

14 ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

Змінне електромагнітне поле визначається змінними у часі точковими і інтегральними характеристиками. В цьому єдиному полі для зручності аналізу виділяються дві сторони – електричне поле і магнітне поле, які взаємно зв'язані і взаємно обумовлені.

Теорія електромагнітного поля оперує повними (узагальненими) струмами, що включають три види струму: 1) струм провідності; 2) струм зміщення; 3) струм переносу.

$$\text{Густина повного струму} \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v},$$

де $\gamma \vec{E} = \vec{\delta}_{np}$ – густина струму провідності, γ – питома провідність середовища, \vec{E} – напруженість електричного поля;

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\delta}_{zm} - \text{густина струму зміщення, } \vec{D} - \text{вектор електричного зміщення}$$

(електричної індукції); нагадаємо, що $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, \vec{P} – вектор поляризації речовини, що визначає поле зміщених зв'язаних зарядів речовини; таким чином, в густині струму зміщення є дві складові

$$\vec{\delta}_{zm} = \vec{\delta}_{zm}' + \vec{\delta}_{zm}'', \quad \text{де } \vec{\delta}_{zm}' = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{що указує на наявність струму}$$

зміщення і в порожнечі, а $\vec{\delta}_{zm}'' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$; у свою чергу $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$,

$$\text{тому } \vec{\delta}_{zm} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$\rho \vec{v} = \vec{\delta}_{пер}$ – густина струму переносу; ρ – об'ємна густина вільних зарядів, що переносяться; \vec{v} – вектор швидкості переносу.

Повний струм $i = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}$, як і струм провідності, має властивість безперервності, тобто для повного (узагальненого) струму виконується як інтегральне співвідношення $\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0$, відоме під назвою першого закону Кірхгофа, так і диференціальне $div \vec{\delta} = 0$.

Заслугою Д. Максвела є те, що він залучив до теорії електромагнітних явищ струм зміщення і припустив, що останній створює в навколишньому просторі магнітне поле так само, як і струм провідності, що згодом було неодноразово підтверджене експериментами (зокрема, радіо, телебачення, тощо). Д. Максвел також сформулював основні рівняння поля.

14.1 РІВНЯННЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ МИТТЄВИХ ЗНАЧЕНЬ ВЕЛИЧИН. ТЕОРЕМА УМОВА-ПОЙНТИНГА

Система рівнянь включає 4 рівняння, записані або в інтегральній, або в диференціальній формі.

1) Перше рівняння Максвела – закон повного струму в узагальненій

формі: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i$; $rot \vec{H} = \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ за відсутності струму переносу.

2) Друге рівняння Максвелла – закон електромагнітної індукції в узагальненій формі: $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$; $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

3) Третє рівняння Максвелла є теоремою Гауса і постулатом Максвелла для вектора електричного зміщення: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$, $div \vec{D} = \rho$.

4) Четверте рівняння Максвелла відображає принцип безперервності магнітного потоку: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$, $div \vec{B} = 0$.

Ці рівняння доповнюються рівняннями зв'язку між характеристиками поля: $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu\mu_0 \vec{H}$.

Сукупність всіх наведених вище рівнянь складає повну систему рівнянь для змінного електромагнітного поля при будь-якій залежності від часу характеристик поля.

При розв'язанні конкретних задач до наведених рівнянь необхідно додати співвідношення між характеристиками поля на поверхні поділу двох різних середовищ. Ці співвідношення (граничні умови) формулюються на підставі інтегральних рівнянь Максвелла і виконуються у будь-який момент часу:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n} \quad \text{для діелектриків};$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \delta_{1n} = \delta_{2n} \quad \text{для провідних середовищ};$$

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n} \quad \text{для магнітної складової поля}.$$

Енергетичні співвідношення в змінному електромагнітному полі визначаються теоремою Умова-Пойнтінга:

$$-div \vec{\Pi} = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ED}{2} + \frac{BH}{2} \right), \quad \text{де } \vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}] \text{ – вектор Пойнтінга.}$$

В інтегральній формі теорема Умова-Пойнтінга для однорідного ізотропного середовища має вигляд:

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right) dV.$$

ЗАДАЧА 14.1. Обкладинки плоского конденсатора розділені недосконалим діелектриком з питомою провідністю $\gamma = 5 \cdot 10^{-5} \text{ См/м}$, відносною діелектричною проникністю $\epsilon = 4$. Конденсатор увімкнений до джерела синусоїдної напруги $u = 3000 \sin \omega t \text{ В}$. Відстань між обкладинками конденсатора $d = 1 \text{ см}$.

Вважаючи, що ϵ і γ не залежать від частоти, а лінійні розміри обкладинок значно перевищують відстань d , обчислити амплітуди густини струму провідності δ_{mnp} і струму зміщення δ_{mzm} для наступних частот:

$$1) f_1 = 0; \quad 2) f_2 = 50 \text{ Гц}; \quad 3) f_3 = 400 \text{ Гц}; \quad 4) f_4 = 400 \text{ кГц}.$$

Записати для цих чотирьох випадків миттєве значення струму i_0 , що

доводиться на 1 м^2 поверхні обкладинок конденсатора, а також їх комплексні амплітуди.

Відповідь:

$f, \text{Гц}$	$\delta_{\text{нр}}, \text{А/м}^2$	$\delta_{\text{зм}}, \text{А/м}^2$	$i_0, \text{А/м}^2$	$I_{\text{м}0}, \text{А}$
0	15	0	15	15
50	15	$33,35 \cdot 10^{-4}$	$15 \sin \omega t + 33,35 \cdot 10^{-4} \cos \omega t$	$15 \angle 0,013^\circ$
400	15	$267 \cdot 10^{-4}$	$15 \sin \omega t + 267 \cdot 10^{-4} \cos \omega t$	$15 \angle 0,1^\circ$
$400 \cdot 10^3$	15	26,7	$15 \sin \omega t + 26,7 \cos \omega t$	$30,62 \angle 60,67^\circ$

ЗАДАЧА 14.2. Обкладинки плоского конденсатора мають форму дисків і розташовані на відстані $d = 1 \text{ см}$ один від одного, розділені недосконалим діелектриком з питомою провідністю $\gamma = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Сл/м}$, відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$, магнітною проникністю $\mu = 1$. Вважаючи, що параметри діелектрика не залежать від частоти, знайти вирази для миттєвих значень напруженості і магнітної індукції в точках, що лежать між обкладинками конденсатора на відстані r від осі симетрії, нехтуючи викривленнями поля по краях. Радіус диска $a = 6 \text{ см}$. До конденсатора прикладена напруга $u = 3000 \sin \omega t \text{ В}$.

Задачу розв'язати для двох значень частоти 1) $f_1 = 0$; 2) $f_2 = 400 \text{ кГц}$.

Розв'язання

Почнемо з вибору циліндричної системи координат, вісь z якої співпадає з віссю симетрії конденсатора, а початок координат знаходиться на внутрішній поверхні однієї з обкладинок (рис. 14.1).

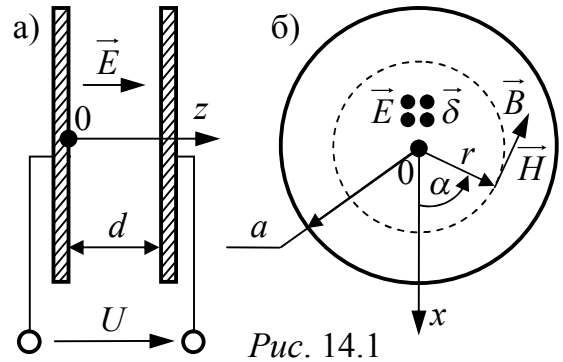


Рис. 14.1

Напруженість електричного поля одношарового плоского конденсатора відповідно до вибраної полярності прикладеної напруги має тільки одну проекцію $\vec{E} = z_0 \vec{E}$, а $E_r = 0$, $E_\alpha = 0$, причому

$$E = \frac{U_m \sin \omega t}{d} = \frac{3000}{10^{-2}} \sin \omega t = 3 \cdot 10^5 \sin \omega t \text{ В/м}.$$

Густина повного струму має також тільки одну проекцію:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) = z_0 (\gamma E_m \sin \omega t + \varepsilon \varepsilon_0 \omega E_m \cos \omega t).$$

До цього, густина струму провідності не залежить від частоти, її амплітуда

$$\delta_{\text{нр}} = \gamma E_m = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^5 = 15 \text{ А/м}^2,$$

а амплітуда струму зміщення пропорційна частоті

$$\delta_{\text{зм}} = \omega \varepsilon \varepsilon_0 E_m = 2\pi f \cdot 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^5 = 667 f \cdot 10^{-7} \text{ А/м}^2.$$

Для частоти $f_1 = 0$ (постійний струм) $\delta_{\text{зм}} = 0$ $\delta = \delta_{\text{нр}} = 15 \text{ А/м}^2$,

для частоти $f_2 = 400 \text{ кГц}$ $\delta_{\text{зм}} = 667 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-7} = 26,68 \text{ А/м}^2$,

$$\delta = 15 \sin \omega t + 26,68 \cos \omega t = 30,61 \sin(\omega t + 60,66^\circ) \text{ А/м}^2.$$

За здобутим струмом напруженість магнітного поля розраховується за допомогою першого рівняння Максвелла (за законом повного струму).

Далі можливі два варіанти розв'язання:

1) з використанням першого рівняння Максвелла в інтегральній формі $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i$.

Вибравши контур у вигляді кола радіусу r в межах $r(0 \dots a)$ для лівої частини рівняння одержуємо $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl = H \oint_L dl = 2\pi r H$.

Повний струм, пов'язаний з контуром циркуляції, $i = \delta \pi r^2$, таким чином,

$$H = \frac{\delta \pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} \delta r.$$

При постійному струмі ($f_1 = 0$) $H = \frac{1}{2} \cdot 15r = 7,5r \text{ A/m}^2$,

$$B = \mu \mu_0 H = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 7,5r = 94,2 \cdot 10^{-7} \cdot r \text{ Тл, де } r[\text{м}].$$

При частоті $f_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ синусоїдного струму

$$H = \frac{1}{2} \cdot 30,61r \cdot \sin(\omega t + 60,66^\circ) = 15,3 \cdot r \cdot \sin(\omega t + 60,66^\circ) \text{ A/m}^2,$$

$$B = \mu \mu_0 H = 192 \cdot 10^{-7} \cdot r \cdot \sin(\omega t + 60,66^\circ) \text{ Тл.}$$

2) варіант розрахунку напруженості магнітного поля за допомогою першого рівняння Максвелла в диференціальній формі $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$.

Розкриваємо $\text{rot } \vec{H}$ у циліндричних координатах:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & r H_\alpha & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r H_\alpha)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right).$$

Відповідно до рівняння $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ у виразі для $\text{rot } \vec{H}$ повинні бути відсутні перші два доданки і тоді

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right) = \delta.$$

За правилом правоходового гвинта $H_r = 0$ і $H = H_\alpha$, тому далі маємо

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H)}{\partial r} = \delta,$$

після інтегрування $r H = \frac{1}{2} \delta r^2 + C$ і $H = \frac{1}{2} \delta r + C/r$.

Постійна інтегрування $C = 0$, оскільки при $r = 0$ повний струм $i = 0$ і $H = 0$. Таким чином, за другим варіантом розв'язання $H = H_\alpha = \frac{1}{2} \delta r$, що збігається з раніше отриманим результатом.

ЗАДАЧА 14.3. Циліндричний конденсатор має два шари недосконалої ізоляції. Радіус внутрішнього циліндра $r_0 = 1 \text{ см}$, радіус поверхні поділу двох діелектриків $r_1 = 2 \text{ см}$, внутрішній радіус зовнішнього циліндра $r_2 = 2,5 \text{ см}$.

Довжина конденсатора $l = 20$ см. Відносна діелектрична проникність внутрішнього шару $\epsilon_1 = 5$, його питома провідність $\gamma_1 = 8,66 \cdot 10^{-5}$ См/м, для зовнішнього шару $\epsilon_2 = 3$, $\gamma_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ См/м.

Конденсатор увімкнений до джерела синусоїдного струму

$$i = I_m \sin \omega t = 0,628 \sin \omega t \text{ А, частота якого } f = 18 \cdot 10^4 \text{ Гц.}$$

Нехтуючи викривленням поля по краях, знайти миттєві значення радіальних складових вектора напруженості електричного поля для точок, що лежать між обкладинками конденсатора на відстані r від осі циліндра.

Визначити миттєве значення напруги між обкладинками конденсатора.

Розв'язання

Розглянемо два варіанти розв'язання задачі.

Варіант 1.

З використанням теорії стаціонарних полів розрахуємо провідності і ємності кожного шару недосконалого діелектрика і побудуємо схему заміщення конденсатора у вигляді електричного кола (рис. 14.2).

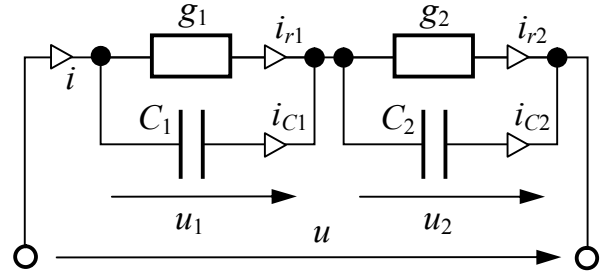


Рис. 14.2

$$g_1 = \frac{2\pi\gamma_1 l}{\ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{2\pi \cdot 8,66 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2}{\ln 2} = 15,69 \cdot 10^{-5} \text{ См,}$$

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{\ln 2} = 80,18 \cdot 10^{-12} \text{ Ф,}$$

$$g_2 = \frac{2\pi\gamma_2 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2}{\ln 2,5} = 16,87 \cdot 10^{-5} \text{ См,}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{\ln 1,25} = 148,7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф,}$$

ємнісні провідності для заданої частоти

$$\omega C_1 = 18 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 80,18 \cdot 10^{-12} = 9,064 \cdot 10^{-5} \text{ См,}$$

$$\omega C_2 = 18 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 148,7 \cdot 10^{-12} = 16,81 \cdot 10^{-5} \text{ См.}$$

Під напругою u_1 (рис. 15.2) струми паралельних віток

$$i_{r1} = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \cdot g_1, \quad i_{c1} = C_1 \frac{du_1}{dt} = \omega C_1 U_{1m} \cos(\omega t + \psi_1),$$

а струм загальної вітки $i = i_{r1} + i_{c1}$ заданий $i = I_m \sin \omega t$. Тоді

$$I_m \sin \omega t = U_{1m} [g_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \omega C_1 \cos(\omega t + \psi_1)].$$

Перейдемо до символічного методу:

комплексна амплітуда загального струму $\underline{I}_m = I_m$,

комплексна амплітуда напруги $\underline{U}_{1m} = U_{1m} e^{j\psi_{u1}}$,

комплексна провідність паралельних віток

$$\underline{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1 = (15,69 + j9,064) \cdot 10^{-5} = 18,12 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 10^{-5} \text{ См.}$$

$$\text{Тоді } \underline{U}_{1m} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_1} = \frac{0,628}{18,12 \cdot 10^{-5} e^{j30^\circ}} = 3466 e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

Для другого розгалуження одержуємо аналогічно

$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_2} = \frac{0,628}{(16,87 + j16,81) \cdot 10^{-5}} = 2637 e^{-j44,9^\circ} \text{ В.}$$

Напруга мережі

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{1m} + \underline{U}_{2m} = 3466 e^{-j30^\circ} + 2637 e^{-j44,9^\circ} = 6053 e^{-j36,5^\circ} \text{ В,}$$

миттєве значення напруги мережі

$$u(\omega t) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) = 6053 \sin(\omega t - 36,5^\circ) \text{ В.}$$

Варіант 2.

Струм загальної частини кола розглядаємо як струм джерела струму, що розтікається з жили на оболонку в радіальному напрямі коаксіального кабелю, причому $\oint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S} = i$, а радіальна складова густини повного струму

$$\delta = \frac{i}{2\pi r l} = \frac{0,628 \sin \omega t}{2\pi \cdot 0,2 \cdot r} = \frac{0,5}{r} \sin \omega t \text{ А/м}^2, \text{ де } r[\text{м}].$$

Комплексна амплітуда повного струму $\underline{\delta}_m = \frac{0,5}{r} = \delta_m e^{j\psi_i}$ при $\psi_i = 0$.

Густина повного струму $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

При синусоїдній напруженості поля

$$E = E_m \sin(\omega t + \psi_E) = \text{Im}(\underline{E}_m e^{j\omega t}), \text{ де } \underline{E}_m = E_m e^{j\psi_E},$$

$$\delta = \gamma E_m \sin(\omega t + \psi_E) + \omega \varepsilon \varepsilon_0 E_m \cos(\omega t + \psi_E) = \text{Im}(\underline{E}_m (\gamma + j\omega \varepsilon \varepsilon_0) e^{j\omega t}).$$

Розрахуємо закон зміни комплексних амплітуд радіальних складових напруженостей електричного поля окремих ділянок (рис. 15.2):

$$\underline{E}_{1m} = \frac{\underline{\delta}_m}{\gamma_1 + j\omega \varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{0,5}{r} \frac{1}{8,66 \cdot 10^{-5} + j2\pi \cdot 18 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = \frac{5000}{r} e^{-j30^\circ} \text{ В/м,}$$

$$\underline{E}_{2m} = \frac{\underline{\delta}_m}{\gamma_2 + j\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{0,5}{r} \frac{1}{3 \cdot 10^{-5} + j2\pi \cdot 18 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = \frac{11790}{r} e^{-j45^\circ} \text{ В/м.}$$

Комплексна амплітуда напруги на першому шарі діелектрика

$$\underline{U}_{1m} = \int_{r_0}^{r_1} \underline{E}_{1m} dr = 5 \cdot 10^3 e^{-j30^\circ} \ln \frac{r_1}{r_0} = 5 \cdot 10^3 e^{-j30^\circ} \ln 2 = 3466 e^{-j30^\circ} \text{ В,}$$

$$\text{на другому шарі } \underline{U}_{2m} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{E}_{2m} dr = 11,79 \cdot 10^3 e^{-j45^\circ} \ln \frac{2,5}{2} = 2631 e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

Комплексна амплітуда напруги між обкладинками двошарового циліндричного конденсатора $\underline{U}_m = \underline{U}_{1m} + \underline{U}_{2m} = 6053 e^{-j36,5^\circ} \text{ В,}$

миттєве значення цієї напруги $u(\omega t) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) = 6053 \sin(\omega t - 36,5^\circ) \text{ В,}$
що збігається з відповіддю варіанту 1.

ЗАДАЧА 14.4. Кільце радіусом $r_0 = 40$ см виконане з тонкого ізолюваного дроту і короткими провідниками (довжиною яких можна знехтувати) увімкнене до затискачів вольтметра електромагнітної системи (рис. 14.3). Кільце поміщене в рівномірне магнітне поле, індукція якого

$$\vec{B} = \vec{z}_0 \cdot 0,1 \sin 100\pi t \text{ Тл.}$$

Визначити миттєве значення $\text{rot } \vec{E}$ і знайти показ вольтметра.

Розв'язання

Відповідно до другого рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{z}_0 \cdot 0,1 \cdot 100\pi \cdot \cos 100\pi t = -\vec{z}_0 \cdot 31,4 \cos 100\pi t \text{ В/м.}$$

Для розрахунку ЕРС, що виникає в контурі, можливі два шляхи:

$$1) e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot \pi r_0^2) = -\pi \cdot 0,4^2 \cdot 10\pi \cdot \cos 100\pi t = -15,8 \cos 100\pi t \text{ В.}$$

$$2) e = \oint_L \vec{E} d\vec{l} \text{ по контуру кільця.}$$

Щоб узяти інтеграл другого варіанту, спочатку необхідно визначити функцію \vec{E} за раніше розрахованою функцією $\text{rot } \vec{E}$. Розкриваємо $\text{rot } \vec{E}$ в циліндричних координатах:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{r}_0 & \vec{\alpha}_0 & \frac{1}{r} \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\alpha & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{r}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial(rE_\alpha)}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}_0 \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \vec{z}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} \right).$$

Вище отримано, що вектор $\text{rot } \vec{E}$ має тільки осьову проекцію, тому в розгорненому виразі для $\text{rot } \vec{E}$ відсутні перші два доданки, а оскільки вектор \vec{B} має тільки осьову складову, то

$$E_r = 0, E_z = 0, \text{ а } \vec{E} = \vec{\alpha}_0 E \text{ і } \text{rot } \vec{E} = \vec{z}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE)}{\partial r} \right).$$

Підставляємо вище отриманий вираз для $\text{rot } \vec{E}$

$$-31,4 \cos 100\pi t = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE)}{\partial r} \right),$$

після інтегрування по змінній координаті r одержуємо

$$\frac{-31,4r^2 \cos 100\pi t}{2} + C = rE, \text{ звідки } E = -15,7r \cos 100\pi t + \frac{C}{r} \text{ В/м.}$$

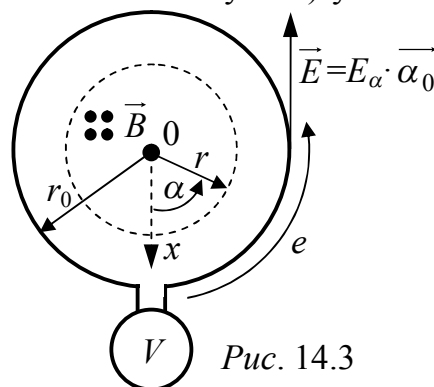


Рис. 14.3

Із умов у нулі ($r \rightarrow 0$) виходить, що постійна інтегрування $C = 0$ (на осі контуру немає умов, за яких $E \rightarrow \infty$). Таким чином, з урахуванням $dl = r_0 d\alpha$ одержуємо

$$e = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -15,7 \cos 100\pi \int_0^{2\pi} r_0^2 d\alpha = -15,7 r_0^2 2\pi \cdot \cos 100\pi t = -15,8 \cos 100\pi t \text{ В.}$$

Вольтметр електромагнітної системи вимірює діюче значення ЕРС, що виникає у контурі, його показ $U_V = \frac{15,8}{\sqrt{2}} = 11,2 \text{ В.}$

ЗАДАЧА 14.5. По мідному проводу радіусом $a = 0,5 \text{ см}$ і довжиною $l = 50 \text{ м}$ протікає постійний струм $I = 500 \text{ А}$. Питома провідність міді $\gamma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$.

Знайти потік потужності, що входить всередину проводу, і з його допомогою визначити опір проводу R . Порівняти отримане значення з опором, розрахованим за формулою $R = \frac{l}{\gamma S}$.

Відповідь: $P = 2794 \text{ Вт}$, $R = 0,0112 \text{ Ом}$.

ЗАДАЧА 14.6. По двох близько розташованих шинах (рис. 14.4) протікає постійний струм $I = 300 \text{ А}$. Напруга між шинами в перерізі, що розглядається, $U = 800 \text{ В}$. Питома провідність матеріалу шин $\gamma = 3 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. Розміри шин $a = 1 \text{ мм}$, $h = 100 \text{ мм}$. Простір між шинами заповнений двома шарами ідеального діелектрика товщиною $a_1 = 1 \text{ мм}$, $a_2 = 2 \text{ мм}$ з відносною діелектричною проникністю $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 4$, відповідно.

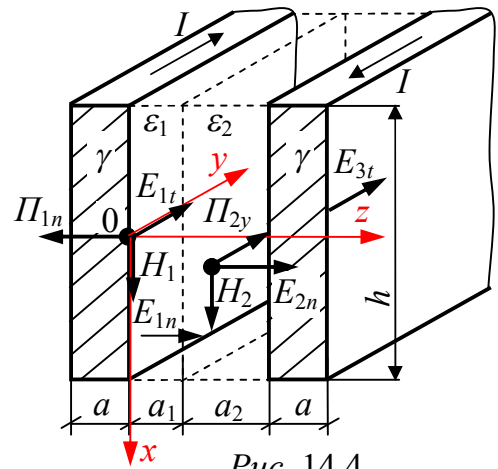


Рис. 14.4

Визначити потік вектора Пойнтінга через поперечний переріз діелектриків, які знаходяться між шинами, і порівняти його з потужністю, що передається в навантаження. Розрахувати також потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню шини на одиницю довжини l і порівняти його з тепловими втратами в шині.

Розв'язання

Оскільки товщина шин і відстань між ними значно менше їх висоти і довжини, то при розв'язанні задачі можна нехтувати викривленням поля по краях.

Для кількісного опису процесу передачі енергії скористаємося декартовою системою координат, вибравши початок відліку в середині лівої шини (рис. 14.4).

Відповідно до закону повного струму в інтегральній формі напруженість магнітного поля має тільки проекцію уздовж осі x , причому ліворуч і праворуч від шин $H = 0$, а в просторі, зайнятому діелектриками

$$H = H_x = \frac{I}{h} = \frac{300}{0,1} = 3000 \text{ А/м.}$$

У вектора напруженості електричного поля є дві складові – нормальна E_n та тангенціальна E_t , яка направлена уздовж осі y ; причому для лівої шини при $z = 0$ і $z = -a$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{j} \frac{I}{ah\gamma} = \vec{j} \frac{300}{10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 3 \cdot 10^7} = \vec{j} 10^{-3} \text{ В/м},$$

для правої шини при $z = a_1 + a_2$ і $z = a_1 + a_2 + a$

$$\vec{E}_{3t} = -\vec{E}_{1t} = -\vec{j} 10^{-3} \text{ В/м}.$$

Із зовнішніх сторін шин і тангенціальна, і нормальна складові відсутні, $E = 0$, тому тут вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}] = 0$.

Область діелектриків є ізоляцією двошарового конденсатора, нормальні складові вектора напруженості в першому шарі $E_{1n} = \text{const}$, в другому $E_{2n} = \text{const}$, напруга в перерізі $U = E_{1n}a_1 + E_{2n}a_2$, і на підставі граничної умови при $z = a_1$ $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$.

Розв'язуючи систему двох останніх рівнянь, одержуємо

$$E_{1n} = \frac{U\varepsilon_2}{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1} = \frac{800 \cdot 4}{10^{-3}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2)} = 4 \cdot 10^5 \text{ В/м},$$

$$E_{2n} = \frac{U\varepsilon_1}{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1} = \frac{800 \cdot 2}{10^{-3}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

Складова вектора Пойнтінга для першого діелектрика, яка направлена вздовж осі y (від генератора до навантаження)

$$\Pi_{1y} = E_{1n} \cdot H \cdot \sin 90^\circ = \frac{U\varepsilon_2}{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1} \cdot \frac{I}{h} = 4 \cdot 10^5 \cdot 3000 = 12 \cdot 10^8 \text{ Вм/м}^2,$$

для другого діелектрика

$$\Pi_{2y} = E_{2n} \cdot H \cdot \sin 90^\circ = \frac{U\varepsilon_1}{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1} \cdot \frac{I}{h} = 2 \cdot 10^5 \cdot 3000 = 6 \cdot 10^8 \text{ Вм/м}^2.$$

Потік вектора Пойнтінга через поперечний переріз діелектрика визначає потужність, що проходить через цей переріз в навантаження

$$\Pi_{1y} \cdot a_1 h + \Pi_{2y} \cdot a_2 h = UI = P = 800 \cdot 300 = 24 \cdot 10^4 \text{ Вт}.$$

Нормальна до поверхні лівої шини складова вектора Пойнтінга

$$\Pi_{1n} = E_{1t} H \sin 90^\circ = \frac{I}{ah\gamma} \cdot \frac{I}{h} = \frac{I^2}{ah^2\gamma} = 10^{-3} \cdot 3000 = 3 \text{ Вм/м}^2.$$

Потік потужності всередину лівої шини завдовжки l

$$\Pi_{1n} h l = \frac{I^2 l}{ah\gamma} = I^2 R,$$

де $R = \frac{1}{\gamma S} l$ – опір шини завдовжки l ,

$S = ah$ – поперечний переріз шини.

ЗАДАЧА 14.7. Коаксіальний кабель (рис. 14.5) завдовжки $l = 100 \text{ м}$ з розмірами поперечного

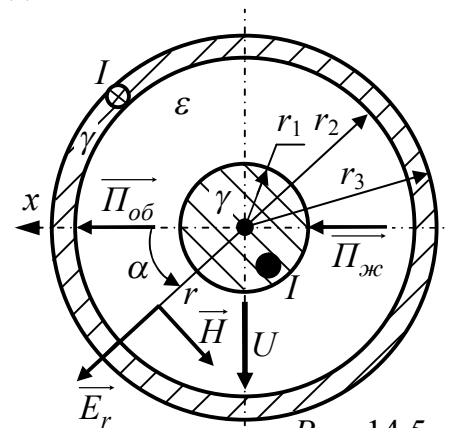


Рис. 14.5

перерізу $r_1 = 3 \text{ мм}$, $r_2 = 12 \text{ мм}$, $r_3 = 12,5 \text{ мм}$ заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. Жилу і оболонку виконано з алюмінію з питомою провідністю $\gamma = 32 \cdot 10^4 \text{ См/см}$. По кабелю протікає постійний струм $I = 100 \text{ А}$ при напрузі в перерізі, що розглядається, $U = 6 \text{ кВ}$.

Нехтуючи струмом витоку (провідність ізоляції прийняти рівною нулю), визначити закон зміни осьової складової вектора Пойнтінга та його потік через поперечний переріз ізоляції. Знайти потоки вектора Пойнтінга всередину жили і оболонки на одиницю довжини кабелю, з їх допомогою розрахувати опори жили і оболонки.

Розв'язання

Вектор Пойнтінга розраховується через напруженості електричного і магнітного полів $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$. Радіальна складова вектора напруженості електричного поля (див. розділ 11)

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{6000}{r \ln \frac{12}{3}} = 4330 \frac{1}{r} \text{ В/см при } r[\text{см}].$$

На поверхні жили одержуємо $E_{rж} = \frac{4330}{0,3} = 14400 \text{ В/см},$

на внутрішній поверхні оболонки $E_{rоб} = \frac{4330}{1,2} = 3610 \text{ В/см}.$

Напруженість магнітного поля розраховується за законом повного струму і має тільки складову H_α . Для області діелектрика

$$H = H_\alpha = \frac{I}{2\pi r} = \frac{100}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = 15,92 \cdot \frac{1}{r} \text{ А/см при } r[\text{см}].$$

На поверхні жили одержуємо $H_{ж} = 53,1 \text{ А/см},$
на внутрішній стороні оболонки $H_{об} = 13,3 \text{ А/см}.$

Тангенціальна складова напруженості електричного поля на поверхні жили напрямлена уздовж позитивного напрямку осі z (від генератора до навантаження)

$$E_{tж} = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{100}{\pi \cdot 0,3^2 \cdot 32 \cdot 10^4} = 11,06 \cdot 10^{-4} \text{ В/см і } \vec{E}_{tж} = \vec{z}_0 E_{tж},$$

на поверхні оболонки тангенціальна складова напрямлена протилежно:

$$E_{tоб} = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)\gamma} = \frac{100}{\pi \cdot (1,25^2 - 1,2^2) \cdot 32 \cdot 10^4} = 8,12 \cdot 10^{-4} \text{ В/см і } \vec{E}_{tоб} = -\vec{z}_0 E_{tоб}.$$

Зауважимо, що тангенціальна складова напруженості електричного поля менше нормальної на 7 порядків (відрізняється \approx в 10^7 разів).

Осьова складова вектора Пойнтінга напрямлена від генератора до навантаження та дорівнює

$$\Pi_z = E_r \cdot H_\alpha = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{I}{2\pi r} = 68,92 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{r^2} \text{ Вт/см}^2 \text{ при } r[\text{см}].$$

Потік потужності через ізоляцію кабелю

$$\oint_S \vec{\Pi}_z \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot 2\pi r \cdot dr = UI = 6000 \cdot 100 = 6 \cdot 10^5 \text{ Вт} = P_H,$$

тобто енергія до приймача передається по ізоляції кабелю і визначається потужністю навантаження.

Потік енергії всередину жили на одиницю довжини l (рис. 14.5)

$$\oint_S \vec{\Pi}_{жс} \cdot d\vec{S}_{жс} = E_{тжс} \cdot H_{жс} \cdot 2\pi r_1 l = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} \cdot \frac{I}{2\pi r_1} \cdot 2\pi r_1 l = I^2 \frac{l}{\pi r_1^2 \gamma} = I^2 \frac{l}{\gamma S_{жс}} = \Delta P_{жс},$$

де $\Delta P_{жс}$ – потужність втрат в жилі довжиною l .

Формула $\frac{l}{\gamma S_{жс}} = R_{жс}$ є омичним (тобто отриманим на постійному струмі)

опором провідника. Таким чином, на одиницю довжини $l = 1 \text{ м} = 100 \text{ см}$ здобуваємо

$$R_{жс} = \frac{100}{32 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0,3^2} = 11,06 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}, \quad \Delta P_{жс} = 11,06 \text{ Вт}.$$

Теплові втрати в оболонці визначаються потоком вектора Пойнтінга всередину оболонки:

$$\Delta P_{об} = \Pi_{об} \cdot S_{об} = E_{тоб} \cdot H_{об} \cdot 2\pi r_2 l = \frac{I}{S_{об} \gamma} \cdot \frac{I}{2\pi r_2} \cdot 2\pi r_2 l = I^2 \frac{l}{\gamma S_{об}}.$$

Опір оболонки і теплові втрати в ній на одиницю довжини $l = 1 \text{ м}$

$$R_{об} = \frac{l}{\gamma S_{об}} = \frac{100}{32 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot (1,25^2 - 1,2^2)} = 8,12 \cdot 10^{-4} \text{ Ом},$$

$$\Delta P_{об} = I^2 R_{об} = 100^2 \cdot 8,12 \cdot 10^{-4} = 8,12 \text{ Вт}.$$

ЗАДАЧА 14.8. По двопровідній лінії, що розташована у повітрі, з проводами однакового радіусу $r_0 = 2 \text{ см}$, з дуже великою питомою провідністю ($\gamma = \infty$), замикається струм $I = 1 \text{ кА}$, як показано на рис. 14.6. Напруга між проводами $U = 1 \text{ кВ}$.

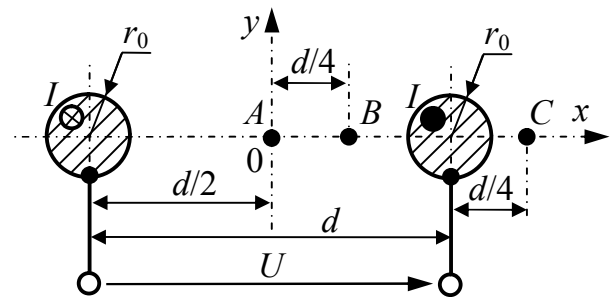


Рис. 14.6

Розрахувати вектор Пойнтінга

для точок A, B, C , які лежать на осі x , якщо відстань між проводами $d = 0,5 \text{ м}$.

Примітка. Оскільки $d \gg r_0$, зміщенням електричних і геометричних осей проводів знехтувати.

Відповідь: $\Pi_A = 15,84 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, $\Pi_B = 28,2 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, $\Pi_C = 10,13 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$.

14.2 РІВНЯННЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ФОРМІ. ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ

При синусоїдному сталому режимі змінного електромагнітного поля його характеристики виражаються за допомогою комплексних амплітуд або комплексів діючих значень, коли миттєві значення визначаються за співвідношеннями типу

$$\vec{E}(\omega t) = \vec{E}_m \sin(\omega t + \psi_E) = \text{Im}(\sqrt{2} \vec{E} e^{j\omega t}),$$

де стрілка означає, що розглядається векторна величина, а підкреслення вказує на комплексну форму величини $\underline{E} = E e^{j\psi_E}$.

Виконавши операції диференціювання за часом, що передбачаються рівняннями Максвелла для миттєвих значень, пропустивши операцію «уявна частина» і скоротивши на $e^{j\omega t}$, одержують рівняння Максвелла в комплексній формі.

Запишемо їх відповідно до підрозділу 14.1:

- 1) $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \underline{I}; \text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + j\omega \vec{D} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ за відсутності струму переносу;
- 2) $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -j\omega \underline{\Phi}; \text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \mu_0 \vec{H};$
- 3) $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \underline{q}; \quad \text{div } \vec{D} = \underline{\rho};$
- 4) $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \quad \text{div } \vec{B} = 0.$

Рівняння зв'язку приймають вигляд

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + j\omega \vec{D}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

Граничні умови в комплексній формі визначаються рівняннями:

$$\underline{E}_{1t} = \underline{E}_{2t}, \quad \underline{D}_{1n} = \underline{D}_{2n} \quad \text{для діелектриків};$$

$$\underline{E}_{1t} = \underline{E}_{2t}, \quad \underline{\delta}_{1n} = \underline{\delta}_{2n} \quad \text{для провідних середовищ};$$

$$\underline{H}_{1t} = \underline{H}_{2t}, \quad \underline{B}_{1n} = \underline{B}_{2n} \quad \text{для магнітної складової поля}.$$

Запроваджується також комплексний вектор Пойнтінга

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right], \quad \text{де } \vec{H}^* \text{ – спряжений комплекс напруженості магнітного поля.}$$

$$\text{Тоді } -\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = P + jQ = \int_V \gamma E^2 dV + 2j\omega \int_V \left(\frac{\mu \mu_0 H^2}{2} - \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \right) dV.$$

Для однорідного ізотропного середовища за відсутності вільних зарядів $q = 0, \rho = 0$ відповідно до третього рівняння Максвелла $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0, \text{div } \vec{D} = 0,$

$\text{div } \vec{E} = 0$, а чотири рівняння Максвелла зводяться до одного рівняння:

$$\text{або } \nabla^2 \vec{E} - \gamma \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{або } \nabla^2 \vec{H} - \gamma \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

В комплексній формі останні два рівняння приймають вигляд:

$$\nabla^2 \vec{E} - j\omega \gamma \mu \mu_0 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \vec{E} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - j\omega \gamma \mu \mu_0 \vec{H} + \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \vec{H} = 0.$$

В математичній фізиці наведені рівняння називаються *хвильовими*, оскільки їх розв'язанням є біжучі хвилі. Такі хвилі класифікують за видом поверхні однакового фазового стану:

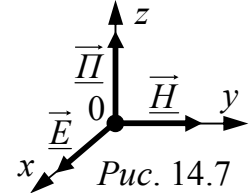
- 1) плоскі хвилі;
- 2) циліндричні хвилі;
- 3) сферичні хвилі.

У разі плоскої хвилі, що поширюється у бік збільшення координати z , хвильові рівняння набувають вигляду:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\underline{E}, \quad \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} = j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\underline{H}. \quad (14.1)$$

Направивши вектор напруженості електричного поля плоскої хвилі вздовж осі x , отримаємо, що вектор напруженості магнітного поля напрямлений вздовж осі y , а вектор Пойнтінга – вздовж осі z , причому всі вектори залежать тільки від координати z (рис. 14.7):

$$\begin{aligned} \underline{E} &= i \underline{E}, & \underline{E}_y &= 0, & \underline{E}_z &= 0; \\ \underline{H} &= j \underline{H}, & \underline{H}_x &= 0, & \underline{H}_z &= 0; \\ \underline{\Pi} &= [\underline{E} \times \underline{H}^*] = \vec{k} \underline{\Pi}, & \underline{\Pi}_x &= 0, & \underline{\Pi}_y &= 0. \end{aligned}$$



Формально хвильове рівняння (14.1) є однорідним диференціальним рівнянням, де шукані залежності є функціями координати z ; їх знаходять за допомогою підстановки $f(z) = \underline{A}e^{pz} \neq 0$, внаслідок чого виходить характеристичне рівняння $p^2 = j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)$.

У цьому випадку корінь характеристичного рівняння називають *коефіцієнтом поширення хвилі*

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)} = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma - \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} = \alpha + j\beta,$$

де α – коефіцієнт згасання, β – коефіцієнт фази,

$$\text{а напруженості } \underline{E} = \underline{A}_1 e^{-pz} + \underline{A}_2 e^{pz} = \underline{E}_{np} + \underline{E}_{zv} \quad (14.2)$$

$$\text{і } \underline{H} = \underline{A}_3 e^{-pz} - \underline{A}_4 e^{pz} = \underline{H}_{np} - \underline{H}_{zv}. \quad (14.3)$$

$$\text{Відношення } \underline{A}_1/\underline{A}_3 = \underline{A}_2/\underline{A}_4 = \underline{Z}_C - \text{хвильовий опір}. \quad (14.4)$$

14.2.1 Плоскі хвилі в провідному середовищі

ЗАДАЧА 14.9. Плоска електромагнітна хвиля проникає з повітря в товсту металеву плиту перпендикулярно до її поверхні. Питома провідність металу $\gamma = 5 \cdot 10^6$ См/см, відносна магнітна проникність $\mu = 200$, розміри плити по всіх напрямках не обмежені. Діюче значення напруженості магнітного поля на поверхні плити $H_0 = 4000$ А/см. Визначити коефіцієнт поширення хвилі в металі, коефіцієнт згасання, коефіцієнт фази, фазову швидкість поширення хвилі, довжину хвилі, хвильовий опір для частоти $f = 50$ Гц.

Прийнявши на поверхні плити миттєве значення напруженості $H(\omega t) = H_m \sin \omega t$, записати миттєві значення $H(\omega t)$, $E(\omega t)$, $\Pi(\omega t)$ на відстані $z = 2$ мм від поверхні.

Розв'язання

Для довільного середовища з відмінними від нуля γ , ε , μ коефіцієнт поширення

$$p = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}.$$

Відносна діелектрична проникність металу ε , як і більшості матеріалів, лежить в діапазоні $\varepsilon(1 \dots 10)$.

Розрахуємо для металу співвідношення між густиною струму провідності і густиною струму зміщення на частоті $\omega = 2\pi f = 314 \text{ рад/с}$, прийнявши $\varepsilon = 10$:

$$\frac{\delta_{np}}{\delta_{зм}} = \frac{\gamma E}{\omega \varepsilon \varepsilon_0 E} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^6}{314 \cdot 10 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \approx 10^{14}.$$

Оскільки $\delta_{np} \gg \delta_{зм}$, струмом зміщення в металі можна знехтувати. Тоді для провідного середовища

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{e^{j90} \cdot 314 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^6} = 628e^{j45^\circ} = 444 + j444 \text{ м}^{-1},$$

$$\text{коефіцієнт згасання } \alpha = 444 \text{ Нн/м},$$

$$\text{коефіцієнт фази } \beta = 444 \text{ рад/м},$$

$$\text{фазова швидкість поширення хвилі } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{444} = 0,707 \text{ м/с},$$

$$\text{довжина хвилі } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{0,707}{50} = 0,01414 \text{ м} = 14,14 \text{ мм},$$

хвильовий опір

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\varphi_C} = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{314 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^6}} e^{j45^\circ} = 125,6 \cdot 10^{-6} e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплекс напруженості магнітного поля на поверхні плити

$$\underline{H}_0 = H_0 e^{j\psi_H} = 4000 \text{ А/см},$$

комплекс напруженості електричного поля у поверхневому шарі металу при $z = 0_+$

$$\underline{E}_0 = \underline{H}_0 \cdot \underline{Z}_C = 4000 \cdot 125,6 \cdot 10^{-6} e^{j45^\circ} = 0,5024 e^{j45^\circ} \text{ В/см} = E_0 e^{j\psi_E}.$$

Комплекси напруженостей на довільній відстані від поверхні мають тільки пряму хвилю:

$$\underline{E}(z) = \underline{E}_0 e^{-pz} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\psi_E - \beta z)}, \quad \underline{H}(z) = \underline{H}_0 e^{-pz} = H_0 e^{-\alpha z} e^{j(\psi_H - \beta z)}.$$

$$\text{Для координати } z = 2 \text{ мм згасання } \alpha z = 444 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,888 \text{ Нн},$$

$$\text{зміна фази хвилі } \beta z = 444 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,888 \text{ рад} = 50,9^\circ.$$

Тоді миттєві значення напруженостей і вектора Пойнтінга на відстані $z = 2 \text{ мм}$ від поверхні металу

$$E(\omega t) = \text{Im}(\sqrt{2} \underline{E} e^{j\omega t}) = \text{Im}(\sqrt{2} \cdot 0,5024 e^{-0,888} e^{j(\omega t - 50,9^\circ + 45^\circ)}) = \\ = 0,292 \sin(\omega t - 5,9^\circ) \text{ В/см} = E_m \sin(\omega t + \psi_{Ez}),$$

$$H(\omega t) = \text{Im}(\sqrt{2} \underline{H} e^{j\omega t}) = \text{Im}(\sqrt{2} \cdot 4000 e^{-0,888} e^{j(\omega t - 50,9^\circ)}) = \\ = 2327 \sin(\omega t - 50,9^\circ) \text{ А/см} = H_m \sin(\omega t + \psi_{Hz}).$$

$$P(\omega t) = E \cdot H = E_m H_m \sin(\omega t + \psi_{Ez}) \cdot \sin(\omega t + \psi_{Hz}) = \\ = \frac{E_m H_m}{2} [\cos(\psi_{Ez} - \psi_{Hz}) - \cos(2\omega t + \psi_{Ez} + \psi_{Hz})] = \\ = \frac{E_m H_m}{2} [\cos \varphi_C - \cos(2\omega t + \psi_{Ez} + \psi_{Hz})] = 340 \cdot [\cos 45^\circ - \cos(628t - 56,8^\circ)] \frac{\text{ВА}}{\text{см}^2}.$$

ЗАДАЧА 14.10. Плоска електромагнітна хвиля проникає з повітря в товсту мідну плиту, розміри якої не обмежені. Напрямок проникнення хвилі перпендикулярний до поверхні плити. Питома провідність міді $\gamma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. Діюче значення напруженості електричного поля на відстані $l = 4 \text{ мм}$ від поверхні $E = 0,01 \text{ В/см}$, частота $f = 400 \text{ Гц}$.

Визначити фазову швидкість і довжину хвилі в міді. Розрахувати діючі значення напруженостей на поверхні плити. Знайти потік вектора Пойнтінга через 1 м^2 поверхні плити.

Відповіді: $v = 8,37 \text{ м/с}$, $\lambda = 21 \text{ мм}$, $Z_C = 7,444 \cdot 10^{-6} e^{j45^\circ} \text{ Ом}$, $p = 300 + j300 \text{ м}^{-1}$,
 $E_0 = 3,32 \text{ В/м}$, $H_0 = 44,6 \cdot 10^4 \text{ А/м}$, $-\oint_S \underline{\Pi}_0 \cdot \underline{dS} = P + jQ = 1,05 + j1,05 \text{ МВА}$.

ЗАДАЧА 14.11. По плоскій мідній шині в осьовому напрямі тече синусоїдний струм $i = 2000 \sin \omega t \text{ А}$ частоти $f = 400 \text{ Гц}$. Товщина шини $0,6 \text{ см}$, висота – 6 см . Питома провідність міді $5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$.

Побудувати графіки зміни діючих значень напруженостей електромагнітного поля по перерізу шини. Розрахувати активний і індуктивний опори шини на 1 м .

Розв'язання

Враховуючи розміри шини, нехтуємо викривленням поля по краях.

Вибираємо декартову систему координат з початком відліку в центрі поперечного перерізу шини, причому вісь x направимо по напрямку густини струму провідності (по напрямку вектора напруженості електричного поля) (рис. 14.8). Введемо позначення і проstavимо значення:

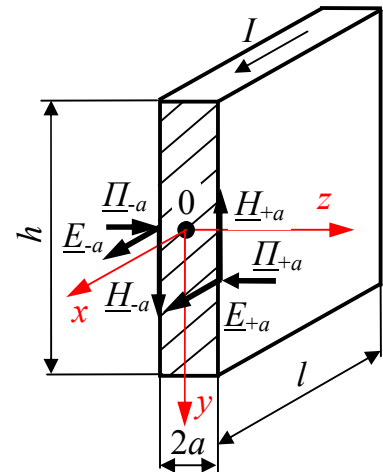


Рис. 14.8

$$i = I_m \sin \omega t, \quad I_m = 2000 \text{ А}, \quad f = 400 \text{ Гц}, \quad 2a = 0,6 \text{ см}, \\ h = 6 \text{ см}, \quad l = 0,5 \text{ м}, \quad \gamma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м},$$

діюче значення струму $I = I_m / \sqrt{2} = 1414 \text{ А}$,

середня густина струму по перерізу $\delta_{\text{сер}} = \frac{I}{2ah} = \frac{1414}{6 \cdot 60} = 3,93 \text{ А/мм}^2$.

Коефіцієнт поширення хвилі

$$p = \sqrt{j\omega\mu_0\gamma} = \sqrt{e^{j90^\circ} \cdot 2\pi \cdot 400 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7} = \\ = 424 e^{j45^\circ} = 300 + j300 \text{ м}^{-1} = \alpha + j\beta,$$

де коефіцієнт згасання $\alpha = 300 \text{ Нн/м}$,

коефіцієнт фази $\beta = 300 \text{ рад/м}$,

глибина проникнення хвилі $\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{300} = 0,00333 \text{ м} = 3,33 \text{ мм}$,

швидкість поширення хвилі $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6,28 \cdot 400}{300} = 8,373 \text{ м/с}$,

довжина хвилі $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{8,373}{400} = 0,0209 \text{ м} = 2,09 \text{ см},$

хвильовий опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 400 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5,7 \cdot 10^7}} e^{j45^\circ} = 74,4 \cdot 10^{-7} e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Напруженості \underline{E} і \underline{H} визначаються згідно з (14.2)÷(14.4). Визначаємо постійні інтегрування $\underline{A}_1, \underline{A}_2$. Комплекси напруженості магнітного поля на межах шини визначимо за законом повного струму

$$\underline{H}_{+a} = -\frac{I}{2h} = -\frac{1414}{2 \cdot 6} = -117,8 \text{ А/см} \text{ (мінус пов'язаний з напрямом вектора}$$

\underline{H}_{+a} проти позитивного напрямку осі у),

$$\underline{H}_{-a} = +\frac{I}{2h} = 117,8 \text{ А/см.}$$

Запишемо загальний вид розв'язання відносно \underline{H} для двох значень координати z :

$$z = +a: \quad \begin{cases} \underline{H}_{+a}\underline{Z}_C = \underline{A}_1 e^{-pa} - \underline{A}_2 e^{pa} = -\frac{I}{2h}\underline{Z}_C, \end{cases} \quad (14.5)$$

$$z = -a: \quad \begin{cases} \underline{H}_{-a}\underline{Z}_C = \underline{A}_1 e^{pa} - \underline{A}_2 e^{-pa} = \frac{I}{2h}\underline{Z}_C. \end{cases} \quad (14.6)$$

Для розв'язання наведеної системи помножимо (14.5) на e^{-pa} , а (14.6) – на e^{pa} і отримаємо:

$$\begin{cases} -\frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} e^{-pa} = \underline{A}_1 e^{-2pa} - \underline{A}_2, \quad \text{звідки} \quad \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} (e^{pa} + e^{-pa}) = \underline{A}_1 (e^{2pa} - e^{-2pa}) \text{ і} \\ \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} e^{pa} = \underline{A}_1 e^{2pa} - \underline{A}_2, \quad \underline{A}_1 = \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h(e^{pa} - e^{-pa})} = \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{4h \cdot \text{sh}(pa)}. \end{cases}$$

Помножимо (14.5) на e^{pa} , а (14.6) – на e^{-pa} , отримаємо:

$$\begin{cases} -\frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} e^{pa} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2 e^{2pa}, \quad \text{звідки} \quad -\frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} (e^{pa} + e^{-pa}) = -\underline{A}_2 (e^{2pa} - e^{-2pa}) \text{ і} \\ \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h} e^{-pa} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2 e^{-2pa}, \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{2h(e^{pa} - e^{-pa})} = \frac{\underline{I}\underline{Z}_C}{4h \cdot \text{sh}(pa)} = \underline{A}_1. \end{cases}$$

Шляхом підстановки постійних інтегрування в (14.2)÷(14.3) одержуємо закони зміни комплексів напруженостей у залежності від координати z :

$$\underline{E} = \frac{\underline{I}\underline{Z}_C \cdot \text{ch}(pz)}{2h \cdot \text{sh}(pa)}, \quad \underline{H} = -\frac{I \cdot \text{sh}(pz)}{2h \cdot \text{sh}(pa)}.$$

Проведемо обчислення і результати розрахунків комплексів напруженостей зведемо у табл. 14.1.

Таблиця 14.1

$z, \text{ см}$	0	$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,3$
$\underline{E}, \text{ В/см} \times 10^{-4}$	6,79 $\angle -15,38^\circ$	6,81 $\angle -10,23^\circ$	7,07 $\angle 4,79^\circ$	8,15 $\angle 26,68^\circ$
$\underline{H}, \text{ А/см}$	0	38,7 $\angle -13,66^\circ$	77,65 $\angle -8,53^\circ$	117,8

Графіки розподілу діючих значень напруженостей електромагнітного поля наведені на рис. 14.9, а, б.

Значення комплексного вектора Пойнтінга на бічних поверхнях шини

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= z_0 [\underline{E} \cdot \underline{H}^*] = z_0 \frac{I \underline{Z}_C \operatorname{ch}(pa)}{2h \cdot \operatorname{sh}(pa)} \cdot \left(-\frac{I^*}{2h} \right) = \\ &= -\frac{z_0 I^2 \underline{Z}_C}{4h^2 \cdot \operatorname{th}(pa)}. \end{aligned}$$

Потік потужності через дві бічні поверхні всередину шини

$$\begin{aligned} - \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} &= \frac{I^2 \underline{Z}_C}{4h^2 \cdot \operatorname{th}(pa)} \cdot 2hl = \frac{I^2 \underline{Z}_C l}{2h \cdot \operatorname{th}(pa)} = \\ &= P + jQ, \text{ звідки} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P + jQ &= \frac{1414^2 \cdot 74,4 \cdot 10^{-7} e^{j45} \cdot 100}{2 \cdot 6 \cdot \operatorname{th}(0,9 + j0,9)} = \\ &= 115,3 e^{j26,68^\circ} = 103 + j51,8 \text{ ВА.} \end{aligned}$$

Активний опір шини з урахуванням поверхневого ефекту

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{103}{1414^2} = 51,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом,}$$

індуктивний опір шини $X = \frac{Q}{I^2} = \frac{51,8}{1414^2} = 25,9 \cdot 10^{-6} \text{ Ом.}$

Помітимо, що на постійному струмі густина струму по перерізу шини рівномірна, омичний опір

$$r = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S} = \frac{0,5}{5,7 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 24,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} < R.$$

ЗАДАЧА 14.12. По плоскій сталевій шині в осьовому напрямі протікає синусоїдний магнітний потік $\Phi(t) = 5 \cdot 10^{-4} \sin \omega t \text{ Вб}$ частоти $f = 400 \text{ Гц}$. Товщина шини – 0,6 см, висота – 6 см, довжина – 0,5 м. Питома провідність сталі – $5 \cdot 10^6 \text{ См/м}$, відносна магнітна проникність – $\mu = 200$.

Побудувати графіки зміни діючих значень напруженостей електромагнітного поля по перерізу шини. Розрахувати потужність втрат на вихрові струми на 1 м.

Розв'язання

Враховуючи розміри шини, нехтуємо ефектами по краях.

Вибираємо декартову систему координат з початком відліку в центрі поперечного перерізу шини, причому вісь y направимо по напрямку вектора

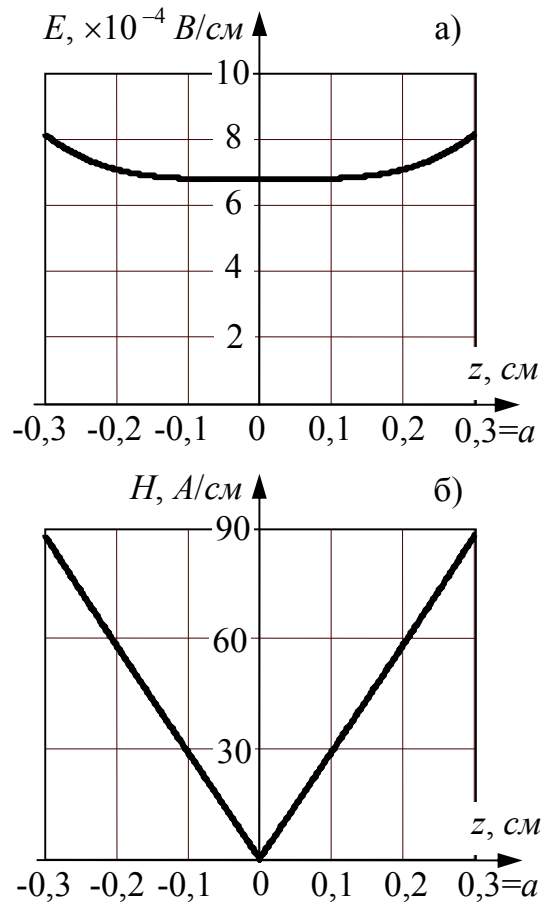


Рис. 14.9

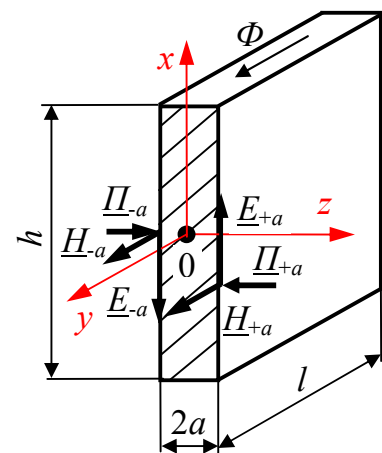


Рис. 14.10

магнітної індукції (вектора напруженості магнітного поля) (рис. 14.10).
Введемо позначення і проставимо значення:

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin \omega t, \quad \Phi_m = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}, \quad f = 400 \text{ Гц}, \quad \gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ См/м}, \quad 2a = 0,6 \text{ см}, \quad h = 6 \text{ см}, \quad l = 0,5 \text{ м}, \quad \mu = 200,$$

діюче значення магнітного потоку $\Phi = \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} = 3,536 \cdot 10^{-4} \text{ Вб},$

середнє значення магнітної індукції по перерізу осердя

$$B_{cp} = \frac{\Phi}{2ah} = \frac{3,536 \cdot 10^{-4}}{0,6 \cdot 10^{-4}} = 0,982 \text{ Тл}.$$

Скористаємося загальним видом розв'язання хвильових рівнянь (14.2)÷(14.3) для вказаного вибору системи координат і напрямів векторів \vec{E} і \vec{H} :

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{-pz} + \underline{A}_2 e^{pz}, \quad \underline{H} = \frac{\underline{A}_1 e^{-pz}}{\underline{Z}_C} - \frac{\underline{A}_2 e^{pz}}{\underline{Z}_C}.$$

Коефіцієнт поширення хвилі

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{2\pi \cdot 400 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^6} e^{j45^\circ} = 1776 e^{j45^\circ} = 1256 + j1256 \text{ м}^{-1} = \alpha + j\beta,$$

де коефіцієнт згасання

$$\alpha = 1256 \text{ Нп/м},$$

глибина проникнення хвилі

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = 0,0008 \text{ м} = 0,8 \text{ мм},$$

коефіцієнт фази

$$\beta = 1256 \text{ рад/м},$$

швидкість поширення хвилі

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6,28 \cdot 400}{1256} = 2 \text{ м/с},$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм},$$

хвильовий опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 400 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^6}} e^{j45^\circ} = 355 \cdot 10^{-6} e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Постійні інтегрування визначимо через поки що невідомі значення напруженості магнітного поля на бічних поверхнях шини, які $\underline{H}_{+a} = \underline{H}_{-a}$ є однаковими через симетрію поля щодо площини xOy . Тоді

$$\underline{H}_{+a}\underline{Z}_C = \underline{A}_1 e^{-pa} - \underline{A}_2 e^{pa} \quad \text{і} \quad \underline{H}_{-a}\underline{Z}_C = \underline{A}_1 e^{pa} - \underline{A}_2 e^{-pa},$$

звідки $\underline{A}_1 = -\underline{A}_2 = \frac{\underline{H}_a \underline{Z}_C}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\underline{H}_a \underline{Z}_C}{2\text{ch}(pa)}$

і $\underline{E} = -\frac{\underline{H}_a \underline{Z}_C \cdot \text{sh}(pz)}{\text{ch}(pa)}, \quad \underline{H} = \frac{\underline{H}_a \cdot \text{ch}(pz)}{\text{ch}(pa)}.$

Знак мінус у виразі для напруженості електричного поля вказує на те, що реально вектор \vec{E} напрямлений проти позитивного напрямку осі x при $z > 0$, що відзначене на рис. 14.10 зміною напрямку вектора Пойнтінга, щоб

визначити реальний напрям потоку потужності. Енергія поступає з навколишнього простору всередину шини.

Закон зміни магнітної індукції по перерізу шини отримаємо на підставі рівняння зв'язку $\underline{B} = \mu\mu_0 \underline{H}$. Таким чином, $\underline{B} = \frac{\mu\mu_0 \underline{H}_a}{ch(pa)} \cdot ch(pz)$, а магнітний

потік вздовж шини

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} &= \int_S \underline{B} dS = \int_{-a}^a \frac{\mu\mu_0 \underline{H}_a}{ch(pa)} \cdot h \cdot ch(pz) dz = \frac{\mu\mu_0 \underline{H}_a h \cdot 2sh(pa)}{p \cdot ch(pa)} = \\ &= \frac{j\omega\mu\mu_0 \underline{H}_a \cdot 2h \cdot th(pa)}{j\omega\sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma}} = \frac{\underline{Z}_C \underline{H}_a \cdot 2h \cdot th(pa)}{j\omega}, \end{aligned}$$

звідки раніше прийняте невідомим значення напруженості магнітного поля на поверхні шини дорівнює $\underline{H}_a = \frac{j\omega\Phi}{\underline{Z}_C 2h \cdot th(pa)}$, внаслідок чого одержуємо

формули для визначення напруженостей поля через магнітний потік:

$$\begin{aligned} \underline{E}(z) &= -\frac{j\omega\Phi}{2h \cdot sh(pa)} \cdot sh(pz) = -\frac{j2\pi \cdot 400 \cdot 3,536 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,06 \cdot sh((1256 + j1256) \cdot 0,003)} \cdot sh(pz) = \\ &= 0,312 e^{j54,1^\circ} \cdot sh(pz) \text{ В/м}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(z) &= \frac{j\omega\Phi \cdot ch(pz)}{2h \cdot \underline{Z}_C sh(pa)} = \frac{j2\pi \cdot 400 \cdot 3,536 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,06 \cdot 355 \cdot 10^{-6} e^{j45} sh((1256 + j1256) \cdot 0,003)} \cdot ch(pz) = \\ &= 963,4 e^{j189,1^\circ} \cdot ch(pz) \text{ А/м}, \end{aligned}$$

густина вихрового струму в шині $\underline{\delta} = \gamma \underline{E}$.

Теорема Умова-Пойнтінга в цій задачі застосовується для визначення потужності втрат від вихрових струмів P :

$$\begin{aligned} -\oint_S \underline{\Pi} d\vec{S} &= P + jQ = -2\underline{\Pi}_a \cdot hl = -2\underline{E}_a \cdot \underline{H}_a^* \cdot hl = \\ &= 2hl \frac{j\omega\Phi}{2h} \frac{(-j\omega)\Phi^* ch(p^* a)}{2h \cdot \underline{Z}_C^* sh(p^* a)} = \\ &= \frac{\omega^2 \Phi^2 l}{2h \cdot \underline{Z}_C^* th(p^* a)}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що ми отримали доказ того факту, що втрати на вихрові струми пропорційні квадрату частоти.

Проведемо обчислення і результати розрахунків комплексів напруженостей зведемо до табл. 14.2.

Графіки розподілу діючих значень напруженостей електромагнітного поля з

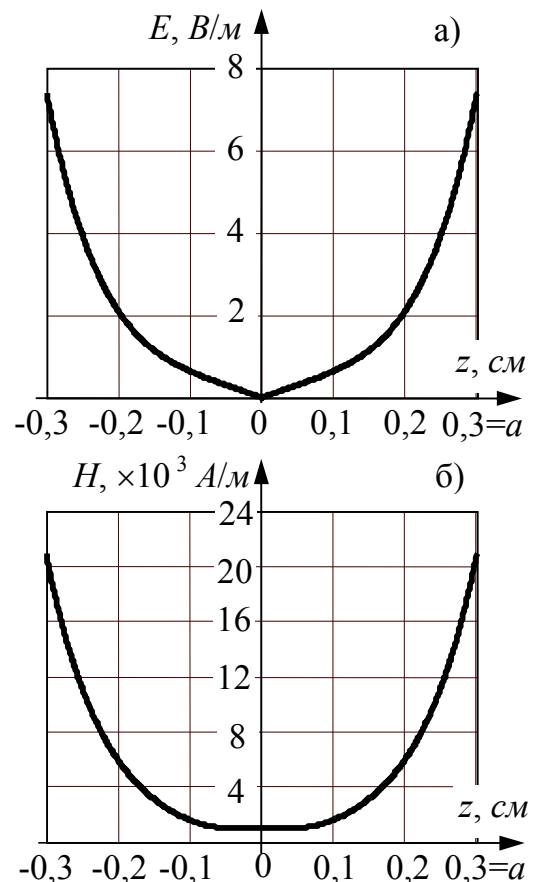


Рис. 14.11

демонстрацією магнітного поверхневого ефекту наведені на рис. 14.11.

Таблиця 14.2

$z, \text{ см}$	0	$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,3 = \pm a$
$\underline{E}, \text{ В/м}$	0	$0,64 \angle 128,62^\circ$	$2,01 \angle 197,7^\circ$	$7,4 \angle -90^\circ$
$\underline{H}, \times 10^3 \text{ А/м}$	$0,963 \angle 189,1^\circ$	$1,8 \angle 258,13^\circ$	$5,92 \angle -26,6^\circ$	$20,86 \angle 45^\circ$

Потік потужності через дві бічні поверхні всередину шини

$$- \underline{E}_a \underline{H}_a^* 2hl = - 7,4e^{-j90^\circ} \cdot 20860e^{-j45^\circ} \cdot 2 \cdot 0,06 \cdot 1 = 13100 + j13100 \text{ ВА},$$

звідки потужність втрат $P = 13100 \text{ Вт}$.

ЗАДАЧА 14.13. Матеріал осердя трансформатора має $\mu = 1000$, $\gamma = 10^7 \text{ См/м}$. Осердя набране з листів електротехнічної сталі товщиною $2a = 0,5 \text{ мм}$.

Для зменшення втрат на вихрові струми виготовлене осердя тих же розмірів, але товщина пластин узята меншою: $2a = 0,2 \text{ мм}$.

У скільки разів зменшилися втрати на вихрові струми при тій же середній індукції і при частоті:

$$\text{а) } f = 5000 \text{ Гц}; \quad \text{б) } f = 50 \text{ Гц}.$$

Відповідь: а) у 2,92 рази; б) у 6,25 раз.

ЗАДАЧА 14.14. Для сталеві шини задачі 14.12 обчислити час, за який поверхневий шар, рівний глибині проникнення хвилі Δ , нагріється від 20°C до 750°C , якщо питома теплоємність шини $C = 0,1 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$, густина $\rho = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Тепловою віддачею шару знехтувати і вважати, що тепло, що виділилося у шарі, рівномірно його нагріває.

Розв'язання

Активна потужність надходження енергії через дві зовнішні бічні поверхні шини усередину шини раніше обчислена:

$$P_a = \text{Re}(- \underline{E}_a \underline{H}_a^* 2hl) = 13100 \text{ Вт}.$$

На глибині проникнення хвилі при $z = a - \Delta$ активна потужність виходу з шару (вхід потужності у глибину шини)

$$P_\Delta = \text{Re}(- \underline{E}_\Delta \underline{H}_\Delta^* 2hl).$$

Розрахуємо напруженості поля на глибині проникнення хвилі, для чого необхідно обчислити $sh[p(a-\Delta)]$ і $ch[p(a-\Delta)]$ при $a - \Delta = 3 - 0,8 = 2,2 \text{ мм}$:

$$p(a - \Delta) = (1256 + j1256) \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} = 2,763 + j2,763;$$

$$sh(2,763 + j2,763) = 7,9e^{j158,1^\circ}, \quad ch(2,763 + j2,763) = 7,95e^{j158,4^\circ}.$$

$$\text{Одержуємо: } \underline{E}_\Delta = 0,312e^{j54,1^\circ} \cdot sh(p(a-\Delta)) = 2,7e^{j212,2^\circ} \text{ В/м},$$

$$\underline{H}_\Delta = 963,4e^{j189,1^\circ} \cdot ch(p(a-\Delta)) = 7,66 \cdot 10^3 e^{j347,6^\circ} \text{ А/м},$$

$$P_\Delta = \text{Re}(- 2,7e^{j212,2^\circ} \cdot 7,66 \cdot 10^3 e^{j347,6^\circ} \cdot 2 \cdot 0,06 \cdot 1) = 1756 \text{ Вт}.$$

Помітимо, що на глибині проникнення хвилі активна потужність

$$P_\Delta = P_a e^{-2\alpha\Delta} = 13100 \cdot e^{-2} = 1756 \text{ Вт}.$$

Активна потужність P_T , що виділяється у шарі товщиною Δ , витрачається на нагрів цього шару:

$$P_T = P_a - P_\Delta = 13100 - 1756 = 11344 \text{ Вт},$$

кількість тепла за час роботи $t_{роб}$: $Q_T = P_T \cdot t_{роб}$.

Підрахуємо необхідну кількість тепла для рівномірного нагріву шару, рівного глибині проникнення хвилі:

$$\begin{aligned} W_{кал} &= C\rho V(\theta_k - \theta_n) = C\rho\Delta hl \cdot 2(\theta_k - \theta_n) = \\ &= 0,1 \cdot 7,8 \cdot 0,08 \cdot 6 \cdot 100 \cdot 2 \cdot (750 - 20) = \\ &= 54,66 \cdot 10^3 \text{ кал}. \end{aligned}$$

Врахуємо електромеханічний еквівалент теплоти $J = 4,18 \text{ Дж/кал}$, тоді $Q_T = W_{кал} J$ і шуканий час роботи нагрівальної печі

$$t_{роб} = \frac{W_{кал} J}{P_T} = \frac{54,66 \cdot 10^3 \cdot 4,18}{11344} = 20,15 \text{ с}.$$

ЗАДАЧА 14.15. У відкритому прямокутному пазу ротора електричної машини (рис. 14.12) розташована алюмінієва шина прямокутного перерізу розмірами $h = 4 \text{ см}$, $2a = 0,5 \text{ см}$. Питома провідність алюмінію $\gamma = 3 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. По шині протікає синусоїдний струм частоти $f = 50 \text{ Гц}$. Діюче значення струму $I = 400 \text{ А}$.

Приймаючи відносну магнітну проникність сталі ротора $\mu = \infty$ і вважаючи, що шина повністю заповнює паз, розрахувати закони розподілу діючих значень густини струму і напруженості магнітного поля по перерізу шини, побудувати їх графіки.

Знайти активний і індуктивний опір 1 пог. м дроту з урахуванням поверхневого ефекту у пазу електричної машини.

Відповіді: $k = \sqrt{\pi f \gamma \mu_0} = 76,93 \text{ м}^{-1}$;

$$\underline{Z}_C = \frac{\rho}{\gamma} = 36,27 \cdot 10^{-7} \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$p = k + jk = 76,93 + j76,93 \text{ м}^{-1};$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(z) &= \frac{I \cdot \text{sh}(p(h-z))}{2a \cdot \text{sh}(ph)} = \\ &= 7390 \cdot e^{-j176,3^\circ} \cdot \text{sh}(p(h-z)) \text{ А/м}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}(z) &= \frac{I \cdot \underline{Z}_C \text{ch}(p(h-z))}{2a \cdot \text{sh}(ph)} = \\ &= 00268 \cdot e^{-j131,3^\circ} \cdot \text{ch}(p(h-z)) \text{ В/м}, \end{aligned}$$

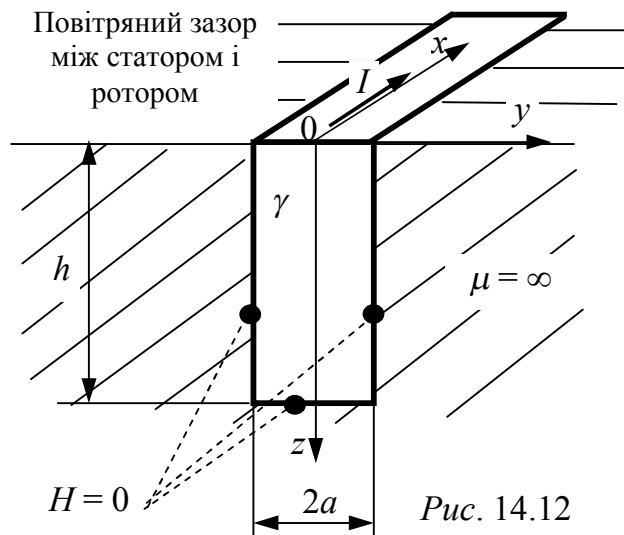


Рис. 14.12

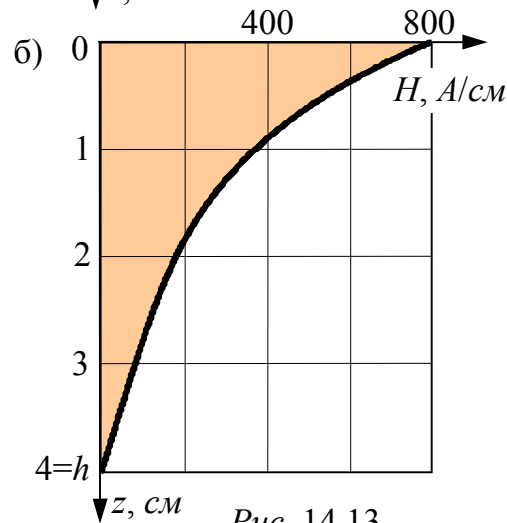
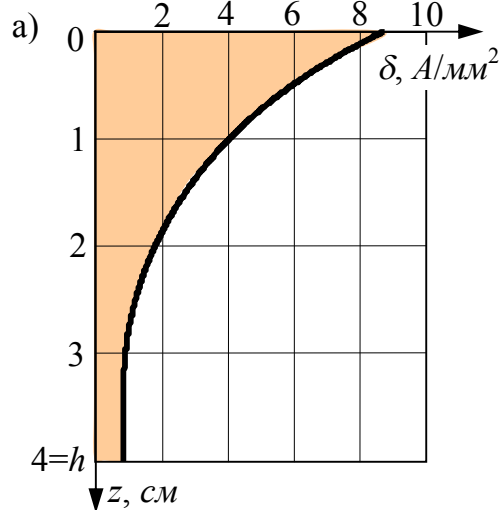


Рис. 14.13

$$\underline{\delta}(z) = \frac{I \cdot p \cdot \operatorname{ch}(p(h-z))}{2a \cdot \operatorname{sh}(ph)} = 0,804 \cdot e^{-j131,3^\circ} \cdot \operatorname{ch}(p(h-z)) \text{ A/мм}^2;$$

значення вектора Пойнтінга на верхній площині шини:

$$\underline{\Pi}(z=0) = \underline{E}(z=0) \cdot \underline{H}^*(z=0) = 16470 + j16490 \text{ Вт/м}^2;$$

потік вектора Пойнтінга всередину шини завдовжки 1 м:

$$- \int_{S_{\text{бок}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \underline{\Pi}(z=0) \cdot 2a \cdot 1 = 82,36 + j82,45 \text{ Вт};$$

$$r_0 = \operatorname{Re}\left(- \int_{S_{\text{бок}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}\right) / I^2 = 0,5148 \text{ мОм/м};$$

$$x_0 = \operatorname{Im}\left(- \int_{S_{\text{бок}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}\right) / I^2 = 0,5153 \text{ мОм/м}.$$

Графіки розподілу густини струму і напруженості магнітного поля по глибині паза наведені на рис. 14.13.

ЗАДАЧА 14.16. По двох близько розташованих шинах з питомою провідністю $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ См/м}$ і відносною магнітною проникністю $\mu = 200$ тече синусоїдний струм $I = 500 \text{ А}$ ($f = 50 \text{ Гц}$), як показано на рис. 14.14.

Відстань між шинами та їх товщина $a = 0,5 \text{ см}$, а висота $h = 0,5 \text{ м}$. Побудувати графіки залежності модулів густини струму і напруженості магнітного поля від координати z .

Розв'язання

Враховуючи, що $h \gg a$, можна нехтувати ефектом по краях, тобто вважати електромагнітні хвилі в провідних шинах плоскими. У вказаних умовах напруженість магнітного поля в будь-якій точці всередині правої шини (в лівій шині – аналогічна картина) може бути визначена за формулою $\underline{H} = \underline{C}_1 \cdot e^{-pz} + \underline{C}_2 \cdot e^{pz}$, якщо узяти за основу розв'язання для \underline{H} системи хвильових рівнянь.

Тут: \underline{C}_1 і \underline{C}_2 – постійні інтегрування;

$p = k + jk$ – корінь характеристичного рівняння;

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{314 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5 \cdot 10^6}{2}} = 444 \frac{1}{\text{м}}.$$

Постійні інтегрування \underline{C}_1 і \underline{C}_2 визначимо з умов (рис. 14.14), що в просторі між шинами напруженість магнітного поля відсутня ($\underline{H} = 0$ при $z = 0$), а зовні шин відповідно до закону повного струму $\underline{H} = \frac{-I}{h}$ при $z = a$.

$$\text{Тоді} \quad \begin{cases} 0 = \underline{C}_1 + \underline{C}_2, \\ \frac{-I}{h} = \underline{C}_1 e^{-pa} + \underline{C}_2 e^{pa}. \end{cases}$$

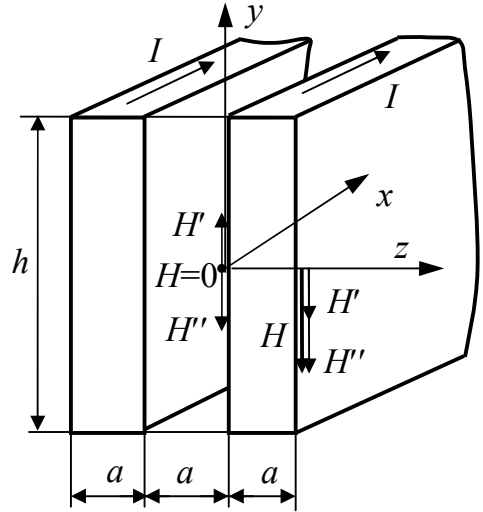


Рис. 14.14

З системи рівнянь одержуємо: $C_1 = \frac{I}{2h \cdot sh(pa)}$; $C_2 = \frac{-I}{2h \cdot sh(pa)}$.

Підставляючи отримані вирази в розв'язання для \underline{H} , отримуємо:

$$\underline{H} = \frac{-I}{h} \cdot \frac{sh(pz)}{sh(pa)}$$

Прийmemo, що комплекс струму $\underline{I} = 500 \text{ A}$.

$$\text{Тоді } \underline{H} = \frac{-500}{0,5} \cdot \frac{sh(444 + j444)z}{sh(444 + j444) \cdot 0,005} = -218e^{-j127,5^\circ} \cdot sh(444 + j444)z \text{ A/м.}$$

Густину струму в будь-якій точці правої пластини визначимо за допомогою першого рівняння Максвелла для плоскої хвилі

$$\underline{\delta} = -\frac{d\underline{H}}{dz} = p \frac{I}{h} \cdot \frac{ch(pz)}{sh(pa)} = (444 + j444) \frac{500}{0,5} \cdot \frac{ch(444 + j444)z}{sh(444 + j444) \cdot 0,005} = 136000e^{-j82,5^\circ} \cdot ch(444 + j444)z \text{ A/м}^2 \text{ при } z[\text{м}].$$

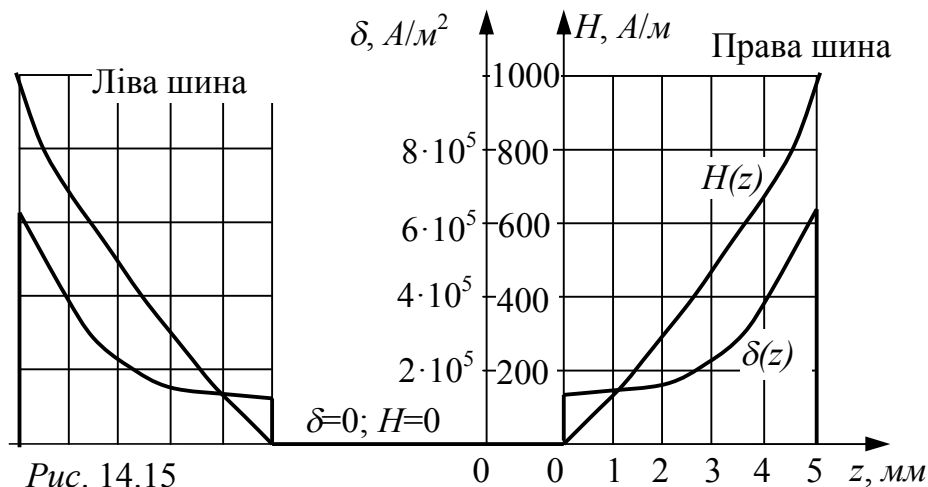
Для побудови графіків залежності модулів \underline{H} і $\underline{\delta}$ у функції координати z доцільно заповнити табл. 14.3. Побудовані за даними табл. 14.3 графіки залежності $H(z)$ і $\delta(z)$ подані на рис. 14.15.

Таблиця 14.3

$Z, \text{ м}$	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
$sh pz$	0	$0,638e^{j41,9^\circ}$	$1,27e^{j46,1^\circ}$	$2,02e^{j48^\circ}$	$3,1e^{j101^\circ}$	$4,6e^{j127,5^\circ}$
$ch pz$	1	$1,02e^{j11,3^\circ}$	$1,18e^{j40,7^\circ}$	$1,79e^{j74,3^\circ}$	$2,96e^{j102,3^\circ}$	$4,8e^{j128^\circ}$
$H, \text{ A/м}$	0	139	277	440	676	1000
$\delta, \text{ A/м}^2$	136000	139200	160400	244000	402000	626000

Густина струму при рівномірному розподілі струму по перерізу шини:

$$\delta = \frac{I}{a \cdot h} = \frac{500}{0,005 \cdot 0,5} = 200000 \text{ A/м}^2.$$



14.2.2 Плоскі хвилі у діелектрику

ЗАДАЧА 14.17. Електромагнітна хвиля поширюється у напрямі координати z у діелектрику з параметрами $\gamma = 0$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 5$. Розміри діелектрика вздовж

осей не обмежені. Миттєве значення напруженості електричного поля в точці $z = 0$

$$E(t) = 0,2 \cdot \sin(10^8 t + 30^\circ) \text{ В/м.}$$

Розрахувати миттєві значення напруженостей електричного і магнітного полів в точці M з координатою $z = 5 \text{ м}$.

Розв'язання

В ідеальному діелектрику $\gamma = 0$, тому струм провідності відсутній. Система рівнянь для плоскої хвилі за умов $\vec{E} = \hat{i} E_x$, $E_y = 0$, $E_z = 0$, $\vec{H} = \hat{j} H_y$, $H_x = 0$, $H_z = 0$, а напруженості залежать тільки від координати z ,

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = j\omega \epsilon \epsilon_0 E, \quad -\frac{\partial E}{\partial z} = j\omega \mu \mu_0 H$$

приводиться до одного рівняння:

$$\text{- або } \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = j\omega \epsilon \epsilon_0 \cdot j\omega \mu \mu_0 E, \quad \text{- або } \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = j\omega \epsilon \epsilon_0 \cdot j\omega \mu \mu_0 H.$$

Коефіцієнт поширення електромагнітних хвиль в ідеальному діелектрику

$$p = j\omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \cdot \mu \mu_0} = j\beta = j \cdot 10^8 \sqrt{5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = j0,746 \text{ м}^{-1};$$

при цьому коефіцієнт згасання $\alpha = 0$, коефіцієнт фази $\beta = 0,746 \text{ м}^{-1}$, фазова швидкість поширення хвилі

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 \cdot 5}} = 1,34 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$\text{довжина хвилі } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,746} = 8,42 \text{ м},$$

хвильовий опір середовища є активним

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{j\omega \mu \mu_0}{j\omega \epsilon \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 168,6 \text{ Ом.}$$

Відзначимо, що для повітря хвильовий опір

$$\underline{Z}_{СП} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} = 120\pi = 377 \text{ Ом.}$$

Узявши за основу хвильове рівняння для \underline{E} , запишемо загальний вид його розв'язання (14.2):

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{-j\beta z} + \underline{A}_2 e^{j\beta z} = \underline{E}_{пр} + \underline{E}_{зв}.$$

Зауважимо, що у разі необмежених розмірів середовища по координатах (перш за все по z , у бік якої поширюється пряма хвиля) відсутня зворотна хвиля ($\underline{E}_{зв} = 0$).

Постійна інтегрування \underline{A}_1 визначається через задане комплексне значення \underline{E} при $z = 0$:

$$\underline{A}_1 = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_E} = \frac{0,2}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 0,1414 e^{j30^\circ} \text{ В/м} = a_1 e^{j\psi_1}.$$

Комплекс прямої хвилі напруженості магнітного поля

$$\underline{H} = \underline{H}_{np} = \frac{\underline{E}_{np}}{\underline{Z}_C} = \frac{a_1 e^{j\psi_1}}{z_C e^{j\varphi_C}} e^{-j\beta z} = \frac{a_1}{z_C} e^{j(\psi_1 - \varphi_C)} e^{-j\beta z} = \frac{0,1414}{168,6} e^{j30^\circ} e^{-j\beta z} = 0,84 \cdot 10^{-3} e^{j30^\circ} e^{-j\beta z} \text{ A/m.}$$

Миттєві значення напруженостей:

$$E(t, z) = \text{Im}(\sqrt{2} \underline{E} e^{j\omega t}) = E_m \sin(\omega t + \psi_E - \beta z) = 0,2 \cdot \sin(10^8 t + 30^\circ - 0,746z) \text{ В/м};$$

$$H(t, z) = H_m \sin(\omega t + \psi_H - \beta z) = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(10^8 t + 30^\circ - 0,746z) \text{ А/м.}$$

Для точки M з координатою $z = 5 \text{ м}$ $\beta z = 0,746 \cdot 5 = 3,73 \text{ рад} = 214^\circ$, миттєві значення напруженостей:

$$E_M(t, z) = 0,2 \cdot \sin(10^8 t - 184^\circ) = -0,2 \sin(10^8 t - 4^\circ) \text{ В/м};$$

$$H_M(t, z) = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(10^8 t - 184^\circ) \text{ А/м} = -1,2 \sin(10^8 t - 4^\circ) \text{ мА/м.}$$

ЗАДАЧА 14.18. Плоска, лінійно поляризована електромагнітна хвиля поширюється по діелектрику з властивостями $\epsilon_1 = 7$, $\mu_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$ у напрямі, перпендикулярному плоскій необмеженій поверхні другого діелектрика з властивостями $\epsilon_2 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\gamma_2 = 0$. Частота гармонійного сигналу $f = 10^9 \text{ Гц}$, амплітуда вектора напруженості електричного поля прямої хвилі $E_{mnp} = 450 \text{ мВ/м}$.

Знайти закони зміни діючих значень H і E в обох середовищах, побудувати їх графіки у функції координат.

Розв'язання

Для розв'язання задачі застосуємо рівняння змінного електромагнітного поля в комплексній формі запису. Врахуємо, що у лінійно поляризованій хвилі вектори \vec{E} і \vec{H} мають постійний напрям у просторі.

Розташуємо осі декартової системи координат так, як показано на

рис. 14.16 (для зручності введемо координату w), де вказані властивості середовищ $(\epsilon_1, \mu_1, \gamma_1)$ і $(\epsilon_2, \mu_2, \gamma_2)$, а також напрями і швидкості хвиль \vec{v}_1 і \vec{v}_2 : для першого середовища швидкості поширення прямих і зворотних хвиль однакові і рівні \vec{v}_1 , в необмеженому другому середовищі поширюється тільки пряма (заломлена) хвиля з швидкістю \vec{v}_2 .

Хай вектор-комплекс напруженості електричного поля $\vec{E} = \dot{i} \underline{E}$, тоді вектор-комплекс напруженості магнітного поля $\vec{H} = \dot{j} \underline{H}$.

Скористаємося розв'язанням хвильових рівнянь для випадку поширення плоских хвиль в ідеальних діелектриках ($\gamma = 0$, через що коефіцієнт згасання $\alpha = 0$): напруженості поля в першому діелектрику визначаються накладанням прямої і зворотної хвиль

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = \underline{E}_{np1} + \underline{E}_{зв1} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{C1}} e^{j\beta_1 w} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{C1}} e^{-j\beta_1 w}, \\ \underline{H}_1 = \underline{H}_{np1} - \underline{H}_{зв1} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{C1}} e^{j\beta_1 w} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{C1}} e^{-j\beta_1 w}, \end{cases}$$

де коефіцієнт фази і характеристичний (або хвильовий) опір першого середовища наступні:

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_0} = 2\pi f \sqrt{\mu_1 \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_0} = 2\pi \cdot 10^9 \sqrt{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 55,4 \text{ м}^{-1};$$

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 142,4 \text{ Ом}.$$

Довжина хвилі в першому середовищі

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = \frac{2\pi}{55,4} = 0,1134 \text{ м} = 11,34 \text{ см}.$$

Напруженості поля у другому середовищі $\underline{E}_2 = \underline{A}_3 e^{-j\beta_2 z}$, $\underline{H}_2 = \frac{\underline{A}_3 e^{-j\beta_2 z}}{\underline{Z}_{C2}}$,

де $\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \mu_0 \varepsilon_2 \varepsilon_0} = 2\pi \cdot 10^9 \sqrt{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 29,61 \text{ м}^{-1}$,

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_0}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 266,4 \text{ Ом},$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = \frac{2\pi}{29,61} = 0,2121 \text{ м} = 21,21 \text{ см}.$$

Виходячи з граничних умов, знайдемо постійні інтегрування \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \underline{A}_3 . Врахуємо задану в умові задачі амплітуду напруженості електричного поля прямої хвилі $E_{mnp} = 450 \text{ мВ/м}$. Прийнемо комплекс цієї напруженості на межі середовищ ($w = 0$) дійсним числом.

$$\text{Тоді } \underline{E}_{np}(w = 0) = \frac{E_{mnp}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = \frac{450}{\sqrt{2}} = 318,3 \text{ мВ} = \underline{A}_1.$$

На межі поділу середовищ ($w = 0$, $z = 0$) рівні тангенціальні складові напруженостей електричного і магнітного полів дотичних середовищ. Тоді на підставі вищенаведених розв'язань

$$\begin{cases} \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}_3, \\ \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_{C2}}. \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему рівнянь, одержуємо

$$\underline{A}_2 = \underline{A}_1 \frac{\underline{Z}_{C2} - \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2}}, \quad \underline{A}_3 = \underline{A}_1 \frac{2\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2}}.$$

$$\text{Відзначимо, що відношення } \frac{\underline{E}_{ze}}{\underline{E}_{np}}(w = 0) = \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} = \frac{\underline{Z}_{C2} - \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2}} = n_6$$

називають *коефіцієнтом відбиття* хвилі від межі поділу середовищ, а відношення

$$\frac{\underline{E}_{зал}}{\underline{E}_{np}}(z = 0) = \frac{\underline{A}_3}{\underline{A}_1} = \frac{2\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2}} = n_{зал} - \text{коефіцієнтом заломлення хвилі}.$$

Числові значення постійних інтегрування

$$\underline{A}_2 = 318,3 \cdot \frac{266,4 - 142,4}{142,4 + 266,4} = 96,6 \text{ мВ/м}, \quad \underline{A}_3 = 318,3 \cdot \frac{2 \cdot 266,4}{142,4 + 266,4} = 414,9 \text{ мВ/м}.$$

Комплекси діючих значень напруженостей першого середовища

$$\begin{aligned}\underline{E}_1(w) &= \underline{A}_1 e^{j\beta_1 w} + \underline{A}_2 e^{-j\beta_1 w} = 318,3 e^{j\beta_1 w} + 96,6 e^{-j\beta_1 w} = \\ &= 318,3 \cos \beta_1 w + 318,3 j \sin \beta_1 w + 96,6 \cos \beta_1 w - 96,6 j \sin \beta_1 w = \\ &= 414,9 \cos \beta_1 w + 221,8 j \sin \beta_1 w \text{ мВ/м},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{H}_1(w) &= \frac{\underline{A}_1 e^{j\beta_1 w}}{\underline{Z}_{C1}} - \frac{\underline{A}_2 e^{-j\beta_1 w}}{\underline{Z}_{C1}} = 2,235 e^{j\beta_1 w} - 0,678 e^{-j\beta_1 w} = \\ &= 1,557 \cos \beta_1 w + 2,913 j \sin \beta_1 w \text{ мА/м}.\end{aligned}$$

Для другого середовища

$$\underline{E}_2(z) = \underline{A}_3 e^{-j\beta_2 z} = 414,9 e^{-j\beta_2 z} \text{ мВ/м}, \quad \underline{H}_2(z) = \frac{\underline{A}_3 e^{-j\beta_2 z}}{\underline{Z}_{C2}} = 1,557 e^{-j\beta_2 z} \text{ мА/м}.$$

Діючі значення напруженостей поля у другому середовищі постійні, не залежать від координати z :

$$E_2 = 414,9 \text{ мВ/м}, \quad H_2 = 1,557 \text{ мА/м}.$$

Для розрахунку діючих значень напруженостей першого середовища зручно коефіцієнт фази β_1 виразити через довжину електромагнітної хвилі:

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}.$$

Тоді комплекси напруженостей

$$\underline{E}_1(w) = 414,9 \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} w + 221,8 j \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} w \text{ мВ/м},$$

$$\underline{H}_1(w) = 1,557 \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} w + 2,913 j \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} w \text{ мА/м}.$$

Результати розрахунку комплексів напруженостей у алгебричній формі та їх діючих значень (модулів) зведемо до табл. 14.4. Графіки діючих значень напруженостей подані один під одним на рис. 14.17, а і б.

Таблиця 14.4

Координата w	0	$\lambda_1/16$	$\lambda_1/8$	$3\lambda_1/16$	$\frac{1}{4}\lambda_1$	$5\lambda_1/16$	$6\lambda_1/16$	$7\lambda_1/16$	$\frac{1}{2}\lambda_1$
$\beta_1 w = \frac{2\pi}{\lambda_1} w$	0°	22,5°	45°	67,5°	90°	112,5°	135°	157,5°	180°
$\underline{E}_1, \text{ мВ/м}$	414,8	383,3+ +j84,9	293,3+ +j157	158,8+ +j205	j221,8	-159+ +j205	-293+ +j157	-383+ +j84,9	-414,8
$E_1, \text{ мВ/м}$	414,8	392,6	332,6	259,2	221,75	259,2	332,6	392,6	414,8
$\underline{H}_1, \text{ мА/м}$	1,557	1,438+ +j1,11	1,1+ +j2,06	0,596+ +j2,69	j2,913	-0,6+ +j2,69	-1,1+ +j2,06	-1,44+ +j1,12	-1,557
$H_1, \text{ мА/м}$	1,557	1,82	2,34	2,76	2,913	2,76	2,34	1,82	1,557

Відзначимо, що в першому середовищі в результаті накладання прямих і зворотних хвиль графіки зміни діючих значень періодично повторюються через кожні півхвилі $\frac{1}{2}\lambda_1$ і є результатом накладання біжучих та стоячих хвиль, а в другому середовищі має місце тільки біжуча хвиля з незмінними діючими значеннями E і H .

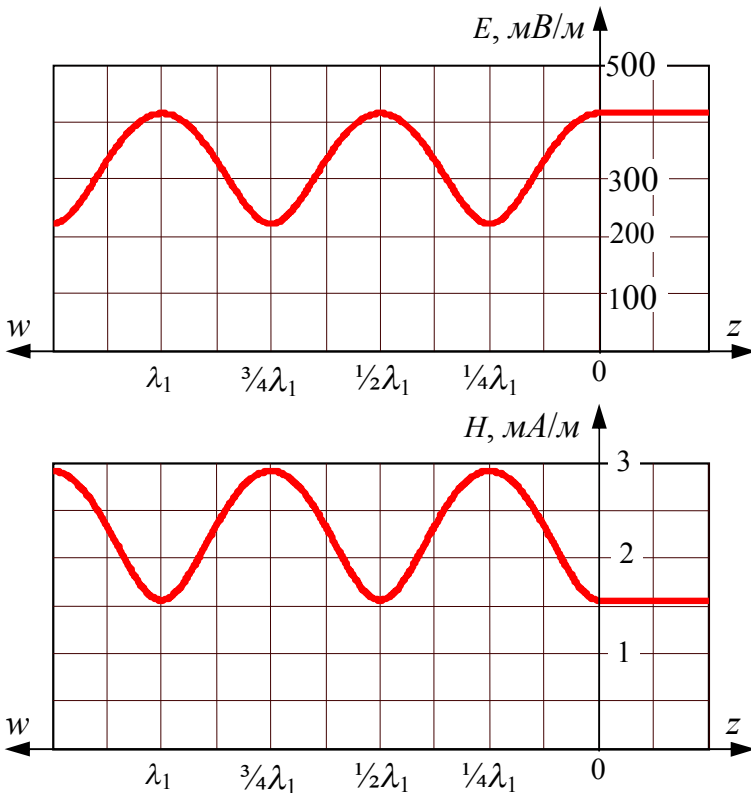


Рис. 14.17

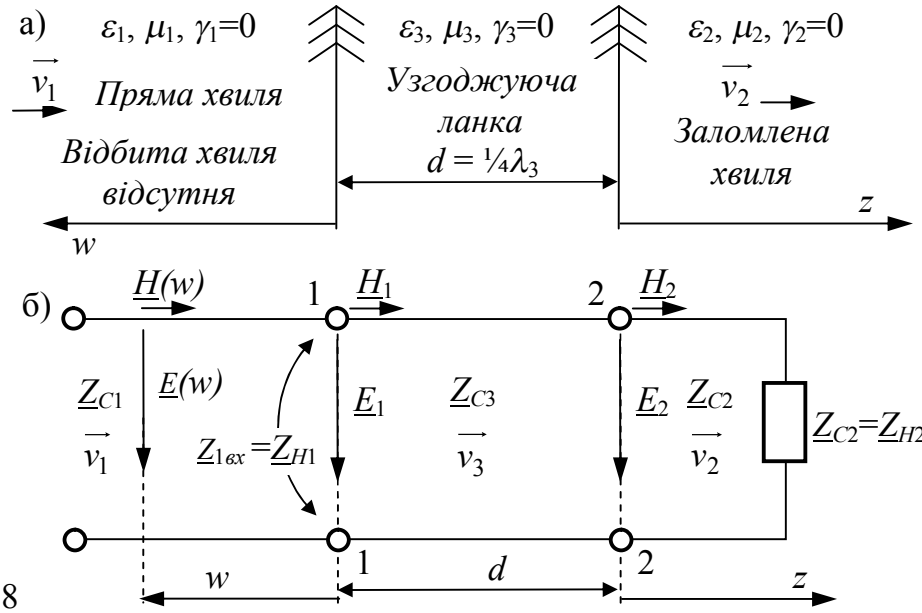


Рис. 14.18

ЗАДАЧА 14.19. В умовах задачі 14.18 знайти технічне рішення для усунення відбитої хвилі від другого діелектрика.

Розв'язання

На рис. 14.18,а представлено технічне рішення для усунення відбитої від другого діелектрика хвилі, а на рис. 14.18,б – розрахункова схема, яка аналогічна аналізу процесів в лініях з розподіленими параметрами без втрат.

Рівняння, що зв'язує напруженості \underline{E} і \underline{H} узгоджуючої ланки, – це основні рівняння відрізка лінії без втрат завдовжки $l = d$:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_3} d + \underline{H}_2 \underline{Z}_{C3} \cdot j \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda_3} d, \quad \underline{H}_1 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{C3}} \cdot j \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda_3} d + \underline{H}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_3} d,$$

де $\lambda_3 = \frac{2\pi}{\beta_3}$, $\beta_3 = \omega \sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_0 \mu_3 \mu_0}$ визначаються параметрами плівки завтовшки d .

Вхідний опір $\underline{Z}_{1\text{ex}}$ (рис. 14.18,б) є навантаженням каналу передачі сигналу, по якому із швидкістю v_1 поширюється пряма хвиля (рис. 14.18,а), а навантаженням \underline{Z}_{H2} узгоджуючої ланки є необмежений за довжиною z канал передачі заломленого сигналу.

На підставі основних рівнянь

$$\underline{Z}_{1\text{ex}} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{H}_1} = \underline{Z}_{C3} \frac{\underline{Z}_{H2} + j \underline{Z}_{C3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_3} d}{\underline{Z}_{H2} j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_3} d + \underline{Z}_{C3}} = \underline{Z}_{H1}.$$

При $d = \frac{1}{4} \lambda_3$ і $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ одержуємо $\underline{Z}_{1\text{ex}} = \frac{\underline{Z}_{C3}^2}{\underline{Z}_{C2}} = \underline{Z}_{H1}$.

Для того, щоб в першому каналі передачі сигналу була відсутня відбита хвиля, необхідно, щоб коефіцієнт відбиття

$$\underline{n}_e = \frac{\underline{Z}_{H1} - \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_{C1}} = 0 \quad \text{і} \quad \underline{Z}_{H1} = \underline{Z}_{C1}.$$

Таким чином, одержуємо перше розрахункове рівняння для визначення параметрів узгоджуючої ланки $\frac{\underline{Z}_{C3}^2}{\underline{Z}_{C2}} = \underline{Z}_{C1}$, а її характеристичний опір

$$\underline{Z}_{C3} = \sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}} = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \mu_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \cdot \frac{\mu_2 \mu_0}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}.$$

В умовах даної задачі $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$. Застосуємо для узгоджуючої ланки немагнітний матеріал, для якого $\mu_3 = 1$, тоді

$$\underline{Z}_{C3} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_3 \mu_0}{\varepsilon_3 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_3}},$$

звідки $\varepsilon_3 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \sqrt{7 \cdot 2} = 3,742$, коефіцієнт фази для узгоджуючої ланки

$$\beta_3 = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_0 \mu_3 \mu_0} = 2\pi \cdot 10^9 \sqrt{3,742 \cdot 1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} = 40,5 \text{ м}^{-1},$$

необхідна товщина плівки $d = \frac{1}{4} \lambda_3 = \frac{2\pi}{4\beta_3} = \frac{2\pi}{4 \cdot 40,5} = 0,0388 \text{ м} = 3,88 \text{ см}$.

ЗАДАЧА 14.20. Плоска електромагнітна хвиля поширюється по діелектрику з властивостями $\varepsilon_1 = 4$, $\mu_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$ у напрямі, перпендикулярному плоскій необмеженій поверхні ідеально провідного середовища з властивостями $\varepsilon_2 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\gamma_2 = \infty$.

Діюче значення напруженості магнітного поля прямої хвилі $H_{np} = 3,5 \text{ мА/м}$, частота сигналу $f = 10^9 \text{ Гц}$.

Знайти миттєві і діючі значення напруженостей поля в обох середовищах, побудувати графіки їх діючих значень у функції координат.

Вирішити задачу про усунення відбиття сигналу від межі поділу середовищ, розрахувати параметри пристрою, що виключає відбиття сигналу заданої частоти.

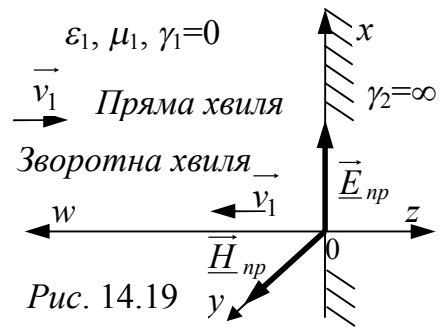


Рис. 14.19

Розв'язання

Розташуємо осі декартової системи координат на межі поділу середовищ (рис. 14.19).

Для плоскої лінійно поляризованої хвилі, що поширюється у першому діелектрику у напрямі до межі поділу середовищ

$$\vec{E}_{np} = \vec{i} E_{np}, \quad \vec{H}_{np} = \vec{j} H_{np}.$$

Після накладання відбитих хвиль розв'язання хвильових рівнянь приймає вигляд:

$$\begin{cases} \underline{E}(w) = \underline{E}_{np} + \underline{E}_{zv} = \underline{A}_1 e^{j\beta_1 w} + \underline{A}_2 e^{-j\beta_1 w}, \\ \underline{H}(w) = \underline{H}_{np} - \underline{H}_{zv} = \frac{\underline{A}_1 e^{j\beta_1 w}}{\underline{Z}_{C1}} - \frac{\underline{A}_2 e^{-j\beta_1 w}}{\underline{Z}_{C1}}, \end{cases}$$

де: $\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \mu_0 \epsilon_1 \epsilon_0} = 2\pi \cdot 10^9 \sqrt{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 41,86 \text{ м}^{-1}$;

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 188,4 \text{ Ом}.$$

$$\text{Довжина хвилі у діелектрику} \quad \lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = \frac{2\pi}{41,86} = 0,15 \text{ м} = 15 \text{ см}.$$

Коефіцієнт відбиття на межі діелектриків – ідеально провідне середовище ($\gamma_2 = \infty$) при координаті $w = 0$ $n_s = -1$, оскільки при будь-якій густині струму в провідному середовищі напруженість поля $E_2 = \frac{\delta_2}{\gamma_2} = 0$, а з гра-

ничних умов виходить, що $E_1(w=0) = E_2(z=0)$.

Тоді $\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = 0$ і $\underline{A}_2 = n_s \cdot \underline{A}_1 = -\underline{A}_1$.

За умовами задачі відоме діюче значення напруженості магнітного поля прямої хвилі $H_{np} = 3,5 \text{ мА/м}$. Прийmemo комплекс цієї напруженості на межі ($w = 0$) дійсним числом

$$\underline{H}_{np}(w=0) = 3,5 \text{ мА/м}.$$

Комплекс напруженості електричного поля на межі

$$\underline{E}_{np}(w=0) = \underline{H}_{np}(w=0) \cdot \underline{Z}_{C1} = 3,5 \cdot 188,4 = 659,4 \text{ мВ/м}.$$

Таким чином, $\underline{A}_1 = -\underline{A}_2 = 659,4 \text{ мВ/м}$.

Комплекси напруженостей для першого середовища

$$\underline{E}(w) = 659,4 e^{j\beta_1 w} - 659,4 e^{-j\beta_1 w} = 1319j \sin \beta_1 w \text{ мВ/м},$$

$$\underline{H}(w) = 3,5 e^{j\beta_1 w} + 3,5 e^{-j\beta_1 w} = 7 \cos \beta_1 w \text{ мА/м}.$$

Виразимо коефіцієнт фази через довжину хвилі і здобудемо діючі значення напруженостей:

$$E(w) = 1319 \left| \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} w \right| \text{ мВ/м}, \quad H(w) = 7 \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} w \right| \text{ мА/м}.$$

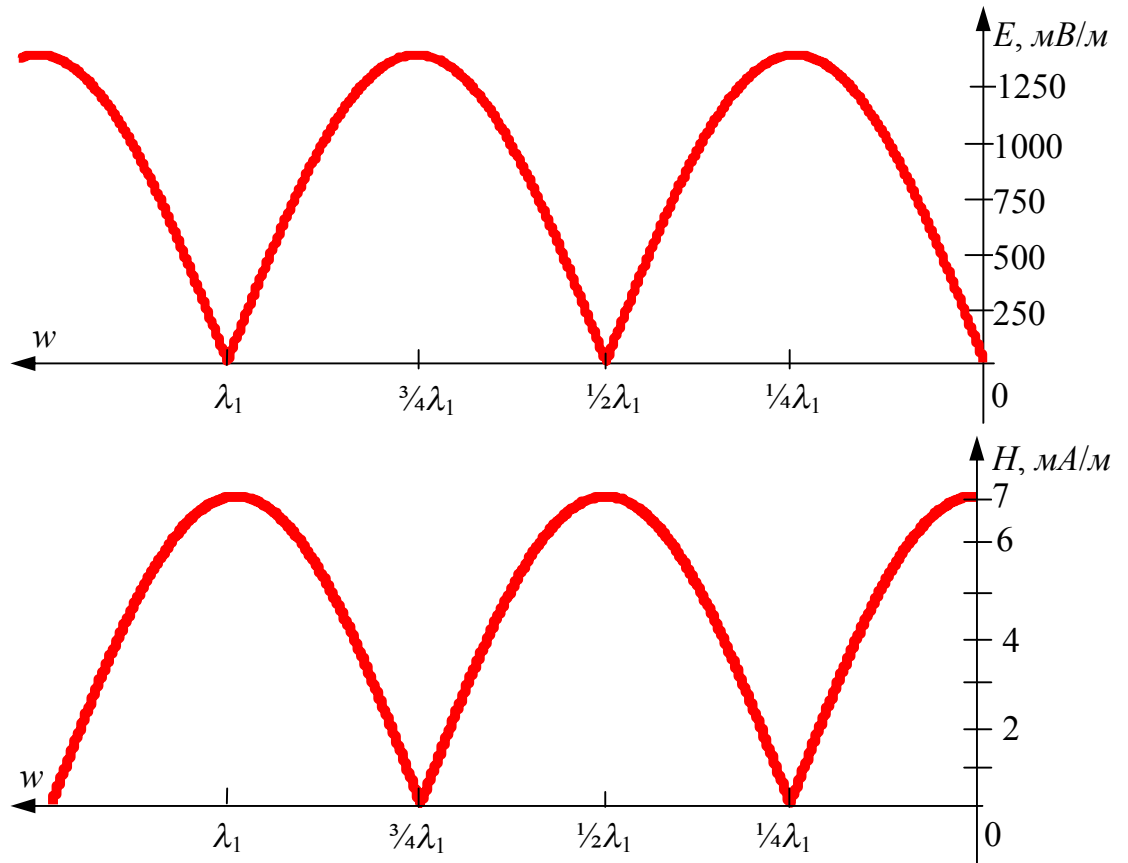


Рис. 14.20

Графіки діючих значень напруженостей наведені на рис. 14.20. Графіки визначаються стоячими хвилями, які встановлюються в діелектрику в результаті повного відбиття ($n_g = -1$) хвилі від добре провідного середовища. Миттєві значення напруженостей

$$\begin{aligned} E(t, w) &= \text{Im}(\sqrt{2} \underline{E}(w) e^{j\omega t}) = 659,4 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_1 w) - 659,4 \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta_1 w) = \\ &= 1319 \sqrt{2} \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} w \text{ мВ/м}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t, w) &= \text{Im}(\sqrt{2} \underline{H}(w) e^{j\omega t}) = 3,5 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_1 w) + 3,5 \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta_1 w) = \\ &= 7 \sqrt{2} \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} w \text{ мА/м}. \end{aligned}$$

Для усунення відбиття від ідеально провідного середовища ($\gamma_2 = \infty$) застосуємо схему з тонкою провідною пластинкою завтовшки d_4 і провідністю γ_4 , уміщеної на відстані d_3 від добре провідної поверхні. Простір між провідною пластинкою і добре провідною поверхнею заповнимо плоским необмеженим (по x і y) діелектриком з властивостями ϵ_3 , μ_3 , $\gamma_3 = 0$.

Ця схема усунення відбитого сигналу подана на рис. 14.21,а, а розрахункова схема, яка відповідає лініям з розподіленими параметрами, наведена на рис. 14.21,б. Плівка діелектрика $\epsilon_3, \mu_3, \gamma_3 = 0$ завтовшки $d_3 = \lambda_3/4$ виконує роль чвертьхвильового трансформатора. В результаті опір навантаження каналу передачі енергії

$$\underline{Z}_{3\text{ex}} = Z_{C3} \frac{\underline{Z}_{H3} + Z_{C3} j \operatorname{tg} \beta_3 d_3}{\underline{Z}_{H3} j \operatorname{tg} \beta_3 d_3 + Z_{C3}} = \infty,$$

оскільки $\underline{Z}_{H3} = \underline{Z}_{K3} = 0$, а $\operatorname{tg} \beta_3 d_3 = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3}{4} = \infty$.

Таким чином, хвиля в діелектрик 3 не поступає.

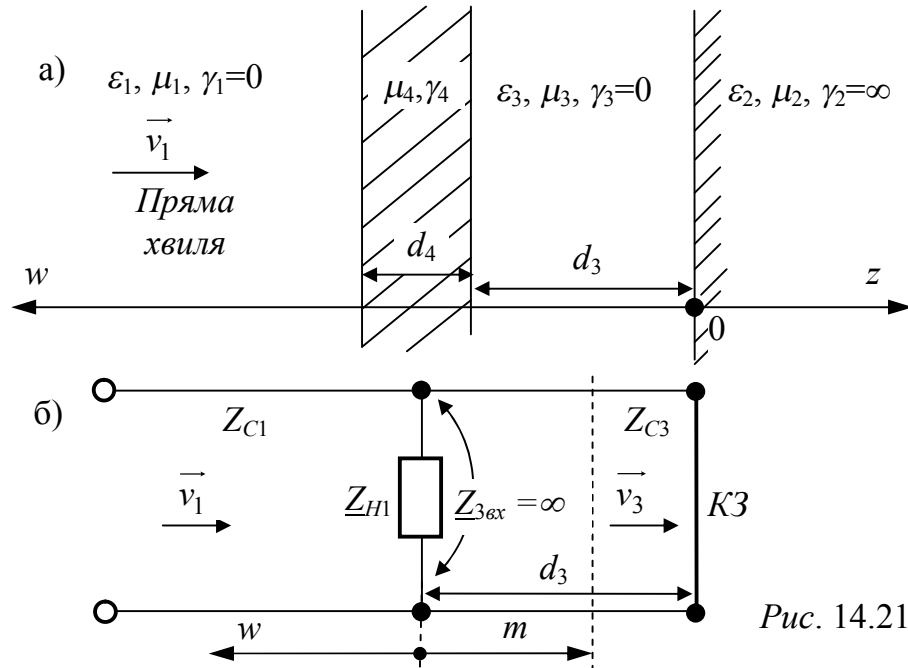


Рис. 14.21

Тепер за відсутності відбиття вся енергія прямої хвилі, що визначається потоком вектора Пойнтінга через поперечний переріз S , паралельний площині межі поділу середовищ,

$$P_{np} = \operatorname{Im}[\underline{E}_{np} \cdot \underline{H}_{np}^* \cdot S] = \frac{E_{np}^2}{Z_{C1}} S,$$

повинна проникати в екрануючу пластину завтовшки d_4 і розсіюватися в ній у вигляді тепла

$$P_T = \gamma_4 E_4^2 V = \gamma_4 E_4^2 S d_4$$

за умови, що по всьому об'єму провідної пластини напруженість електричного поля однакова.

Прирівнявши $P_{np} = P_T$, отримаємо шукану товщину провідної пластини d_4 з урахуванням того, що на межі першого діелектрика і цієї пластини рівні тангенціальні складові напруженостей $E_4 = E_{np}$:

$$d_4 = \frac{1}{\gamma_4 Z_{C1}}.$$

Для екранування можна використовувати будь-який метал, наприклад, такий, для якого $\mu_4 = 1$, $\gamma_4 = 0,8 \cdot 10^7$ См/м.

$$\text{Тоді} \quad d_4 = \frac{1}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 188,4} = 6,635 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \text{Коефіцієнт поширення хвилі в цьому металі} \\ p_4 = \sqrt{j\omega\mu_4\mu_0\gamma_4} = \sqrt{2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 10^7} \cdot e^{j45^\circ} = \\ = 2,51 \cdot 10^5 \cdot e^{j45^\circ} = (1,777 + j1,777) \cdot 10^5 \text{ м}^{-1} = \alpha_4 + j\beta_4. \end{aligned}$$

Глибина проникнення хвилі в це провідне середовище

$$\Delta_4 = \frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{1,777 \cdot 10^5} = 0,563 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Порівняємо її з товщиною екрануючої пластини

$$\frac{d_4}{\Delta_4} = \frac{6,635 \cdot 10^{-10}}{0,563 \cdot 10^{-5}} = 11,8 \cdot 10^{-5} \text{ разів.}$$

В цьому випадку $e^{-\alpha_4 d_4} \approx 1$ і по всій товщині d_4 пластини $E_4 \approx \text{const}$, тобто доведена умова, з якої розрахована товщина екрануючої пластини. Діелектрик може бути застосований будь-який. Якщо застосувати твердий діелектрик з немагнітного матеріалу такого ж, як перший, тоді $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = 4$, $\mu_3 = \mu_1 = 1$, $\beta_3 = \beta_1 = 41,86 \text{ м}^{-1}$, $\lambda_3 = \lambda_1 = 15 \text{ см}$, а товщина плівки

$$d_3 = \frac{\lambda_3}{4} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 14.21. Для зменшення відбиття світла від поверхні лінз оптичних приладів їх покривають шаром лака («просвітлена оптика»). Дію цього шару можна уподібнити чвертьхвильовому трансформатору, що узгоджує вхідний опір скла (рівний його хвильовому опору) і хвильовий опір повітря.

Знайти товщину шару лака і його відносну діелектричну проникність, якщо відносна діелектрична проникність скла дорівнює 7.

Розрахунок провести для середньої довжини хвилі видимої частини спектру 0,6 мкм.

Відповідь: 92,5 нм; 2,64.

ЗАДАЧА 14.22. Для зменшення відбиття плоскої лінійно поляризованої хвилі від ідеально провідної поверхні застосували двошарове покриття. Перший шар, прилеглий до провідної поверхні – діелектрик з відносною діелектричною проникністю 2,25, другий шар – провідник з питомою провідністю 10^3 См/см.

Визначити товщину діелектрика і провідника, якщо потрібно отримати покриття, що не відбиває при частоті 3 ГГц.

Відповідь: 1,67 см; $2,65 \cdot 10^{-3}$ см.