ДОДАТОК. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ І ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Д.1 СКАЛЯРНІ І ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ. ВИЗНАЧЕННЯ

Величини називаються *скалярними*, якщо вони після вибору одиниці вимірювання повністю характеризуються одним числом. Приклади: кут, поверхня, об’єм, маса, густина, електричний заряд, опір, температура. Позначаються вони як f, φ і таке інше.

Векторна величина залежить від двох елементів різної природи: алгебричного елемента – числа, що виміряє довжину (модуль) вектора, і геометричного елемента – напряму вектора. Одиничний вектор (*орт*) – це вектор, модуль якого дорівнює одиниці. Два однаково направлених і рівних за довжиною вектори називаються *еквіполентними*. Вектори, що розташовані на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це кут, що не перевищує π, на який потрібно повернути вектор $\vec{a}$, щоб сумістити його з вектором, *еквіполентним* $\vec{b}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$. Кут позначається $(\vec{a}, \vec{b})$.

Д.2 СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Хай xx' – вісь. Обертання щодо осі xx' називається позитивним або прямим, якщо для спостерігача в кінці осі воно здійснюється проти годинникової стрілки. Хай $Oxyz$ – трійка векторів. Вона називається правою, якщо рух від осі Ox до осі Oy відносно осі Oz відбувається в позитивному напрямі. Трійки $Oxyz$, $Oyzx$, $Ozxy$ є правими, а $Oyxz$, $Oxzy$, $Ozyx$ – лівими. Одна перестановка букв міняє трійку, дві перестановки – не міняють.

Існують різні системи координат: прямолінійні і криволінійні; ортогональні і неортогональні. Зупинимося на застосуванні тільки прямолінійних ортогональних систем координат: 1) *декартової* (рис. Д.1,а); 2) *циліндричної* (рис. Д.1,б); 3) *сферичної* (рис. Д.1,в).

Співвідношення між координатами різних систем наступні:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \alpha = arctg(y/x); \quad \theta = arcsin(r/R).$$

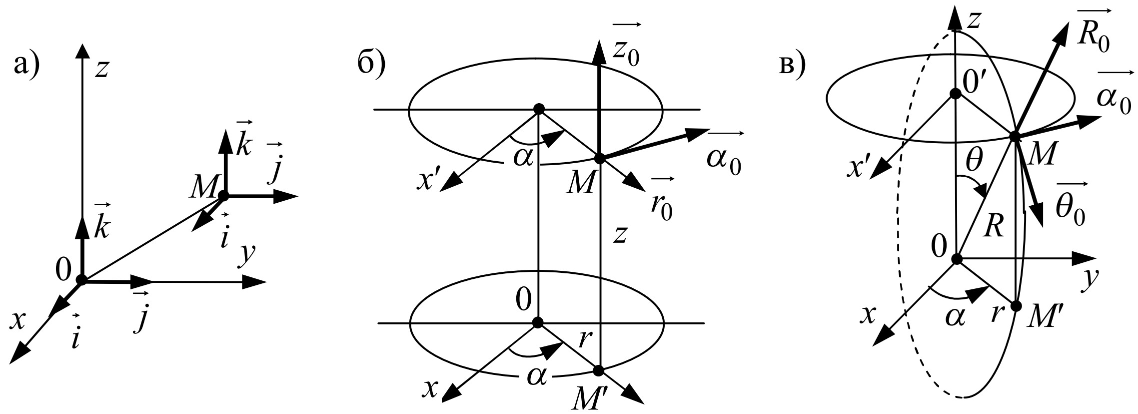
Положення довільної точки M простору задається трьома координатами вибраної системи координат:

- в декартовій – координатами x, y, z, короткий запис має вигляд $M(x, y, z)$;
- в циліндричній – $M(r, \alpha, z)$;
- в сферичній – $M(R, \theta, \alpha)$.

Для орієнтування в просторі, щоб вказати напрям переміщення для кожної системи координат використовуються одиничні вектори (орти):

- для декартової – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;
- для циліндричної – $\overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{\alpha_0}$, $\overrightarrow{z_0}$;
- для сферичної – $\overrightarrow{R_0}$, $\overrightarrow{\theta_0}$, $\overrightarrow{\alpha_0}$.

Відзначимо, що координата α циліндричної і сферичної систем координат відлічується проти годинникової стрілки в горизонтальній площині від основного напряму, який указується довільно. Зазвичай, основний напрям є суміщеним з віссю Ox декартової системи координат. Координата θ відлічується від основного напряму на полюс (від напряму осі z).



Декартова система координат $M(x,y,z)$

Циліндрична система координат $M(r,\alpha,z)$

Сферична система координат $M(R,\theta,\alpha)$

Рис. Д.1

Д.3 ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Добуток вектора $\vec{a}$ *на скаляр* f. Результат множення – вектор з модулем, рівним fa, паралельний вектору $\vec{a}$, направлений в ту ж сторону, що і $\vec{a}$, при позитивному f і в протилежну – при негативному f.

Складові вектора. Хай $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$, $\overrightarrow{a_z}$ – геометричні проекції (компоненти) вектора $\vec{a}$ на осі декартових координат. Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + \overrightarrow{a_z} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z.$$

Числа a_x, a_y, a_z називаються складовими, проекціями, координатами вектора $\vec{a}$ відносно відповідних осей координат.

Складання векторів. Сума декількох векторів визначається наступним чином. З кінця першого вектора проводиться другий вектор, з кінця другого – третій і т.д. Вектор, проведений з початку першого вектора в кінець останнього є сумою. Векторне складання записується у вигляді:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{p}.$$

Операція складання векторів *комутативна*, тобто $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, і *асоціативна*, тобто $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Складова по деякій осі Ox вектора $\vec{s}$ суми векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, … , $\vec{p}$ дорівнює сумі складових цих векторів відносно тієї ж осі: $s_x = a_x+b_x+\ldots+p_x$.

Скалярний добуток. Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це число, що дорівнює добутку трьох величин a, b і $cos(\vec{a},\vec{b})$; воно позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Скалярний добуток комутативний: $\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{a}$ і дистрибутивний: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c}+\vec{b} \cdot \vec{c}$. Питання про асоціативність скалярного добутку відпадає, оскільки формула $(\vec{a} \cdot \vec{b})\cdot \vec{c}$ не має сенсу.

Наслідок 1. Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори ортогональні. Якщо кут між векторами тупий, скалярний добуток від'ємний, якщо кут гострий – позитивний.

Наслідок 2. Хай $\vec{u}$ – одиничний вектор деякої осі xx'. Тоді скалярний добуток будь-якого вектора $\vec{a}$ на $\vec{u}$ дорівнює проекції вектора на вісь xx':

$$\vec{a}\cdot\vec{u} = a\cdot cos(\vec{a},\vec{u}).$$

Наслідок 3. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного вектора на проекцію іншого вектора на перший:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_a\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_b\vec{a}.$$

Наслідок 4. Скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює квадрату модуля цього вектора: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$.

Наслідок 5. Якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти осей координат, то

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Наслідок 6. Скалярний добуток в декартових координатах:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{i}\cdot a_x + \vec{j}\cdot a_y + \vec{k}\cdot a_z)\cdot(\vec{i}\cdot b_x + \vec{j}\cdot b_y + \vec{k}\cdot b_z) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z.$$

Наслідок 7. Вираз для косинуса кута між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ через проекції цих векторів:

$$cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторний добуток. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, довжина якого дорівнює $a\cdot b\cdot sin(\vec{a},\vec{b})$ і який перпендикулярний обом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку. Векторний добуток позначають $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ або $[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{c}$.

Модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площині паралелограма, збудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}\,(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x).$$

Отже, $c_x = a_y b_z - a_z b_y$, $c_y = a_z b_x - a_x b_z$, $c_z = a_x b_y - a_y b_x$.

Векторний добуток антикомутативний: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

Векторний добуток не асоціативний: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Векторний добуток дистрибутивний: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$.

Наслідок 1. Якщо векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори паралельні.

Наслідок 2. Векторні добутки ортів координатних осей дорівнюють:

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}.$$

Мішаний добуток трьох векторів. Мішаним добутком трьох векторів називається скаляр $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Мішаний добуток трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах.

Наслідки. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Подвійний векторний добуток трьох векторів. Він виражається формулою $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Д.4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

Похідна вектора. Похідна точки. Хай вектор $\vec{a}$ є функцією змінної t: $\vec{a}(t)$. Надамо змінній t приріст Δt і розглянемо вектор $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)$. Якщо при Δt, що прямує до нуля, модуль вектора $\Delta\vec{a}$ також прямує до нуля, то $\vec{a}(t)$ є неперервна функція від t. Границя відношення $\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ називається похідною вектора $\vec{a}(t)$ по t і позначається: $\dfrac{d\vec{a}(t)}{dt}$ або $\vec{a}\,'(t)$. Вона дорівнює

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{i}\,\frac{da_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{da_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{da_z}{dt}.$$

Якщо кожному значенню змінної t відповідає точка простору M, то кажуть, що точка M є функцією від t: $M(t)$. Надамо змінній t приріст Δt і розглянемо вектор $\Delta\overrightarrow{M} = M(t+\Delta t) - M(t)$. Якщо при $\Delta t \to 0$ модуль вектора $\Delta\overrightarrow{M}$ прямує до нуля, то $M(t)$ є неперервна функція від t. Границя відношення $\dfrac{\Delta\overrightarrow{M}}{\Delta t}$ називається похідною точки $M(t)$ по t: $\dfrac{dM}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overrightarrow{M}}{\Delta t}$.

Похідна вектора по іншому вектору. Похідною вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$ називається вектор $\dfrac{d\vec{a}}{d\vec{b}} = \dfrac{d\vec{a}}{dx}b_x + \dfrac{d\vec{a}}{dy}b_y + \dfrac{d\vec{a}}{dz}b_z$.

Основні формули диференціювання.

Похідна суми: хай $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{p}$,

тоді $\vec{s}\,' = \vec{a}\,' + \vec{b}\,' + \vec{c}\,' + \ldots + \vec{p}\,'$.

Похідна добутку вектора на число: хай $\vec{b} = n\cdot\vec{a}$, тоді $\vec{b}\,' = n\cdot\vec{a}\,'$.

Якщо $\vec{s} = n\vec{a} + m\vec{b} + \ldots + g\vec{p}$, то $\vec{s}\,' = n\vec{a}\,' + m\vec{b}\,' + \ldots + g\vec{p}\,'$.

Похідна добутку векторної і скалярної функцій:

хай $\vec{s}(t) = f(t)\vec{a}(t)$, тоді $\vec{s}\,'(t) = f(t)\vec{a}\,'(t) + f'(t)\vec{a}(t)$.

Похідна скалярного добутку:

хай $f(t) = \vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)$, тоді $f' = \vec{a}\cdot\vec{b}\,' + \vec{a}\,'\cdot\vec{b}$.

Похідна векторного добутку:

хай $\vec{c}\,(t) = \vec{a}\,(t)\times\vec{b}\,(t)$, тоді $\vec{c}\,' = \vec{a}\times\vec{b}\,' + \vec{a}\,'\times\vec{b}$.

Інтеграл від вектора: $\int\limits_{t_0}^{t_1}\vec{a}(t)dt = \vec{i}\int\limits_{t_0}^{t_1}a_x dt + \vec{j}\int\limits_{t_0}^{t_1}a_y dt + \vec{k}\int\limits_{t_0}^{t_1}a_z dt$.

Д.5 СКАЛЯРНЕ І ВЕКТОРНЕ ПОЛЯ. СИМВОЛІЧНИЙ ОПЕРАТОР НАБЛА (ОПЕРАТОР ГАМІЛЬТОНА) ∇

Кажуть, що в просторі задана *функція точки* (*поле*) деякої величини (скалярної або векторної), якщо в кожній точці M простору (або деякої його області) і в кожний момент часу визначено значення цієї величини. Тому поле може бути скалярним або векторним. Воно позначається

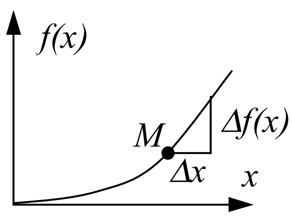


Рис. Д.2

$$f = f(M,\,t) = f(x,y,z,t) = f(r,\alpha,z,t) = f(R,\theta,\alpha,t)$$

або $\vec{A} = \vec{A}\,(M,t) = \vec{A}\,(x,y,z,t) = \ldots$

Математичний вираз похідної від функції однієї змінної $f(x)$ (рис. Д.2):

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \qquad (Д.1)$$

Формальний оператор узяття похідної $\dfrac{d}{dx}\square = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\square}{\Delta x}$. (Д.2)

На порожнє місце ставиться функція, що диференціюється. Таким чином, математично похідною є границя дробу, в знаменнику якого знаходиться приріст аргументу, а в чисельнику – приріст функції, викликаний приростом аргументу, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

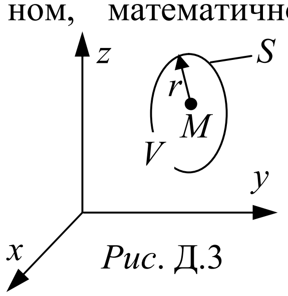


Рис. Д.3

Хай вимагається продиференціювати деяку функцію трьох координат $\Phi(x,y,z)$ в т.M (рис. Д.3). Виділимо навкруги т. M деякий об'єм V довільної форми, обмежений замкненою поверхнею S. M – центр (можливо, центр тяжкості) тіла V; r – відстань від т.M до точок поверхні S.

Формальний оператор диференціювання функції по трьох координатах позначається ∇ і називається «набла». Отримаємо його конструкцію аналогічно з (Д.1) та (Д.2).

Приріст значення функції можливий при зміні поверхні S, а він викликається зміною об'єму V. Приріст значення функції визначається поверхневим інтегралом від функції, що диференціюється. Одержуємо конструкцію першої просторової похідної

$$\nabla\Phi = \lim_{v\to 0}\frac{\oint\limits_S \overrightarrow{dS}\,\Phi}{V}.$$

Тут $\overrightarrow{dS}$ – вектор, за величиною рівний площі елементарного майданчика, на які розбивається поверхня інтегрування і в межах якої значення функції Φ, що інтегрується, може вважатися постійним; вектор $\overrightarrow{dS}$ спрямований по нормалі до поверхні S назовні. Таким чином, формальний оператор диференціювання

$$\nabla\underline{\ \ } = \lim_{v\to 0}\frac{\oint\limits_S \overrightarrow{dS}\,\underline{\ \ \ }}{V}.$$

Через наявність у формулі вектора $\overrightarrow{dS}$ формальний оператор ∇ є вектором, який в декартовій системі координат записується як

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

В інших системах координат простого розкриття оператора ∇ не існує, він розглядається тільки як символ диференціювання в просторі.

Можливі три використання оператора ∇:

1) диференціювання скалярної функції, яке розглядається як множення вектора ∇ на скалярну функцію. Тоді у формулі вектор $\overrightarrow{dS}$ умножається на цю скалярну функцію. В результаті виходить векторна функція;

2) скалярне множення вектора ∇ на векторну функцію, що диференціюється. Тоді поверхневий інтеграл обчислюється від скалярного добутку $\overrightarrow{dS}$ і векторної функції. В результаті виходить скалярна функція;

3) векторне множення вектора ∇ на векторну функцію, що диференціюється. Тоді поверхневий інтеграл обчислюється від векторного добутку $\overrightarrow{dS}$ і векторної функції. В результаті виходить векторна функція.

Розглянемо кожну з цих операцій окремо.

Д.6 ГРАДІЄНТ СКАЛЯРНОЇ ФУНКЦІЇ. ПОВЕРХНЯ РІВНЯ. СИЛОВІ ЛІНІЇ. СИЛОВА ТРУБКА

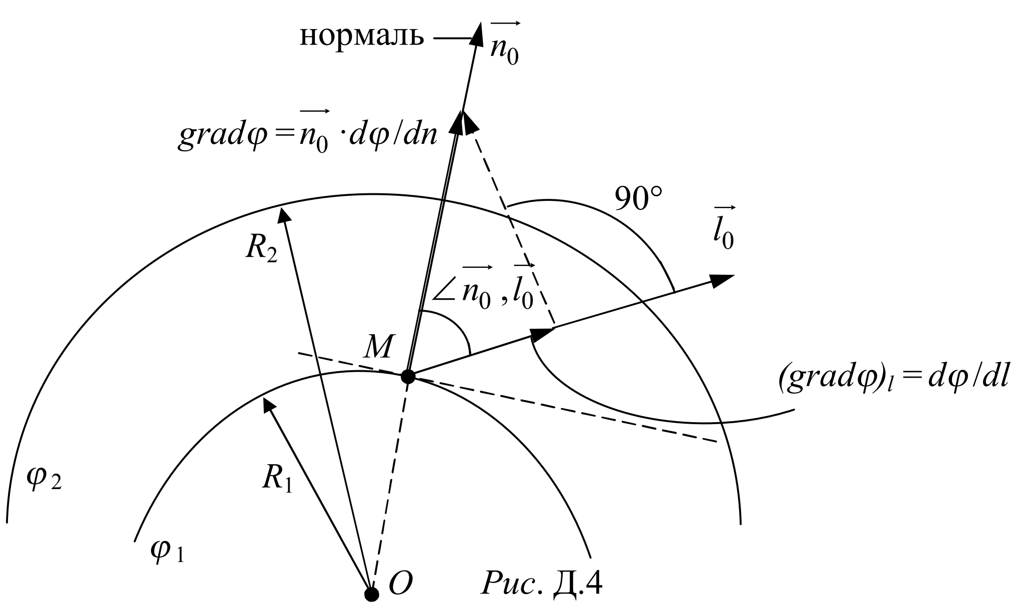


Рис. Д.4

Перша операція з оператором ∇ називається *градієнтом*:

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \overrightarrow{dS}\varphi}{V}.$$

Щоб краще з’ясувати фізичне значення градієнта, розглянемо дві поверхні рівня, сліди від яких із значеннями φ_1 і φ_2 наведені на рис. Д.4. *Поверхнею рівня* скалярної функції називається геометричне місце точок, для яких значення функції одне й те саме. Рівняння цієї поверхні

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

Приріст функції на малій відстані: $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. На такій відстані криві φ_1 і φ_2 мають загальну точку O для визначення радіусів кривизни R_1 і R_2. Похідна по напряму $\vec{l_0}$ дорівнює швидкості зростання функції у цьому напряму, тобто величині $d\varphi/dl$.

Проведемо нормаль до поверхні рівня через точку відліку M. Відрізок dn визначає найкоротшу відстань між поверхнями рівня, а похідна $d\varphi/dn$ – найбільшу швидкість зростання функції. Ця найбільша швидкість перпендикулярна поверхні рівня. Вектор $\vec{n_0} \cdot d\varphi/dn$ називається *градієнтом* скалярної функції, тобто $grad\varphi = \vec{n_0} \cdot d\varphi/dn$.

Вектор $grad\varphi$ повністю описує поведінку функції φ в околиці даної точки M. Зокрема, найшвидша зміна φ відбувається при переміщенні по нормалі до поверхні рівня. Ця максимальна зміна визначається по величині і напряму вектором $grad\varphi$. Таким чином, *градієнтом* є найбільша швидкість зміни функції, узята у напрямі її зростання.

Розкриття $grad\varphi$ в різних системах координат подано в табл. Д1 в кінці розділу.

Крива, напрям дотичної до якої співпадає з напрямом вектора $grad\, f$ в кожній точці M, називається *силовою лінією.* Хай $\overrightarrow{dM}$ – вектор будь-якого переміщення точки М по поверхні рівня. Векторне рівняння силової лінії: $gradf \times \overrightarrow{dM} = 0$. Її скалярне рівняння:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

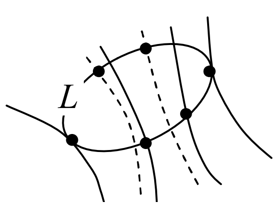


Рис. Д.5

Отже, силові лінії є ортогональними траєкторіями до поверхонь рівня (силові лінії перпендикулярні до поверхонь рівня).

Силова трубка – це поверхня, утворена силовою лінією, що переміщається уподовж замкнутого контуру L (рис. Д.5).

Д.7 ПОТІК ВЕКТОРА СКРІЗЬ ПОВЕРХНЮ. ДИВЕРГЕНЦІЯ ВЕКТОРА

Потоком вектора $\vec{A}$ через замкнену поверхню S, що обмежує деякий об’єм V (рис. Д.6) називається інтеграл $\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$. Потік вектора $\vec{A}$ через незамкнену площу виражається інтегралом $\Phi = \int_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$.

Друга операція з ∇ називається *дивергенцією*:

$$div\ \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}}{V}.$$

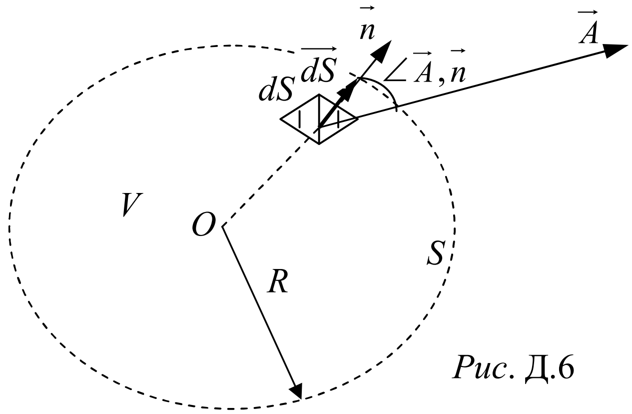


Рис. Д.6

$\nabla \cdot \vec{A}$ – скалярний добуток двох векторів ∇ і $\vec{A}$. Розкриття цієї операції для різних систем координат подано в табл. Д.1 в кінці розділу.

Сенс скаляру $div\ \vec{A}$. З формули для неї виходить, що повний потік вектора $\vec{A}$ через замкнену поверхню, що обмежує нескінченно малий об'єм *dV*, рівний $div\vec{A} \cdot dV$. Отже, дивергенція, обчислена в точці векторного поля, приблизно дорівнює потоку, що виходить з одиниці об'єму, що оточує цю точку. Звідси інші назви операції $div\vec{A}$ – *розбіжність* вектора, *витік* вектора $\vec{A}$. Якщо $div\vec{A}<0$, то точку називають *стоком* вектора.

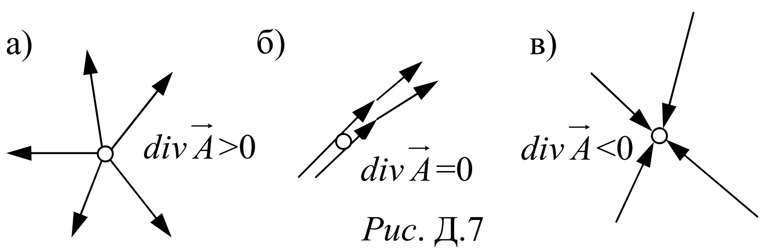


Рис. Д.7

Характер поведінки силових ліній вектора $\vec{A}$ (ліній, дотичні до яких співпадають з напрямом вектора $\vec{A}$) в різних точках простору ілюструється рис. Д.7. а) – силові лінії розходяться: Це точка *витоку*; б) – силові лінії неперервні; в) – силові лінії сходяться. Це точка *стоку*.

Векторні поля, для яких $div\vec{A} = 0$ по всьому об'єму, називаються вільними від витоків або *соленоїдними*.

Д.8 РОТОР ВЕКТОРА. ЦИРКУЛЯЦІЯ ВЕКТОРА

Третя операція з вектором ∇ називається *ротором*:

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \overrightarrow{dS} \times \vec{A}}{V}.$$

Отримаємо її фізичне значення. Хай до кожного майданчика *dS* поверхні *S* прикладена деяка сила $\vec{F}$ (маємо векторне поле функції $\vec{F}(x,y,z)$). Якщо сила направлена не радіально (напрям вектора не проходить через центр *M*), то виникає обертовий момент. Співвідношення $\oint_S \overrightarrow{dS} \times \vec{F} \neq 0$, отже, і $rot\vec{F} \neq 0$ означає, що сумарний обертовий момент не дорівнює нулеві. Таким чином,

$rot\vec{A}$ дає інформацію про те, в якому напрямі, з якою швидкістю і відносно якої осі відбувається обертання виділеного об'єму.

Циркуляція вектора $\vec{A}$ – це лінійний інтеграл по замкненому контуру вигляду $Ц_A = \oint\limits_L \vec{A} \cdot \vec{dl}$. Контур циркуляції L охоплює поверхню (майданчик) S (рис. Д.8).

Позитивний напрям обходу контуру і позитивний напрям нормалі $\vec{n}$ до майданчика зв'язані правилом правого гвинта: якщо дивитися на контур з кінця вектора $\vec{n}$, контур обходиться проти годинникової стрілки, як це показано на рис. Д.8.

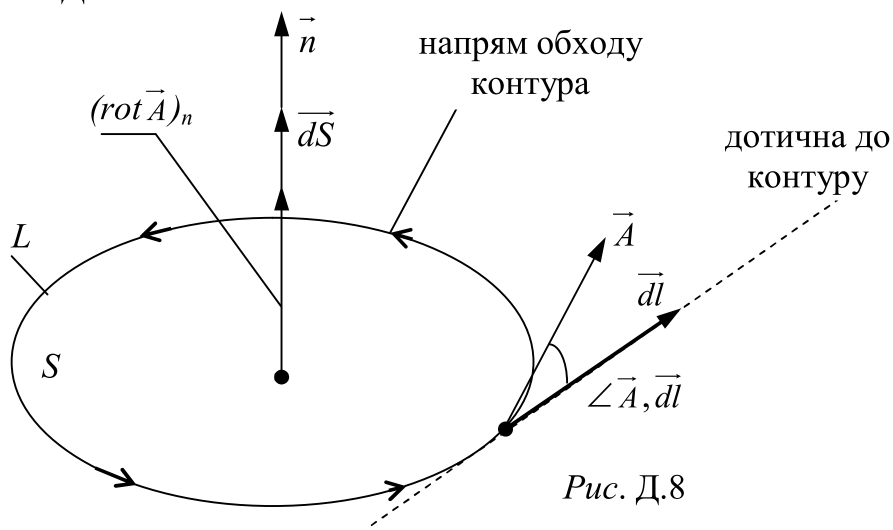


Рис. Д.8

Проекція вектора $rot\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ може бути знайдена за формулою

$$rot_n\vec{A} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{dl}\cdot\vec{A}}{S} = \frac{dЦ_A}{dS}.$$

Звідси виходить формула *Стокса*:

$$\int\limits_S \vec{n}\cdot rot\vec{A}\,dS = \oint\limits_L \vec{A}\cdot\vec{dl} = Ц_A.$$

Термін «ротор» відбувся від латинського *roto* (обертання). Ще одна назва цієї операції – вихор, а під вихровим розуміють обертальний рух. Формули для знаходження $rot\vec{A}$ в різних системах координат подані в табл. Д1 в кінці розділу.

Д.9 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Хай S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V, M – змінна точка об'єму V (або на поверхні S), $\vec{dS}$ – визначений вище вектор, напрямлений по зовнішній нормалі до поверхні S. Хай f – скалярна і $\vec{A}$ – векторна функції точки M. Передбачається, що вони неперервні разом із своїми першими похідними в будь-якій точці об'єму V і його межі S. Справедливі наступні три формули, що замінюють потрійний інтеграл подвійним:

1) формула для градієнта $\int\limits_V grad f\, dV = \oint\limits_S f\, \overrightarrow{dS}$;

2) формула для дивергенції (теорема Остроградського) $\int\limits_V div \vec{A}\, dV = \oint\limits_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$;

3) формула для ротора $\int\limits_V rot \vec{A}\, dV = \oint\limits_S \overrightarrow{dS} \times \vec{A}$.

Градієнт, дивергенція і ротор є інваріантними, тобто незалежними від вибору координатної системи.

4) $grad(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times rot \vec{b} + \vec{b} \times rot \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} + \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$;

5) $div(f\vec{a}) = \vec{a} \cdot grad f + f\, div \vec{a}$;

6) $div(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot rot \vec{a} - \vec{a} \cdot rot \vec{b}$;

7) $rot(f\vec{a}) = grad f \times \vec{a} + f\, rot(\vec{a})$;

8) $rot(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\, div \vec{b} - \vec{b}\, div \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} - \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$.

Д.10 СКАЛЯРНИЙ І ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛИ

Для того, щоб векторне поле $\vec{A}$ було градієнтом деякої скалярної величини f, необхідно і достатньо, щоб виконувалось рівняння $rot \vec{A} = 0$.

Якщо $rot \vec{A} = 0$, то завжди існує така скалярна функція $\varphi = -f$, що $\vec{A} = -grad\varphi$. Якщо при цьому функція однозначна, то вона називається скалярним потенціалом, а про вектор $\vec{A}$ кажуть, що він дорівнює похідній від скалярного потенціалу φ. З рівності $\vec{A} = -grad\varphi$ слідує: $div \vec{A} = -\nabla^2 \varphi$. Таке поле вектору $\vec{A}$ називається потенціальним, ньютоновим або безвихровим.

Будь-яка векторна функція точки, для якої дивергенція тотожно дорівнює нулю, може розглядатися як вихор деякого вектора. Таких функцій існує нескінченна множина. Хай $rot \vec{b} = \vec{a}$ і $rot \vec{c} = \vec{a}$. Тоді $rot \vec{c} - rot \vec{b} = 0$ або $rot(\vec{c} - \vec{b}) = 0$, тобто $\vec{c} - \vec{b} = grad f$.

Отже, вектор $\vec{c}$ визначається лише з точністю до градієнта довільної скалярної функції точки. Це співвідношення очевидно, оскільки до поля векторів, для яких $rot \vec{c} = \vec{a}$, можна додати поле будь-яких інших векторів з нульовим вихором.

З нескінченної безлічі векторів $\vec{c}$ можна вибрати вектор $\vec{v}$, дивергенція якого дорівнює нулю: $\vec{a} = rot \vec{v}$ і $div \vec{v} = 0$. Вектор $\vec{v}$ називається *векторним потенціалом* вектора $\vec{a}$, а про вектор $\vec{a}$ кажуть, що він дорівнює похідній від векторного потенціалу $\vec{v}$.

Вектор, для якого дивергенція дорівнює нулю, називається *соленоїдним вектором*. Поле векторів з нульовою дивергенцією називається *соленоїдним* або *лапласовим*.

Д.11 ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Будь-яке векторне поле можна розглядати як накладання потенціального і соленоїдного полів: $\vec{a} = -\,grad f + rot\,\vec{v}$.

Д.12 ДРУГІ ПРОСТОРОВІ ПОХІДНІ

Наведемо такі випадки використання других просторових похідних, що часто зустрічаються при розв'язанні задач розрахунку полів, їх символічний запис за допомогою оператора набла, розкриття других похідних (при необхідності) в різних системах координат.

1) $div(grad\varphi) = \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi$.

Розкриття операції $\nabla^2\varphi$ в різних системах координат подано в табл. Д1.

Операція $\nabla^2\varphi$ позначається Δ і називається *оператор Лапласа (лапласіан)*: оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$.

2) $div(rot\,\vec{A}) = \nabla\cdot[\nabla\times\vec{A}] \equiv 0$ – це співвідношення відображає важливу властивість вихрових полів: вихрове поле не має витоків, його силові лінії замкнені.

3) $rot(grad\varphi) = [\nabla\times\nabla\varphi] \equiv 0$ – це співвідношення відображає важливу властивість скалярних (потенціальних) полів: скалярні поля безвихрові.

4) $rot(rot\,\vec{A}) = \nabla\times[\nabla\times\vec{A}] = grad(div\,\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$.

5) тотожність, що зустрічається $div(\Delta\vec{A}) = \Delta(div\,\vec{A})$.

Д.13 Зведемо всі розглянуті операції в табл. Д1.

При використанні лапласіана корисна наступна тотожність:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2}.$$

Д.14 ПОНЯТТЯ ПРО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНЕ, ПЛОСКО-МЕРИДІАННЕ І РІВНОМІРНЕ ПОЛЯ

Під *плоскопаралельним* розуміють поле, картина якого повторюється у всіх площинах, перпендикулярних якій-небудь одній осі декартової системи координат або осі z циліндричної системи координат, тобто картина поля не залежить від однієї координати (поле двопровідної лінії).

Під *плоскомеридіанним* розуміють поле, картина якого повторюється у всіх меридіанних площинах, тобто картина поля не залежить від координати α циліндричної або сферичної системи координат. Це поле утворюється тілами обертання (наприклад, поле диполя).

В *рівномірному* полі напруженість однакова у всіх точках поля, тобто величина її не залежить від координат точки (наприклад, поле між пластинами плоского конденсатора).

Таблиця Д1 – див. файл «Album»