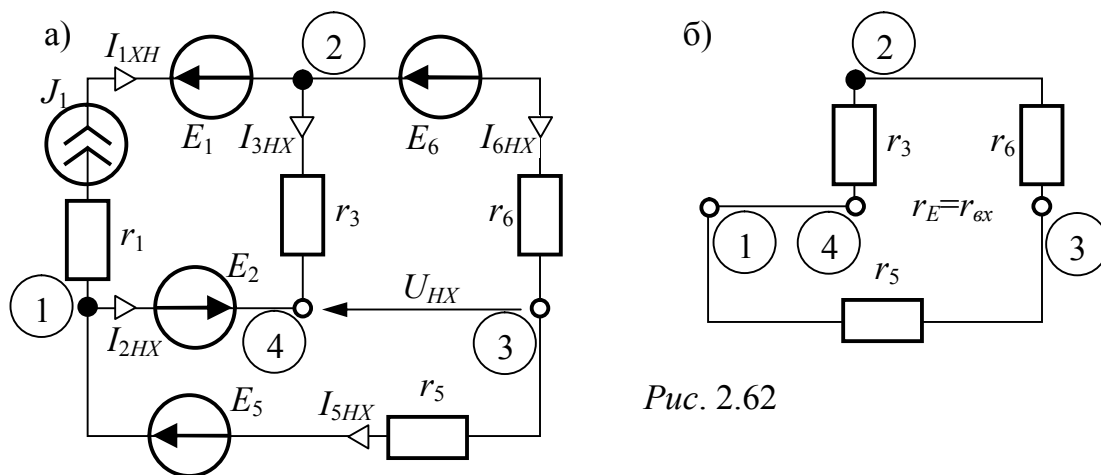


Рис. 2.62

Струм I_{5HX} розрахуємо методом контурних струмів, одним з яких є J_1 , а іншим – I_{5HX} :

$$I_{5HX} \cdot (r_5 + r_3 + r_6) - J_1 \cdot r_3 = E_5 + E_2 - E_6,$$

звідки
$$I_{5HX} = \frac{120 + 100 - 60 + 4 \cdot 40}{30 + 40 + 20} = 3,556 \text{ A},$$

а
$$U_{HX} = -100 - 120 + 3,556 \cdot 30 = -113,3 \text{ B}.$$

Відповідно до схеми рис. 2.62,б вхідний опір з боку затискачів «3» і «4»

$$r_{ex} = r_E = \frac{(r_3 + r_6) \cdot r_5}{r_3 + r_6 + r_5} = \frac{(40 + 20) \cdot 30}{40 + 20 + 30} = 20 \text{ Ом}.$$

Шуканий струм

$$I_4 = \frac{U_{HX}}{r_E + r_4} = \frac{-113,3}{20 + 60} = -1,417 \text{ A},$$

що збігається з раніше отриманим значенням.

Покажемо один з варіантів розрахунку решти струмів первинної схеми рис. 2.29,а, якщо один зі струмів (у розглянутому прикладі I_4) є розрахованим за методом еквівалентного генератора – це варіант розрахунку струмів за законами Кірхгофа:

$$I_5 = \frac{I_4 r_4 + E_2 + E_5}{r_5} = \frac{-1,417 \cdot 60 + 100 + 120}{30} = 4,5 \text{ A},$$

$$I_6 = I_4 + I_5 = -1,417 + 4,5 = 3,083 \text{ A}, \quad I_2 = I_5 - J_1 = 4,5 - 4 = 0,5 \text{ A},$$

$$I_3 = -I_2 - I_4 = -0,5 + 1,417 = 0,917 \text{ A}.$$

ЗАДАЧА 2.47. До точок a і b схеми рис. 2.18 (задача 2.10) потрібно увімкнути вітку №7 з ЕРС $E_7 = 60 \text{ B}$, направленою до вузла a , і послідовно увімкненим опором $r_7 = 3 \text{ Ом}$ (рис. 2.63).

Параметри первинної схеми узяті із умов задачі 2.10: $E_1 = 30 \text{ B}$, $E_2 = 52 \text{ B}$, $r_2 = 4 \text{ Ом}$, $r_3 = r_4 = 10 \text{ Ом}$, $r_5 = 20 \text{ Ом}$, $r_6 = 5 \text{ Ом}$.

Струми первинної схеми: $I_1 = -1 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$, $I_4 = 2 \text{ A}$, $I_5 = 1 \text{ A}$, $I_6 = 2 \text{ A}$.

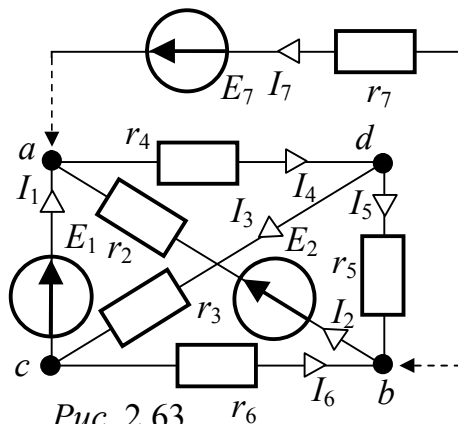


Рис. 2.63

Як зміняться струми первинної схеми в результаті увімкнення нової вітки?

Розв'язання

Вважаємо, що вихідні дані описують неробочий хід еквівалентного генератора відносно вітки, що вмикається, тому всім відомим струмам привласнимо індекс «HX»:

$$I_{1HX} = -1 \text{ A}, I_{2HX} = 3 \text{ A}, I_{3HX} = 1 \text{ A}, I_{4HX} = 2 \text{ A}, I_{5HX} = 1 \text{ A}, I_{6HX} = 2 \text{ A}.$$

ЕРС еквівалентного генератора (рис. 2.64,а) визначимо за другим законом Кірхгофа:

$$E_E = U_{abHX} = I_{4HX} \cdot r_4 + I_{5HX} \cdot r_5 = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 20 = 40 \text{ В}.$$

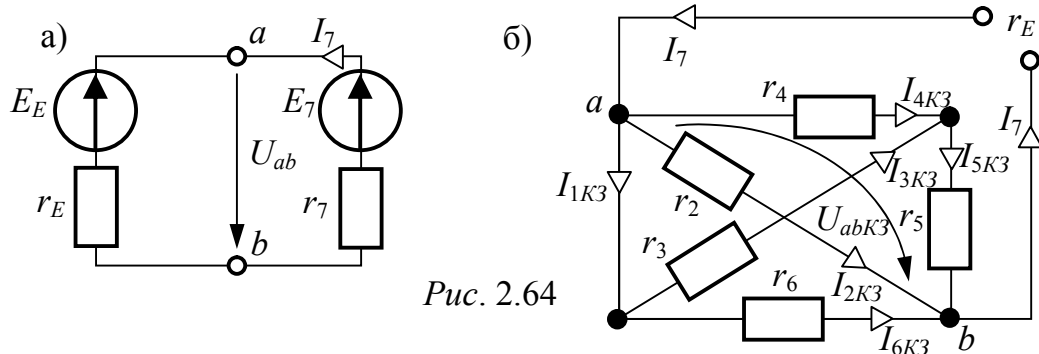


Рис. 2.64

Внутрішній опір еквівалентного генератора розраховується відповідно до рис. 2.64,б:

$$\frac{1}{r_E} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_5 + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 0,49 \text{ См},$$

$$a) \quad r_E = \frac{1}{0,49} = 2,041 \text{ Ом}.$$

Струм вітки, що вмикається (рис. 2.64,а),

$$I_7 = \frac{E_7 - E_E}{r_7 + r_E} = \frac{60 - 40}{3 + 2,041} = 3,968 \text{ A}.$$

Додаткові струми первинної схеми, викликані увімкненням вітки №7, розрахуємо за схемою внутрішніх кіл еквівалентного генератора (рис. 2.64,б), привласнивши їм індекс «K3», за умови, що до входу схеми вмикається джерело струму I_7 :

$$U_{abK3} = I_7 \cdot r_E = 3,968 \cdot 2,041 = 8,1 \text{ В},$$

$$I_{2K3} = \frac{U_{abK3}}{r_2} = \frac{8,1}{4} = 2,025 \text{ A}, \quad I_{6K3} = \frac{U_{abK3}}{r_6} = \frac{8,1}{5} = 1,62 \text{ A},$$

$$I_{5K3} = \frac{U_{abK3}}{r_5 + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4}} = \frac{8,1}{20 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 0,324 \text{ A},$$

$$I_{4K3} = I_{5K3} \cdot \frac{r_3}{r_3 + r_4} = 0,324 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 0,162 \text{ A},$$

$$I_{3K3} = I_{5K3} - I_{4K3} = 0,324 - 0,162 = 0,162 \text{ A},$$

$$I_{1K3} = I_{3K3} + I_{6K3} = 0,162 + 1,62 = 1,782 \text{ A}.$$

Нові струми схемі рис. 2.63 після увімкнення вітки №7 знайдемо за принципом накладання струмів холостого ходу і короткого замикання:

$$I_1 = I_{1HX} - I_{1K3} = -1 - 1,782 = -2,782 \text{ A}, \quad I_4 = I_{4HX} + I_{4K3} = 2 + 0,162 = 2,162 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{2HX} - I_{2K3} = 3 - 2,025 = 0,975 \text{ A}, \quad I_5 = I_{5HX} + I_{5K3} = 1 + 0,324 = 1,324 \text{ A},$$

$$I_3 = I_{3HX} - I_{3K3} = 1 - 0,162 = 0,838 \text{ A}, \quad I_6 = I_{6HX} + I_{6K3} = 2 + 1,62 = 3,62 \text{ A}.$$

Перевіримо розрахунок нового стану схеми за балансом потужностей.

Сума потужностей генераторів

$$\Sigma P_{\Gamma} = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_7 \cdot I_7 = 30 \cdot (-2,782) + 52 \cdot 0,975 + 60 \cdot 3,698 = 205,3 \text{ Вт}.$$

Сума потужностей, які споживаються в опорах,

$$\Sigma P_{\Pi} = I_2^2 \cdot r_2 + I_3^2 \cdot r_3 + I_4^2 \cdot r_4 + I_5^2 \cdot r_5 + I_6^2 \cdot r_6 + I_7^2 \cdot r_7 =$$

$$= 0,975^2 \cdot 4 + 0,838^2 \cdot 10 + 2,162^2 \cdot 10 + 1,324^2 \cdot 20 + 3,62^2 \cdot 5 + 3,968^2 \cdot 3 = 205,4 \text{ Вт}.$$

Баланс потужностей $\Sigma P_{\Gamma} = \Sigma P_{\Pi}$ зійшовся, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 2.48. Розрахувати струм I_5 схеми рис. 2.23 (задача 2.15) МЕГ.

ЗАДАЧА 2.49. Розрахувати струм I_5 схеми рис. 2.30 (задача 2.22) МЕГ.

ЗАДАЧА 2.50. В схемі рис. 2.65 визначити струм в резисторі r_2 , якщо:

$$E_1 = 72 \text{ В}, \quad E_2 = 14 \text{ В}, \quad r_1 = r_6 = 10 \text{ Ом},$$

$$r_2 = 25 \text{ Ом}, \quad r_3 = r_5 = 40 \text{ Ом}, \quad r_4 = 20 \text{ Ом}.$$

Відповіді: $U_{HX} = 50 \text{ В}$, $r_E = 25 \text{ Ом}$, $I_2 = 1 \text{ А}$.

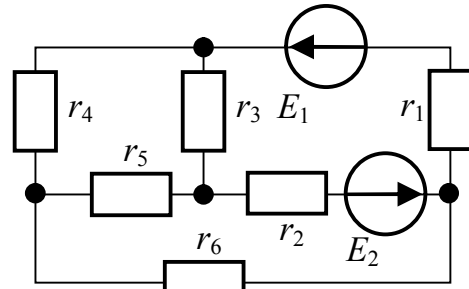


Рис. 2.65

2.8 МЕТОД НАКЛАДАННЯ (МН)

Метод накладання застосовується для аналізу і розрахунку лінійних електричних кіл, що містять, як правило, невелике число джерел енергії.

Суть методу полягає в тому, що струм кожної вітки складного кола визначається шляхом алгебричного підсумовування складових струмів, кожна з яких є функцією лише однієї ЕРС.

При розрахунку кола методом накладання спочатку вважають, що в цьому колі діє лише одне джерело, наприклад, E_1 , і визначають струми у всіх вітках від його дії: I_1' , I_2' , I_3' , тощо. Потім вважають, що в колі діє лише друге джерело, наприклад, E_2 , і знову знаходять струми у вітках: I_1'' , I_2'' , I_3'' , тощо. Потім вважають, що в колі діє лише третє джерело, наприклад, J , тощо.

Повний струм у вітці n : $I_n = I_n' + I_n'' + I_n''' + \dots$,

де I_n' , I_n'' , I_n''' , ... – складові струму у вітці n , обумовлені дією E_1 , E_2 , J , ..., відповідно.

ЗАДАЧА 2.51. Визначити струми у вітках схеми рис. 2.66, якщо

$$E_1 = 16 \text{ В}, \quad J = 1 \text{ А}, \quad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 6 \text{ Ом}.$$

Розв'язання

Задаємося додатними напрямками стру-

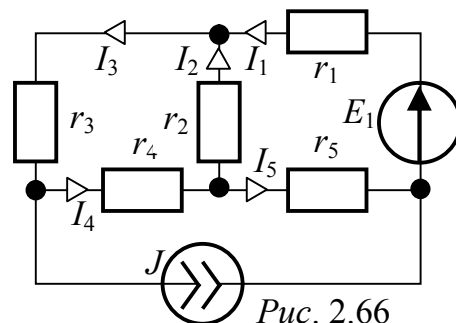


Рис. 2.66

мів у вітках кола.

Вважаємо, що у колі діє лише ЕРС E_1 (рис. 2.67), і визначаємо струми у вітках:

$$I_5' = I_1' = \frac{E_1}{r_1 + r_5 + \frac{r_2 \cdot (r_4 + r_3)}{r_2 + r_4 + r_3}} = \frac{16}{6 + 6 + \frac{6 \cdot (6 + 6)}{6 + 6 + 6}} = 1 \text{ A.}$$

Струм I_2' визначимо за формулою розподілу струму в паралельні вітки

$$I_2' = I_1' \cdot \frac{r_4 + r_3}{r_4 + r_3 + r_2} = 1 \cdot \frac{12}{18} = 0,667 \text{ A.}$$

Струм I_3' визначимо за першим законом Кірхгофа

$$I_4' = I_3' = I_1' - I_2' = 1 - 0,667 = 0,333 \text{ A.}$$

Тепер вважатимемо, що в колі діє тільки джерело струму J (рис. 2.68), і визначимо струми від дії цього джерела.

Для визначення струмів в схемі рис. 2.68 перетворимо трикутник опорів r_2 - r_3 - r_4 у еквівалентну зірку. Врахуємо, що опори трикутника однакові:

$$r_{23} = r_{24} = r_{34} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3 + r_4} = \frac{36}{18} = 2 \text{ Ом.}$$

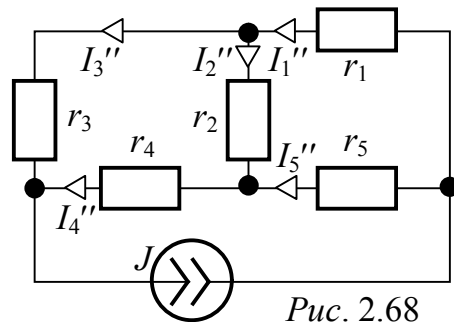


Рис. 2.68

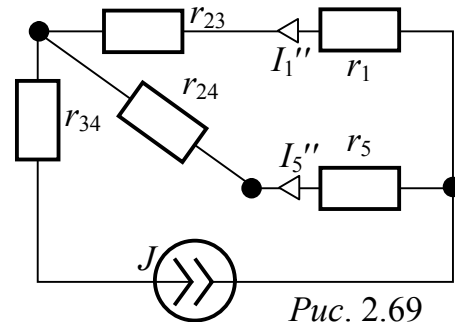


Рис. 2.69

Внаслідок перетворення отримаємо еквівалентну схему рис. 2.69, з якої визначимо струми I_1'' і I_5'' :

$$I_1'' = J \cdot \frac{r_{24} + r_5}{r_{24} + r_5 + r_{23} + r_1} = 1 \cdot \frac{2 + 6}{2 + 6 + 2 + 6} = 0,5 \text{ A,}$$

$$I_5'' = J - I_1'' = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ A.}$$

У схемі рис. 2.68 з використанням другого закону Кірхгофа для контуру r_1 - r_2 - r_5 визначимо струм I_2'' :

$$r_1 \cdot I_1'' + r_2 \cdot I_2'' - r_5 \cdot I_5'' = 0, \quad \text{звідки} \quad I_2'' = \frac{r_5 I_5'' - r_1 I_1''}{r_2} = 0.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струми, що залишилися:

$$I_4'' = I_2'' + I_5'' = 0,5 \text{ A,} \quad I_3'' = I_1'' - I_2'' = 0,5 \text{ A.}$$

За принципом накладання визначимо повні струми у вітках

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ A,}$$

$$I_4 = I_4' - I_4'' = 0,333 - 0,5 = -0,167 \text{ A,}$$

$$I_2 = -I_2' - I_2'' = 0,667 \text{ A,}$$

$$I_5 = I_5' - I_5'' = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ A.}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0,333 + 0,5 = 0,833 \text{ A,}$$

ЗАДАЧА 2.52. В умовах задачі 2.18 (рис. 2.26) визначити струми за методом накладання.

Розв'язання

Струми від дії джерела E_1 (рис. 2.70):

$$I_1' = \frac{E_1}{\frac{(r_3 + r_4) \cdot r_2}{r_3 + r_4 + r_2} + r_1} = \frac{120}{\frac{(5 + 15) \cdot 20}{5 + 15 + 20} + 20} = 4 \text{ A},$$

$$I_3' = I_4' = I_1' \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_4} = 4 \cdot \frac{20}{20 + 5 + 15} = 2 \text{ A},$$

$$I_2' = I_3' - I_1' = 2 - 4 = -2 \text{ A}.$$

Визначимо струми від дії джерела E_2 (рис. 2.71).

Оскільки $r_1 = r_2$, то схеми рис. 2.70 та рис. 2.71 виявляються ідентичними, і оскільки $E_2 = 0,5 \cdot E_1$, то часткові струми схеми рис. 2.71 виявляються у два рази менше відповідних струмів схеми рис. 2.72:

$$I_2'' = 0,5 \cdot I_1' = 2 \text{ A}, \quad I_1'' = 0,5 \cdot I_2' = -1 \text{ A},$$

$$I_3'' = I_4'' = 0,5 \cdot I_3' = 1 \text{ A}.$$

Визначимо струми від дії джерела струму J (рис. 2.72):

$$I_4''' = J \cdot \frac{r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}{r_4 + r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = 4 \cdot \frac{5 + 20/2}{15 + 5 + 20/2} = 2 \text{ A},$$

$$I_3''' = I_4''' - J = 2 - 4 = -2 \text{ A}.$$

Оскільки $r_1 = r_2$, то $I_1''' = I_2''' = 0,5 I_3''' = -1 \text{ A}$.

За принципом накладання визначаємо повні струми:

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = 4 - 1 - 1 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 2 + 1 - 2 = 1 \text{ A},$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = -2 + 2 - 1 = -1 \text{ A}, \quad I_4 = I_4' + I_4'' + I_4''' = 2 + 1 + 2 = 5 \text{ A}.$$

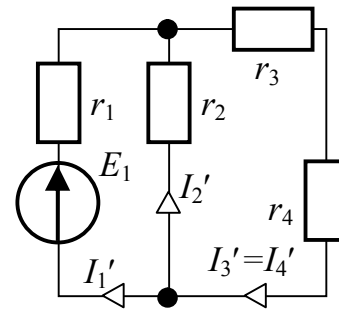


Рис. 2.70

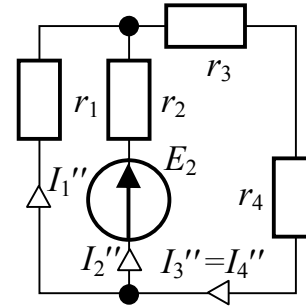


Рис. 2.71

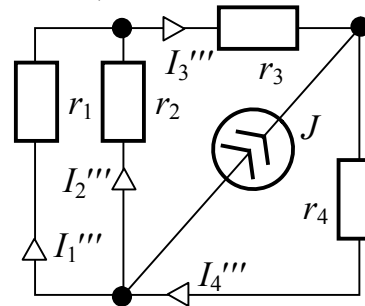


Рис. 2.72

ЗАДАЧА 2.53. Розв'язати задачу 2.34 МН.

ЗАДАЧА 2.54. В умовах задачі 2.17 (рис. 2.25) визначити струми у всіх вітках МН.

ЗАДАЧА 2.55. Визначити струми МН в умовах задачі 2.14 (рис. 2.22,а).

ЗАДАЧА 2.56. Методом накладання визначити струми в умовах задачі 2.26 (рис. 2.32).

2.9 ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ ДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Звернемо увагу на те, що при запису рівнянь, що описують стан електричних кіл, у матричній формі вітки схеми не повинні складатися лише з ідеальних елементів таких, як: 1) джерело струму, внутрішній опір якого приймається нескінченно великим $r_J = \infty$, $g_J = r_J^{-1} = 0$; 2) джерело ЕРС,

внутрішній опір якого $r_E = 0$, а відповідна провідність $g_E = r_E^{-1} = \infty$; 3) перемичка, опір якої $r = 0$, а $g = \infty$.

Тому на першому етапі роботи зі схемою вона потребує еквівалентних перетворень:

1) кожне джерело струму вмикається паралельно віткам, з якими воно утворювало контур;

2) джерела ЕРС віток, що складаються лише з цих ЕРС, переносяться за вузол електричного кола;

3) вузли, з'єднані перекладками, об'єднуються в єдиний вузол.

Після таких перетворень первинної схеми в новій розрахунковій схемі будуть лише узагальнені вітки виду рис. 2.73.

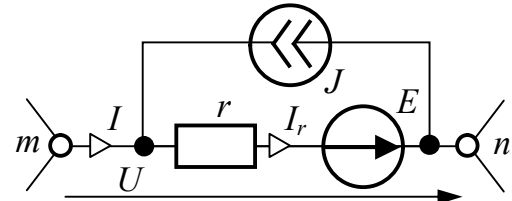


Рис. 2.73

На цій схемі: точки « m » і « n » –

кінцеві затискачі вітки, які є вузлами розгалуженого кола, потенціали цих точок, відповідно, φ_m і φ_n ; напруга вітки $U = \varphi_m - \varphi_n$; струм узагальненої вітки (надалі струм вітки) I , додатний напрям якого вибирається обов'язково співпадаючим з додатним напрямом напруги вітки U ; I_r – струм опору вітки; E – ЕРС джерела ЕРС вітки; J – струм джерела струму вітки; r – опір вітки.

Примітка. Вказані на рис. 2.73 напрями I , I_r , E , J прийняті за додатні. Якщо з якоїсь причини напрями деяких величин будуть протилежними тим, які вказані на рис. 2.73, при передачі цифрової інформації необхідно передбачити знак « $-$ » перед числом.

ЗАДАЧА 2.57. Для розрахунку електричного кола рис. 2.74,а з вибраним графом, представленим на рис. 2.74,б, скласти рівняння за законами Ома та Кірхгофа в матричній формі.

Параметри поданого електричного кола задано:

$$E_1 = 80 \text{ В}, \quad E_5 = 150 \text{ В}, \quad J_2 = 3 \text{ А}, \quad J_3 = 7 \text{ А},$$

$$r_1 = 6 \text{ Ом}, \quad r_2 = 12 \text{ Ом}, \quad r_3 = 15 \text{ Ом}, \quad r_4 = 25 \text{ Ом}, \quad r_5 = 30 \text{ Ом}, \quad r_6 = 8 \text{ Ом}.$$

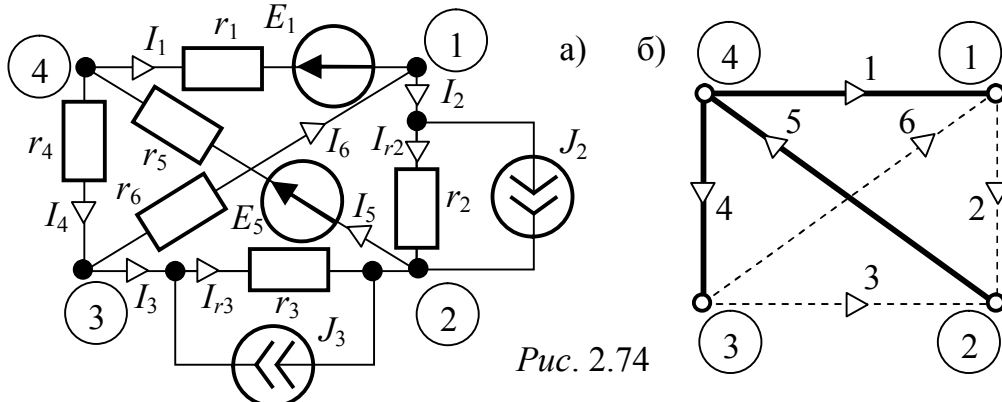


Рис. 2.74

Розв'язання

У схемі шість узагальнених віток зі струмами, що підлягають розрахунку. Матриця струмів віток має вигляд $[I_6] = [I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6]^T$.

У схемі є два струми опорів, відмінних від струмів узагальнених віток. Це струми I_{r3} та I_{r2} .

Напруги віток, які співпадають за напрямом з узагальненими струмами віток,

$$U_1 = \varphi_4 - \varphi_1, \quad U_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_3 = \varphi_3 - \varphi_2,$$

$$U_4 = \varphi_4 - \varphi_3, \quad U_5 = \varphi_2 - \varphi_4, \quad U_6 = \varphi_3 - \varphi_1.$$

Напруги віток, як і струми віток, утворюють матрицю-вектор з шістьма рядками $[U_6] = [U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6]^T$.

Такими ж матрицями із шістьма рядками (за кількістю віток схеми рис. 2.74,а) є матриці активних параметрів віток:

$[E_6] = [-E_1, 0, 0, 0, E_5, 0]^T$ – матриця ЕРС віток;

$[J_6] = [0, -J_2, J_3, 0, 0, 0]^T$ – матриця струмів джерел струму віток.

Звертаємо увагу, що знаки «мінус» в матрицях $[E_6]$ і $[J_6]$ з'явилися відповідно до рис. 2.75, за законами Кірхгофа для якого одержуємо

$$\begin{cases} I + J = I_r, \\ U - I_r \cdot r = -E, \end{cases}$$

на підставі чого одержуємо дві редакції закону Ома для узагальненої вітки:

1) $U = (I + J) \cdot r - E$; 2) $I = (U + E) \cdot g - J$, де $g = r^{-1}$ – провідність вітки.

У матричній формі рівняння, записані за законом Ома, можна також представити в двох редакціях:

1) $[U_6] = [R_6] \cdot \{[I_6] + [J_6]\} - [E_6]$; 2) $[I_6] = [G_6] \cdot \{[U_6] + [E_6]\} - [J_6]$,

де фігурують діагональні матриці опорів віток $[R_6]$ і їх провідностей $[G_6]$, причому $[G_6] = [R_6]^{-1}$. Для даної схеми

$$[R_6] = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix}; \quad [G_6] = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix};$$

де $g_q = r_q^{-1}$ – провідність вітки q .

Після виконання операцій перемноження, складання і віднімання матриць одержуємо розгорнені системи співвідношень відповідно до вищезазначених редакцій закону Ома:

1) $U_1 = I_1 \cdot r_1 + E_1$;

$U_2 = I_2 \cdot r_2 - J_2 \cdot r_2$;

$U_3 = I_3 \cdot r_3 + J_3 \cdot r_3$;

$U_4 = I_4 \cdot r_4$;

$U_5 = I_5 \cdot r_5 - E_5$;

$U_6 = I_6 \cdot r_6$;

2) $I_1 = (U_1 - E_1) \cdot g_1 = (U_1 - E_1)/r_1$;

$I_2 = U_2 \cdot g_2 + J_2 = U_2/r_2 + J_2$;

$I_3 = U_3 \cdot g_3 - J_3 = U_3/r_3 - J_3$;

$I_4 = U_4 \cdot g_4 = U_4/r_4$;

$I_5 = (U_5 + E_5) \cdot g_5 = (U_5 + E_5)/r_5$;

$I_6 = U_6 \cdot g_6 = U_6/r_6$.

Складемо для даної схеми одну з топологічних матриць – *матрицю з'єднань* $[A]$ (інша назва – *вузлова матриця*). Для цього один з вузлів схеми приймаємо за базисний, в нашому прикладі хай це буде вузол з найбільшим номером – №4.

При складанні матриці $[A]$ номери рядків відповідають номерам вузлів, номери стовпців – номерам віток, причому в порядку зростання індексів. Якщо вітка направлена від вузла, то ця обставина в матриці $[A]$ відображається $+1$, якщо до вузла – в матриці з'являється коефіцієнт -1 , якщо вітка не сполучена з вузлом – 0 . Таким чином, отримуємо для схеми рис. 2.76

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишемо перший закон Кірхгофа в матричній формі $[A] \cdot [I_6] = [0]$.

Після виконання операції множення матриці $[A]$ на матрицю-вектор струмів віток $[I_6]$ отримуємо розгорнену систему рівнянь, записаних за першим законом Кірхгофа у кількості $(V - 1)$ (див. метод рівнянь Кірхгофа):

$$1) -I_1 + I_2 - I_6 = 0; \quad 2) -I_2 - I_3 + I_5 = 0; \quad 3) I_3 - I_4 + I_6 = 0.$$

Складемо для даної схеми з врахуванням графа (рис. 2.74,б) матрицю головних контурів $[B]$, в якій рядкам відповідають вітки зв'язку 2, 3, 6 в порядку зростання індексів і при цьому кожен головний контур обходиться у напрямку вітки зв'язку. Отримуємо

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другий закон Кірхгофа в матричній формі записується у вигляді матричного рівняння $[B] \cdot [U_6] = [0]$. Після розкриття добутку одержуємо систему рівнянь у розгорнутому вигляді

$$4) U_1 + U_2 + U_5 = 0; \quad 5) U_3 + U_4 + U_5 = 0; \quad 6) -U_1 + U_4 + U_6 = 0.$$

Рівняння 1) – 6) є системою рівнянь Кірхгофа.

ЗАДАЧА 2.58. Розв'язати задачу 2.18 із застосуванням матричного методу.

Розв'язання

Використовуємо наступні стовпцеві матриці:

- струми віток	$[I] = [I_2, I_3, I_1, I_4]^T;$
- струми джерел струму	$[J] = [0, 0, 0, -J]^T;$
- узагальнені струми віток	$[I_6] = [I] + [J] = [I_2, I_3, I_1, I_4 - J]^T;$
- напруги віток	$[U] = [U_2, U_3, U_1, U_4]^T;$
- ЕРС віток	$[E] = [E_2, 0, E_1, 0]^T;$
- узагальнена напруга віток	$[U_6] = [U] - [E] = [U_2 - E_2, U_3, U_1 - E_1, U_4]^T.$

Матриця з'єднань: $[A] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 & \text{вітки} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{вузли} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$

Рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$[A] \cdot [I_6] = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \\ I_4 - J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 + I_3 - I_1 \\ -I_3 + I_4 - J \end{bmatrix} = 0,$$

тобто $\begin{cases} -I_2 + I_3 - I_1 = 0, \\ -I_3 + I_4 - J = 0. \end{cases}$ (2.17)

Або $[A] \cdot [I] = -[A] \cdot [J]:$

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 + I_3 - I_1 \\ -I_3 + I_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix}.$$

Діагональна матриця опорів $[R] = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$

Отримаємо матрицю головних контурів. Спочатку представимо матрицю з'єднань у вигляді двох підматриць:

$$[A] = [A_1, A_2], \text{ де } [A_1] = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ та } [A_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо: $[A_1]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$

$$-[F]^T = [A_1]^{-1} \times [A_2] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; [F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Матриця головних контурів: $[B] = [F, \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Рівняння за другим законом Кірхгофа: $[B] \times [U_6] = 0,$

$$[B] \times [U_6] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{2\epsilon} \\ U_{3\epsilon} \\ U_{1\epsilon} \\ U_{4\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{2\epsilon} + U_{1\epsilon} \\ U_{2\epsilon} + U_{3\epsilon} + U_{4\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_2 + E_2 + U_1 - E_1 \\ U_2 - E_2 + U_3 + U_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Або з урахуванням $[U] = [R] \times [I] = [r_2 \cdot I_2, r_3 \cdot I_3, r_1 \cdot I_1, r_4 \cdot I_4]^T$

маємо перетворення $[U_6] = [U] - [E] = \begin{bmatrix} r_2 \cdot I_2 - E_2 \\ r_3 \cdot I_3 \\ r_1 \cdot I_1 - E_1 \\ r_4 \cdot I_4 \end{bmatrix}$ і тоді

$$[B] \times [U_6] = \begin{bmatrix} -r_2 \cdot I_2 + E_2 + r_1 \cdot I_1 - E_1 \\ r_2 \cdot I_2 - E_2 + r_3 \cdot I_3 + r_4 \cdot I_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким чином, отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} -r_2 \cdot I_2 + E_2 + r_1 \cdot I_1 - E_1 = 0 \\ r_2 \cdot I_2 - E_2 + r_3 \cdot I_3 + r_4 \cdot I_4 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} r_1 \cdot I_1 - r_2 \cdot I_2 = E_1 - E_2, \\ r_2 \cdot I_2 + r_3 \cdot I_3 + r_4 \cdot I_4 = E_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.17) – (2.18) утворюють систему рівнянь Кірхгофа.

2.10 РОЗРАХУНОК КІЛ З КЕРОВАНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ

Залежне або кероване джерело є ідеалізованим чотирьополосним елементом, що має пару вхідних і пару вихідних затискачів. Вхідна вітка – КЗ або розрив, вихідна – джерело напруги (ДН) або джерело струму (ДС). Короткозамкнений вхід має струм I_1 та нульову напругу, розімкнений вхід – U_1 та нульовий струм. Вхідні величини керують вихідними I_2 або U_2 , які пропорційні струму або напрузі вхідної вітки. Можливі наступні варіанти.

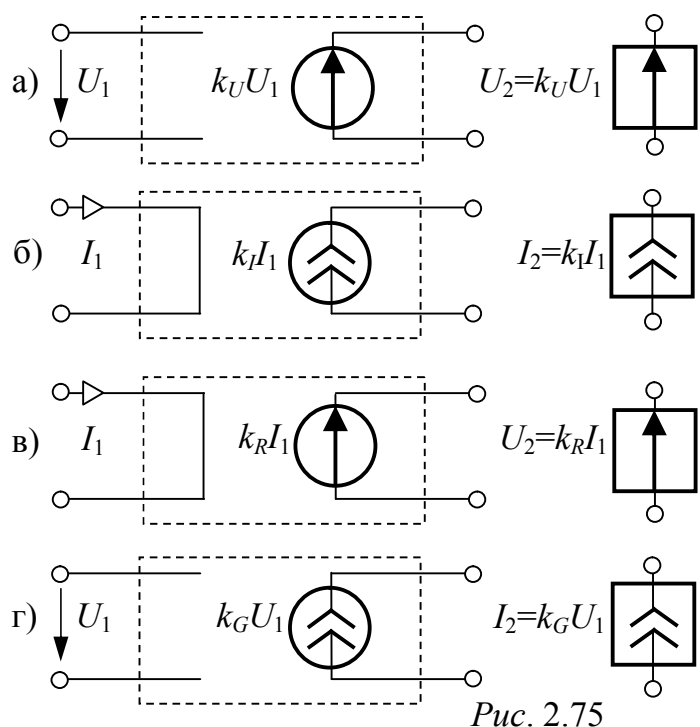


Рис. 2.75

1. **ДНКН** (джерело напруги, кероване напругою) (рис. 2.75, а): $I_1 = 0$, $U_2 = k_U \cdot U_1$ – це ідеальний підсилювач напруги – ідеалізація реального підсилювача.

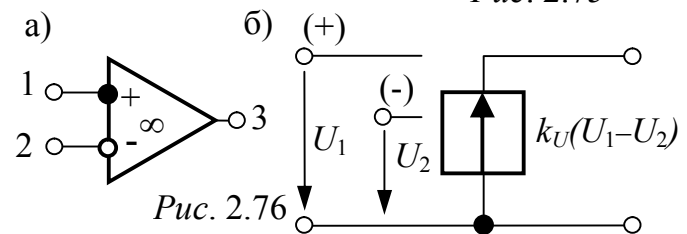


Рис. 2.76

2. **ДСКС** (джерело струму, кероване струмом) (рис. 2.75, б): $U_1 = 0$, $I_2 = k_I \cdot I_1$ – ідеальний підсилювач струму. k_U, k_I – коефіцієнти підсилення.

3. **ДНКС** (джерело напруги, кероване струмом) (рис. 2.75, в):

$$U_1 = 0, \quad U_2 = k_R \cdot I_1, \quad k_R - \text{передатний опір.}$$

4. **ДСКН** (джерело струму, кероване напругою) (рис. 2.75, г):

$$I_1 = 0, \quad I_2 = k_G \cdot U_1, \quad k_G - \text{передатна провідність.}$$

Коефіцієнт пропорційності k також називають коефіцієнтом керування.

Операційний підсилювач (ОП) є ДНКН з $k_U \rightarrow \infty$, $R_{ex} = \infty$; $R_{вх} = 0$ (рис. 2.76). Полярність інверсного входу зворотна, а неінверсного входу – однакова з полярністю напруги на виході, яка не перевищує напругу джерела живлення (порядка 15 В).

ЗАДАЧА 2.59. У колі рис. 2.77 визначити струми, перевірити баланс потужностей, якщо $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 15 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $E = 65 \text{ В}$, $J_1 = 2 \cdot I_3$, $J_2 = 0,1 \cdot U_1$.

Розв’язання

Задачу розв’яжемо методом контурних струмів. За контурні струми взяті: $I_1 = J_1$, $I_{II} = J_2$, $I_{III} = I_1$; напрямки обходу контурів показані на рис. 2.77. Оскільки невідомим вважається лише один контурний струм (I_1), для нього і складаємо контурне рівняння:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - R_2 \cdot J_1 + R_4 \cdot J_2 = E.$$

Струми віток, записані через контурні струми за принципом накладання:

$$I_2 = J_1 - I_1; \quad I_3 = J_1 + J_2; \quad I_4 = I_1 + J_2.$$

Напруга для другого керованого джерела $U_1 = R_1 \cdot I_1$.

Тоді струми джерел струму (перший і другий контурні струми):

$$J_2 = 0,1 \cdot U_1 = 0,1 \cdot R_1 \cdot I_1; \quad J_1 = 2 \cdot I_3 = 2 \cdot J_1 + 2 \cdot J_2 = 2 \cdot J_1 + 0,2 \cdot R_1 \cdot I_1.$$

Із останнього рівняння $J_1 = -0,2 \cdot R_1 \cdot I_1$.

Після підстановки J_1 і J_2 у контурне рівняння отримуємо:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_2) + 0,2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot I_1 + 0,1 \cdot R_1 \cdot R_4 \cdot I_1 = E,$$

звідки знаходимо струм першої вітки:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_4 + 0,2R_1 \cdot R_2 + 0,1R_1 \cdot R_4} = \frac{65}{10 + 5 + 20 + 0,2 \cdot 10 \cdot 5 + 0,1 \cdot 10 \cdot 20} = 1 \text{ А}.$$

Далі знаходимо струми джерел струму і струми решти віток:

$$J_1 = -0,2 \cdot R_1 \cdot I_1 = -0,2 \cdot 10 \cdot 1 = -2 \text{ А}; \quad J_2 = 0,1 \cdot R_1 \cdot I_1 = 0,1 \cdot 10 \cdot 1 = 1 \text{ А};$$

$$I_2 = J_1 - I_1 = -2 - 1 = -3 \text{ А};$$

$$I_3 = J_1 + J_2 = -2 + 1 = -1 \text{ А};$$

$$I_4 = I_1 + J_2 = 1 + 1 = 2 \text{ А}.$$

Потужність джерел:

$$P_{\Gamma} = E \cdot I_1 + J_1 \cdot (R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3) + J_2 \cdot (R_4 \cdot I_4 + R_3 \cdot I_3) = 65 - 2 \cdot (-15 - 15) + 1 \cdot (40 - 15) = 150 \text{ Вт}.$$

Потужність споживачів:

$$P_{II} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 = 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 3^2 + 15 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2^2 = 150 \text{ Вт}.$$

Баланс $P_{\Gamma} = P_{II}$ виконується.

ЗАДАЧА 2.60. У колі рис. 2.78 визначити струми, якщо $R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 =$

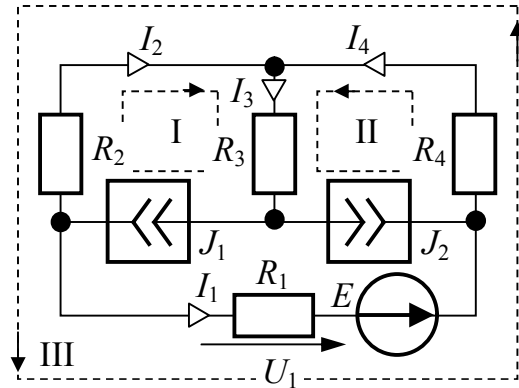


Рис. 2.77

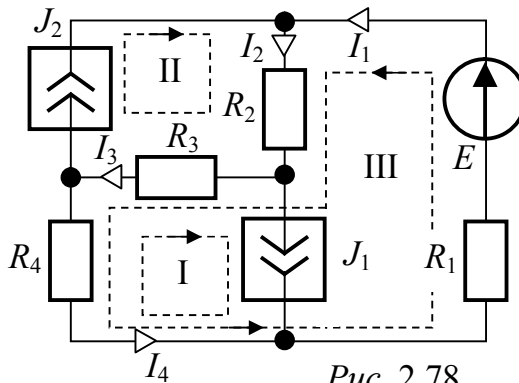


Рис. 2.78

$= 40 \text{ Ом}$, $E = 100 \text{ В}$, $J_1 = 0,2 \cdot I_1$, $J_2 = 0,5 \cdot I_2$. Зробити перевірку розрахунку струмів за другим законом Кірхгофа.

Розв'язання

Задачу розв'яжемо методом контурних струмів. За контурні струми взяті: $I_1 = J_1$, $I_{II} = J_2$, $I_{III} = I_1$; напрями обходу контурів показані на рис. 2.78.

Струми віток, що керують джерелами, запишемо через контурні струми: $I_1 = I_{III}$; $I_2 = I_{II} + I_{III}$. Тоді струми керованих джерел (вони ж і контурні струми):

$$I_1 = J_1 = 0,2 \cdot I_1 = 0,2 \cdot I_{III}; \quad I_{II} = J_2 = 0,5 \cdot I_2 = 0,5 \cdot I_{II} + 0,5 \cdot I_{III}.$$

Із останнього рівняння виходить, що $I_{II} = I_{III}$.

Оскільки невідомим вважається лише один контурний струм (I_{III}), для нього і складаємо контурне рівняння:

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_{III} - (R_3 + R_4) \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_{II} = E$$

$$\text{або } (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_{III} - (R_3 + R_4) \cdot 0,2 \cdot I_{III} + (R_2 + R_3) \cdot I_{III} = E.$$

Звідси третій контурний струм:

$$I_{III} = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 0,2(R_3 + R_4) + R_2 + R_3} = \frac{100}{10 + 40 + 10 + 40 - 0,2 \cdot (10 + 40) + 40 + 10} = 0,714 \text{ А}.$$

Струми керованих джерел (решта контурних струмів):

$$J_1 = I_1 = 0,2 \cdot I_{III} = 0,2 \cdot 0,714 = 0,143 \text{ А}; \quad J_2 = I_{II} = I_{III} = 0,714 \text{ А}.$$

Струми віток, записані через контурні струми:

$$I_1 = I_{III} = 0,714 \text{ А}; \quad I_2 = I_{II} + I_{III} = 0,714 + 0,714 = 1,428 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{II} + I_{III} - I_1 = 0,714 + 0,714 - 0,143 = 1,285 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{III} - I_1 = 0,714 - 0,143 = 0,571 \text{ А}.$$

Рівняння, складене за другим законом Кірхгофа для третього контуру, має вигляд:

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 = E.$$

Підставимо числові значення:

$$10 \cdot 0,714 + 40 \cdot 1,428 + 10 \cdot 1,285 + 40 \cdot 0,571 = 99,95 \approx 100 \text{ В}.$$

ЗАДАЧА 2.61. У колі рис. 2.79 визначити струми раціональним методом і перевірити баланс потужностей, якщо $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 25 \text{ Ом}$, $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_2 = 10 \cdot I_1$; $J = 2 \cdot I_2$.

Коментарі і відповіді. Раціональним є метод вузлових потенціалів. Якщо

прийняти $\varphi_a = 0$, то $\varphi_b = -E_1$, $\varphi_c = -E_1 + E_2$. Оскільки $I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_1} = \frac{\varphi_a + E_1}{R_1}$

і $I_2 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_2}$, то $E_2 = 10 \cdot I_1 = \frac{10}{R_1} (\varphi_a + E_1)$ і $J = 2 \cdot I_2 = \frac{2}{R_2} (-E_1 + E_2)$. Для

вузла a складається єдине рівняння МВП. Отримана система рівнянь може бути розв'язана за допомогою MathCAD:

$$R_1 := 5 \quad R_2 := 20 \quad R_3 := 25 \quad E_1 := 10 \quad E_2 := 0 \quad J := 0 \quad \varphi_a := 0$$

$$\text{Given } \varphi_a \cdot (R_1^{-1} + R_3^{-1}) + E_1 \cdot R_1^{-1} - (-E_1 + E_2) \cdot R_3^{-1} = 0$$

$$E_2 = \frac{10}{R_1}(\varphi_a + E_1) \quad J = \frac{2}{R_2}(-E_1 + E_2)$$

$$X := \text{Find}(\varphi_a, J, E_2) \quad X = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Таким чином, $\varphi_a = 15 \text{ В}$, $J = 4 \text{ А}$, $E_2 = 50 \text{ В}$.
Струми у вітках: $I_1 = 5 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, $I_3 = 1 \text{ А}$,
 $IE_1 = 2 \text{ А}$, $IE_2 = 3 \text{ А}$.

Потужність джерел (а також і приймачів):
 $P = 230 \text{ Вт}$.

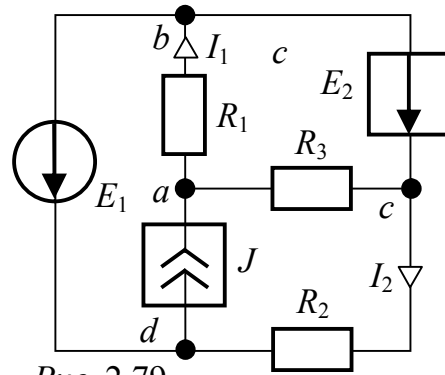


Рис. 2.79

ЗАДАЧА 2.62.

У колі з ОП (рис. 2.80,а) містяться наступні резистори:

$$R_1 = 5 \text{ кОм},$$

$$R_0 = 10 \text{ кОм}.$$

Коефіцієнт підсилення ОП $k_U = 10^5$.

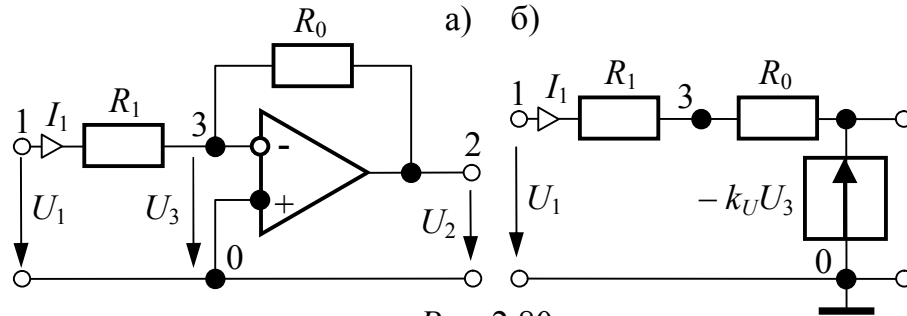


Рис. 2.80

Визначити вхідний опір і коефіцієнт підсилення схеми.

Розв'язання

Розрахункова еквівалентна схема подана на рис. 2.80,б. Виконаємо її розрахунок методом вузлових потенціалів. Рівняння для єдиного незалежного вузла 3 має наступний вигляд:

$$\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) U_3 - \frac{1}{R_1} U_1 - \frac{1}{R_0} (-k_U \cdot U_3) = 0,$$

$$\text{з якого виходить } U_3 = \frac{R_0 U_1}{R_0 + (1 + k_U) R_1} \quad \text{і} \quad U_2 = -k_U \cdot U_3 = \frac{-k_U R_0 U_1}{R_0 + (1 + k_U) R_1}.$$

Коефіцієнт підсилення схеми:

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-k_U R_0}{R_0 + (1 + k_U) R_1} = \frac{-10^5 \cdot 10}{10 + (1 + 10^5) \cdot 5} = -2.$$

Вхідні струм і опір схеми:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_3}{R_1} = \frac{(1 + k_U) U_1}{R_0 + (1 + k_U) R_1},$$

$$R_{\text{ex}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R_0 + (1 + k_U) R_1}{1 + k_U} = \frac{10 + (1 + 10^5) \cdot 5}{1 + 10^5} = 5 \text{ кОм}.$$

Таким чином, $R_{\text{ex}} = R_1$, $k = -\frac{R_0}{R_1}$, тобто схема є підсилювачем з інверсією, причому коефіцієнт підсилення можна регулювати в широкому діапазоні за допомогою резисторів R_0 і R_1 .

ЗАДАЧА 2.63. У колі з ОП ($k_U = 10^5$) містяться наступні резистори (рис. 2.81,а): $R_0 = 10 \text{ кОм}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 12 \text{ кОм}$, $R_3 = 10 \text{ кОм}$. Напруги на вході: $U_1 = 1 \text{ В}$, $U_2 = 2 \text{ В}$, $U_3 = 4 \text{ В}$.

Визначити напругу U на виході схеми і зробити висновок щодо функціонального призначення схеми.

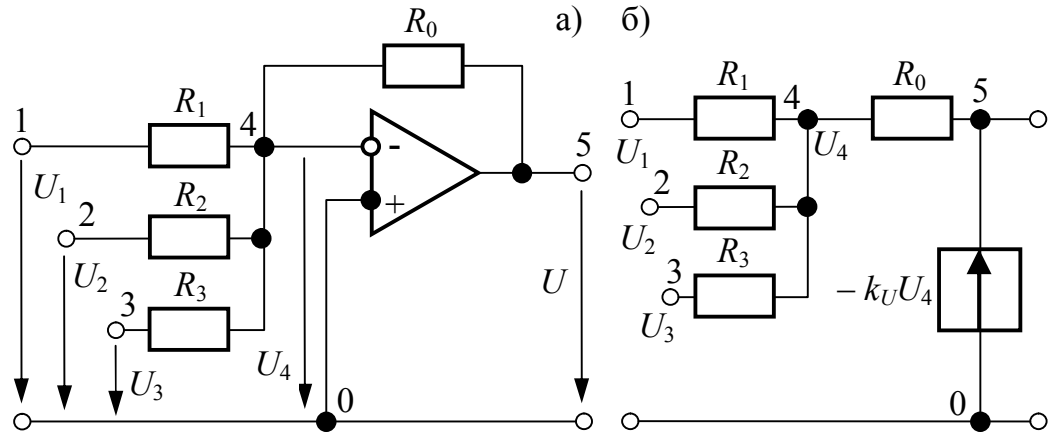


Рис. 2.81

Розв'язання

Розрахункова еквівалентна схема подана на рис. 2.81,б. Рівняння для єдиної невідомої напруги U_4 за методом вузлових потенціалів має наступний вигляд:

$$\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_4 - \frac{1}{R_1} U_1 - \frac{1}{R_2} U_2 - \frac{1}{R_3} U_3 - \frac{1}{R_0} (-k_U \cdot U_4) = 0,$$

з якого виходить $U_4 = \frac{U_1 R_1^{-1} + U_2 R_2^{-1} + U_3 R_3^{-1}}{R_0^{-1} + R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1} + k_U R_0^{-1}}$; шукана напруга

$$\begin{aligned} U = -k_U \cdot U_4 &= -k_U \cdot \frac{U_1 R_1^{-1} + U_2 R_2^{-1} + U_3 R_3^{-1}}{R_0^{-1} + R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1} + k_U R_0^{-1}} = \\ &= -10^5 \cdot \frac{1/5 + 2/12 + 4/10}{10^{-1} + 5^{-1} + 12^{-1} + 10^{-1} + 10^5 \cdot 10^{-1}} = -7,666 \text{ В}. \end{aligned}$$

Наближена формула для напруги на виході (за умови $k_U \rightarrow \infty$) наступна:

$$U \approx -R_0 \cdot \left(\frac{1}{R_1} U_1 + \frac{1}{R_2} U_2 + \frac{1}{R_3} U_3 \right).$$

Таким чином, подане коло реалізує операцію зваженого арифметичного підсумовування трьох напруг і є суматором-підсилювачем.

ЗАДАЧА 2.64. У колі з ОП ($k_U = 10^5$) містяться наступні резистори (рис. 2.82,а): $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 12 \text{ кОм}$. Напруга на вході:

$$U_1 = 1 \text{ В}.$$

Визначити напругу U_2 на виході схеми і коефіцієнт підсилення схеми. Зробити висновок щодо функціонального призначення схеми.

Відповіді: розрахункова схема на рис. 2.82,б; єдине вузлове рівняння

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_3 - \frac{k_U}{R_1} (U_1 - U_3) = 0;$$

$$U_3 = \frac{k_U U_1}{1 + k_U + R_1/R_2} \quad \text{і} \quad U_2 = k_U \cdot (U_1 - U_3) = k_U \cdot \frac{1 + R_1/R_2}{1 + k_U + R_1/R_2} U_1 = 1,417 \text{ В.}$$

Наближене значення коефіцієнта підсилення (за умови $k_U \rightarrow \infty$)

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким чином, подане коло є підсилювачем без інверсії напруги.

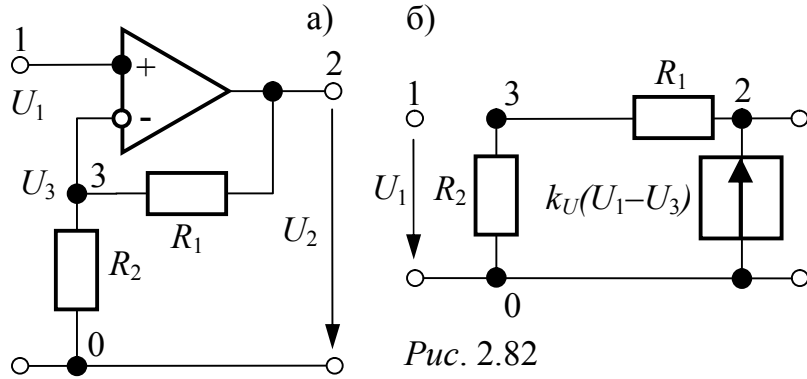


Рис. 2.82

ЗАДАЧА 2.65. У колі з ОП ($k_U = 10^5$) містяться наступні резистори (рис. 2.83,а): $R_0 = 10 \text{ кОм}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 12 \text{ кОм}$, $R_3 = 10 \text{ кОм}$. Напруга на вході $U_{\text{вх}} = 1 \text{ В}$.

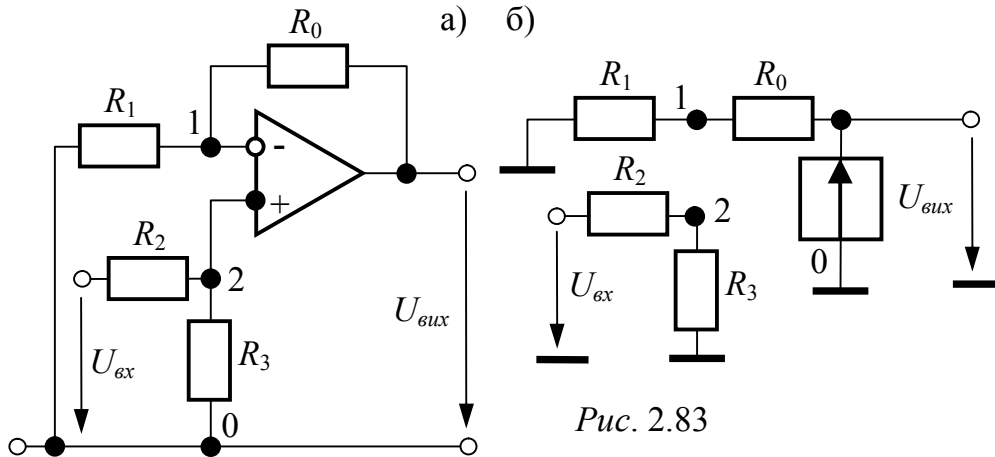


Рис. 2.83

Визначити коефіцієнт передачі схеми за напругою. Зробити висновок щодо функціонального призначення схеми.

Відповіді: розрахункова схема на рис. 2.83,б; $U_{\text{вих}} = -k_U \cdot (U_1 - U_2)$;

$$U_1 - U_2 = U_{\text{вих}} / (-k_U) \approx 0, \quad \text{тобто} \quad U_1 = U_2; \quad U_1 = \frac{U_{\text{вих}}}{R_1 + R_0} \cdot R_1; \quad U_2 = \frac{U_{\text{вих}}}{R_2 + R_3} \cdot R_3.$$

$$k = U_{\text{вих}} / U_{\text{вх}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{R_0 + R_1}{R_1} = \frac{10}{12 + 10} \cdot \frac{10 + 5}{5} = 1,364.$$

Таким чином, подане коло є передавачем напруги без інверсії з керованим коефіцієнтом передачі.

ЗАДАЧА 2.66. У колі з ОП ($k_U = 10^5$) містяться наступні резистори (рис. 2.84,а): $R = 10 \text{ кОм}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 12 \text{ кОм}$.

Визначити вхідний опір кола. Зробити висновок щодо функціонального призначення схеми.

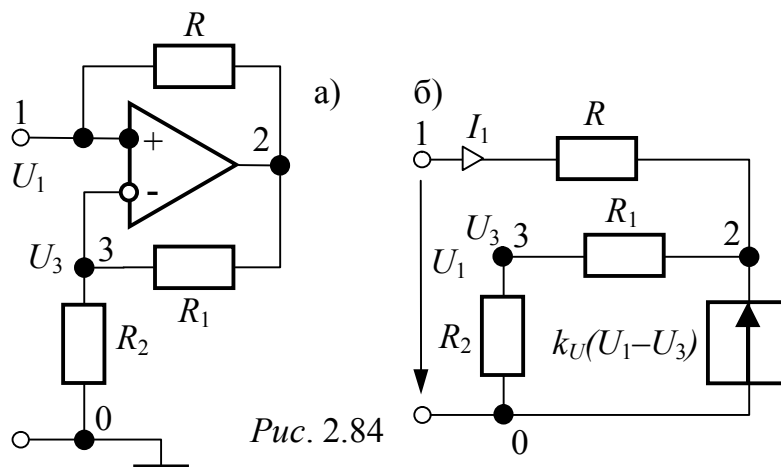


Рис. 2.84

Відповіді: розрахункова схема на рис. 2.84,б; вузлове рівняння для вузла 3:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_3 - \frac{k_U}{R_1} (U_1 - U_3) = 0;$$

$$U_3 = \frac{k_U U_1}{1 + k_U + R_1 / R_2}; \quad I_1 = \frac{U_1 - k_U (U_1 - U_3)}{R} = \frac{R_2 - (k_U - 1) R_1}{R_1 + (k_U + 1) R_2} \frac{U_1}{R};$$

$$R_{ex} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R_1 + (k_U + 1) R_2}{R_2 - (k_U - 1) R_1} R = -24 \text{ кОм.}$$

Наближене значення вхідного опору $R_{ex} \approx -\frac{R_2}{R_1} R$.

Таким чином, подане коло є конвертором від'ємного опору, тобто активним резистивним двополусником, вхідний опір якого дорівнює добутку опору навантаження на кероване дійсне від'ємне число. Ця властивість конверторів дозволяє використовувати їх для компенсації втрат в пасивних елементах кола.