11 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

11.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Електростатичне поле є окремим випадком електромагнітного, воно створюється в діелектрику нерухомими в просторі і незмінними в часі зарядами. Розрізняють:

- лінійний заряд: $\tau = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\sum q}{l} = \frac{dq}{dl}$;
- поверхневий заряд: $\sigma = \lim\limits_{S \to 0} \frac{\sum q}{S} = \frac{dq}{dS}$;
- об'ємний заряд: $\rho = \lim\limits_{V \to 0} \frac{\sum q}{V} = \frac{dq}{dV}$.

Основними величинами, що характеризують це поле, є напруженість і потенціал. Якщо в електростатичне поле помістити настільки малий *пробний* заряд, який своєю присутністю не спотворить поле, то на нього діятиме сила $\vec{F}$, відношення якої до величини заряду і дає *напруженість поля* $\vec{E} = \lim\limits_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$. Розмірність напруженості $[E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{Дж}{м \cdot Кл} = \frac{В \cdot А \cdot с}{м \cdot А \cdot с} = \frac{В}{м}$.

Електростатичне поле є *потенціальним* у всьому об'ємі. Записується це наступним чином: $rot\,\vec{E} = 0$, $\oint\limits_L \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$.

Для характеристики електростатичного поля застосовується *скалярний електричний потенціал* φ:

$$\vec{E} = -\,grad\varphi = -\,\nabla\varphi. \qquad (11.1)$$

Діелектричні тіла в електростатичному полі можуть поляризуватися, тобто може відбуватися впорядкована зміна розташування *зв'язаних зарядів* під дією сил поля. Ступінь поляризації характеризується *вектором поляризації*, який для більшості діелектриків пропорційний напруженості поля: $\vec{P} = \varepsilon_0 k_E \vec{E}$. Тут k_E – *електрична сприйнятливість.*

В теорії поля під час розрахунків застосовують ще *вектор електричного зміщення (електричної індукції)*:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 k_E \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}(1 + k_E) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E},$$

де: $\varepsilon = 1 + k_E$ – *відносна діелектрична проникність* середовища;

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ – *абсолютна діелектрична проникність* середовища.

Теорема Гауса є основним законом електростатичного поля. Її інтегральна і диференціальна форми запису:

$$\oint\limits_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \sum q, \qquad div\,\vec{D} = \rho.$$

З теореми Гауса і співвідношення (11.1) витікають **рівняння Пуассона** і **Лапласа**. Рівняння Пуассона: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$. Окремий вид рівняння Пуассона за умови $\rho = 0$ називається рівнянням Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$.

Розв'язання рівнянь Пуассона і Лапласа дозволяє визначити закон зміни потенціалу, якщо відомий розподіл зарядів. Під час розв'язання цих рівнянь виникають постійні інтегрування, які визначаються за допомогою граничних умов.

Граничні умови:

– межа діелектрик-провідник: у точках діелектрика у безпосередній близькості до поверхні провідника тангенціальна складова напруженості поля дорівнює нулеві ($E_t = 0$), а вектор електричного зміщення чисельно дорівнює поверхневій густині індукованого заряду ($D = \sigma$);

– межа діелектрик-діелектрик: для всіх точок, що є спільними для двох різних діелектриків, тангенціальні складові вектора напруженості ($E_{1t} = E_{2t}$) і нормальні складові вектора електричного зміщення ($D_{1n} = D_{2n}$) однакові за величиною.

Під час розрахунку електростатичних полів в однорідних середовищах за наявності декількох зарядів доцільним є застосування **принципу накладання**. При цьому знайдені від окремих зарядів величини підсумовуються: скалярні – алгебрично ($\varphi = \Sigma \pm \varphi_q$, $U = \Sigma \pm U_q$ і т.д.), векторні – векторно ($\vec{E} = \Sigma \overrightarrow{E_q}$, $\vec{D} = \Sigma \overrightarrow{D_q}$, $\vec{F} = \Sigma \overrightarrow{F_q}$).

Під час розрахунку полів, де є межа поділу різних середовищ геометрично правильної форми, застосовується **метод дзеркальних зображень**, який полягає в тому, що вплив межі враховується введенням фіктивних зарядів, розташованих симетрично реальним выдносно межі. Величина фіктивних зарядів визначається за допомогою *коефіцієнтів неповного віддзеркалення* (коефіцієнтів фіктивних зарядів), які у разі плоскої межі діелектрик-діелектрик обчислюються за формулами

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad k_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Електричні ємності розраховуються для пристроїв, в яких електростатичні поля не мають зон з об'ємно розподіленим зарядом. Під ємністю C між двома тілами, на яких є рівні і протилежні за знаком заряди, розуміють абсолютну величину відношення заряду на одному з тіл до напруги між тілами:

$$C = q/U.$$

Енергія електростатичного поля може бути визначена за її об'ємною густиною $w_E = ½DE = ½\varepsilon\varepsilon_0 \cdot E^2 = D^2/(2\varepsilon\varepsilon_0)$.

Енергія поля в об'ємі V $W_E = \int\limits_V w_E dV$.

Силу, що діє з боку поля на тіло, зміна положення якого впливає на енергію поля, можна визначати через похідну від енергії: $\vec{F} = -gradW_E$. Сила у деякому напрямі x: $F_x = -\dfrac{\partial W_E}{\partial x}$.

Для **системи провідників** з радіусами r_k, розташованих поблизу провідної поверхні, застосовують *формули Максвела*.

I група формул Максвела: $\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \ldots + \alpha_{1n}\tau_n,$

$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 + \ldots + \alpha_{2n}\tau_n,$

- -

$\varphi_n = \alpha_{n1}\tau_1 + \alpha_{n2}\tau_2 + \alpha_{n3}\tau_3 + \ldots + \alpha_{nn}\tau_n.$

В цих рівняннях φ_k і τ_k – потенціал і заряд k-ого провідника, *потенціальні коефіцієнти* α обчислюються за формулами

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} ln\frac{2h_k}{r_k}, \quad \alpha_{km} = \alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} ln\frac{b_{km}}{a_{km}},$$

де h_k – висота підвісу проводу k, a_{km} – відстань між проводами k і m, b_{km} – відстань між проводом k і зображенням проводу m.

Коефіцієнти α_{kk} і α_{km}, які залежать від геометричних розмірів тіл, їх взаємного розташування і властивостей середовища ε_a, в якому вони знаходяться, мають розмірність *[м/Ф]* і є позитивними.

ІІ група формул Максвела: $\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \ldots + \beta_{1n}\varphi_n,$

$\tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \ldots + \beta_{2n}\varphi_n,$

- -

$\tau_n = \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \beta_{n3}\varphi_3 + \ldots + \beta_{nn}\varphi_n.$

В цих рівняннях $\beta_{km} = \dfrac{\Delta_{km}}{\Delta}$ – ємнісні коефіцієнти,

тут Δ – визначник системи І групи формул Максвела,

Δ_{km} – алгебричне доповнення.

Розмірність ємнісних коефіцієнтів *[Ф/м]*.

ІІІ група формул Максвела: $\tau_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \ldots + C_{1n}U_{1n},$

$\tau_2 = C_{21}U_{21} + C_{22}\varphi_2 + C_{23}U_{23} + \ldots + C_{2n}U_{2n},$

- -

$\tau_n = C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + C_{n3}U_{n3} + \ldots + C_{nn}\varphi_n,$

де U_{km} – напруга між проводами k і m.

Коефіцієнти C у цих рівняннях називаються *частковими ємностями*:

$C_{kk} = \sum\limits_{m=1}^{n}\beta_{km} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn}$ – власна часткова ємність,

$C_{km} = -\beta_{km}$ – взаємна часткова ємність k-го і m-го провідників.

Часткові ємності є позитивними і їх розмірність *[Ф/м]*.

11.2 РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

ЗАДАЧА 11.1. Вивести формули для визначення потоку вектора електростатичної індукції у функції координат а) від точкового заряду через сферичну поверхню радіусу R; б) від лінійного заряду через циліндричну поверхню радіусу r.

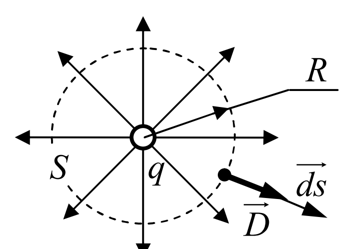


Рис. 11.1

Розв’язання

Для випадку а) проведемо навкруги точкового заряду q сферичну поверхню S радіусу R (рис. 11.1) і застосуємо теорему Гауса в інтегральній формі: $\oint\limits_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \Sigma q$. З визначення напруженості поля витікає, що силові лінії направлені радіально, отже, перпендикулярно до поверхні S. Таким чином, вектори $\vec{D}$ і $\vec{ds}$ за напрямом співпадають, їх скалярний добуток можна замінити добутком модулів. Крім того, значення вектора $\vec{D}$ у всіх рівновіддалених від заряду q точках поверхні S однаково через симетрію; тому його можна винести за знак інтеграла. Таким чином, одержуємо:

$$\oint\limits_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \oint\limits_S D\cdot ds = D\cdot\oint\limits_S ds = D\cdot S = D\cdot 4\pi\cdot R^2. \qquad (11.2)$$

Наслідок: індукція і напруженість поля точкового заряду залежать тільки від координати R:

$$D = \frac{q}{4\pi R^2}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a R^2}. \qquad (11.3)$$

Аналогічно поступимо у випадку б): проведемо навкруги осі з лінійним зарядом τ циліндричну поверхню S радіусу r, завдовжки l і застосуємо теорему Гауса в інтегральній формі: $\oint\limits_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \Sigma q$. Як ілюстрацією, можна знову скористатися рис. 11.1, але після заміни q на τ і R на r, причому вісь z направлена перпендикулярно до площини рисунку. Припустимо, що довжина об'єкту значно більше його радіусу. Тоді можна знехтувати спотворенням плоскопаралельного поля поблизу торців циліндра S і вважати, що силові лінії направлені скрізь радіально. У цьому випадку потік вектора $\vec{D}$ через торцеві частини буде рівний нулю, оскільки тут кут між $\vec{D}$ і $\vec{ds}$ складає 90°. У всіх же точках бічної частини вектори $\vec{D}$ і $\vec{ds}$ за напрямом співпадають, їх скалярний добуток можна замінити добутком модулів. Крім того, значення вектора $\vec{D}$ у всіх рівновіддалених від осі z точках бічної частини поверхні S однаково через симетрію; тому його можна винести за знак інтеграла. Таким чином, одержуємо:

$$\oint\limits_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int\limits_{S_{бок}} D\cdot ds = D\cdot S_{бок} = D\cdot 2\pi\cdot r\cdot l. \qquad (11.4)$$

Наслідок: індукція і напруженість поля зарядженої осі залежать тільки від координати r:

$$D = \frac{q}{2\pi rl} = \frac{\tau}{2\pi r}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r}. \qquad (11.5)$$

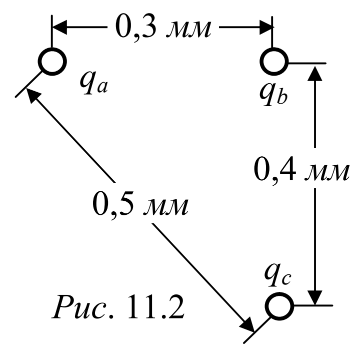


Рис. 11.2

ЗАДАЧА 11.2. Визначити напруженість поля, створеного двома зарядами в місці розташування третього, і силу, яка діє на третій заряд, в системі точкових зарядів, поданій на рис. 11.2, де

$$q_a = 4\cdot 10^{-12}\ Кл, \quad q_b = 15\cdot 10^{-12}\ Кл, \quad q_c = 15\cdot 10^{-12}\ Кл.$$

Розв'язання

Формула для напруженості електростатичного поля, створеного окремим точковим зарядом у вакуумі, відповідно до формули (11.3) має вигляд:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Тоді значення напруженостей, що створюються у точці c зарядами q_a і q_b (рис. 11.3) будуть, відповідно:

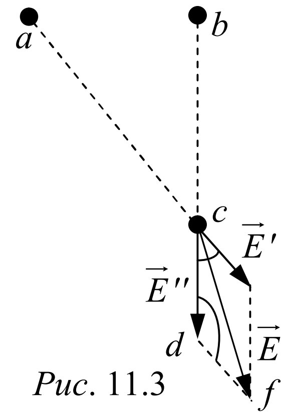


Рис. 11.3

$$E' = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0\,|ac|^2} = \frac{4\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}(0{,}5\cdot 10^{-3})^2} =$$

$$= 143{,}9\cdot 10^3\ В/м = 143{,}9\ кВ/м.$$

$$E'' = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0\,|bc|^2} = \frac{15\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}(0{,}4\cdot 10^{-3})^2} = 843{,}0\cdot 10^3\ В/м = 843{,}0\ кВ/м.$$

Визначимо кут при вершині c трикутника abc:

$cos(\angle acb) = bc/ac = 0{,}4/0{,}5 = 0{,}8$; $\quad \angle acb = arccos\ 0{,}8 = 36{,}9°$.

Тоді кут при вершині d трикутника cdf: $\quad \angle cdf = 180° – 36{,}9° = 143{,}1°$.

Відповідно до принципу накладання повний вектор шуканої напруженості $\vec{E}$ дорівнює векторній сумі $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ (рис. 11.3). За теоремою косинусів знаходимо

$$E = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2 - 2\cdot E'\cdot E''\cdot cos(\angle cdf)} =$$

$$= \sqrt{143{,}9^2 + 843{,}0^2 - 2\cdot 143{,}9\cdot 843{,}0\cdot cos(143{,}1\ )} = 962\ кВ/м.$$

Сила, що діє на заряд q_c, у відповідності до визначення напруженості електростатичного поля дорівнює:

$$F = q_c\cdot E = 15\cdot 10^{-12}\cdot 962\cdot 10^3 = 14{,}4\cdot 10^{-6}\ Н.$$

ЗАДАЧА 11.3. Дві кулі з радіусами $R_1 = 0{,}2\ см$ і $R_2 = 0{,}5\ см$ знаходяться на відстані $d = 20\ см$ одна від одної в діелектрику з відносною проникністю $\varepsilon = 4$ (рис. 11.4). Заряди куль різного знаку, а за величиною $q = 10^{-10}\ Кл$. Визначити енергію поля і найбільшу його напруженість.

Розв’язання

Відстань d значно перевищує радіуси куль, тому можна вважати, що геометричні і електричні центри куль співпадають.

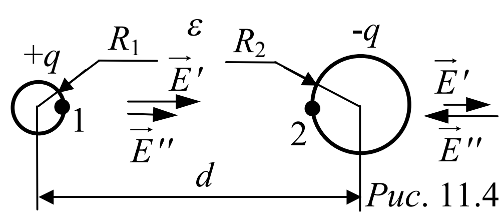


Рис. 11.4

Між кулями напруженості $\vec{E}'$ і $\vec{E}''$ додаються, а зовні – віднімаються (рис. 11.4). Тому значення напруженості спільного поля більше між кулями. З віддаленням від центру кулі напруженість поля зменшується, отже, максимальне значення напруженості потрібно очікувати у точці на поверхні кулі. Перша куля має менший радіус, тому найбільша напруженість поля буде в точці 1. Для розрахунку поля в цій точці застосуємо принцип накладання. На підставі формули (11.3)

$$E_1 = E_1' + E_1'' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 4}\left(\frac{1}{(2\cdot 10^{-3})^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right) =$$

$$= 56141\ В/м.$$

Потенціал поля поодинокої кулі (аналогічно задачі 11.5, формула 11.8):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a R} + A.$$

Якщо прийняти $\varphi = 0$ при $R = \infty$, то $A = 0$. Таким чином, потенціали куль становлять

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_1'' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d} = \frac{10^{-10}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 4}\left(\frac{1}{2\cdot 10^{-3}} + \frac{-1}{0{,}2}\right) = 111{,}1\ В;$$

$$\varphi_2 = \varphi_2' + \varphi_2'' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2} = \frac{10^{-10}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 4}\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{-1}{0{,}005}\right) = -43{,}8\ В.$$

Напруга між кулями $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 111{,}1 + 43{,}8 = 154{,}9\ В$.
Ємність пристрою $C = q/U_{12} = 10^{-10}/154{,}9 = 0{,}645\cdot 10^{-12}\ Ф$.
Енергія поля $W_E = ½CU_{12}^2 = ½\cdot 0{,}645\cdot 10^{-12}\cdot 154{,}9^2 = 7{,}75\cdot 10^{-9}\ Дж$.

ЗАДАЧА 11.4. Вивести формули для розрахунку поля і ємності плоского конденсатора, у якого S – площа пластин, d – відстань між ними (рис. 11.5).

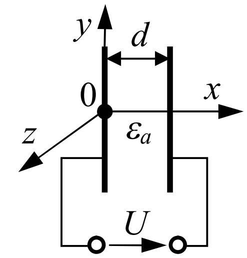


Рис. 11.5

Розв'язання

Площа пластин S зазвичай значно більше квадрата відстані d^2 між ними. Тому поле між пластинами може вважатися рівномірним. Хай заряд лівої обкладинки конденсатора має заряд q. Величина вектора електростатичної індукції на підставі граничної умови $D = \sigma = q/S$. Напруженість електричного поля $E = D/\varepsilon_a = q/(S\cdot\varepsilon_a)$. Прикладена напруга $U = E\cdot d = q\cdot d/(S\cdot\varepsilon_a)$. Ємність конденсатора

$$C = q/U = \varepsilon_a\cdot S/d. \quad (11.6)$$

Розташуємо осі декартової системи координат, як показано на рис. 11.5. Хай початок координат суміщений з лівою пластиною. Отримаємо формулу для потенціалу $\varphi(x)$ на підставі співвідношення (11.1) $\vec{E} = -\,grad\,\varphi$. В декартовій системі координат $grad\,\varphi$ представляється як

$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \quad \text{(див. табл. Д1).}$$

Очевидно, що потенціал φ залежить тільки від однієї координати x, тобто $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$; вектор $\vec{E}$ направлений уздовж осі x, тому для його величини маємо: $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Звідси $\varphi = -\int E dx = -E\cdot x + const.$ (11.7)

Якщо конденсатор має декілька шарів ізоляції, то ємність кожного шару – $C_k = \varepsilon_{ak}\cdot S/d_k$, ємність всього конденсатора зважаючи на послідовне з'єднання ємностей шарів $C = (\Sigma(C_k)^{-1})^{-1}$; напруга на кожному шарі – $U_k = q/C_k$;

напруженість поля в кожному шарі – $E_k = U_k/d_k = q/(S\cdot\varepsilon_{ak})$.

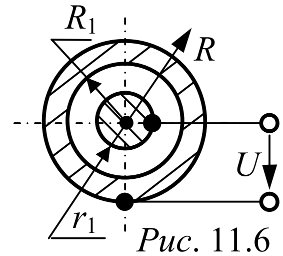


Рис. 11.6

ЗАДАЧА 11.5. Отримати формули для розрахунку поля і ємності кульового конденсатора, у якого внутрішній і зовнішній радіуси діелектричного шару – r_1 і R_1, діелектрична проникність – ε_a (рис. 11.6).

Розв'язання

Хай внутрішня куля має заряд q. На підставі формули (11.3) електричне зміщення і напруженість поля в діелектрику

$$D = q/(4\pi\cdot R^2);\qquad E = q/(4\pi\varepsilon_a\cdot R^2).$$

Формулу для потенціалу $\varphi(R)$ отримаємо на підставі співвідношення (11.1). В сферичній системі координат $grad\ \varphi$ визначається як

$$grad\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{R_0} + \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{\theta_0} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha_0}\quad \text{(див. табл. Д1).}$$

Очевидно, що в даному випадку потенціал φ залежить тільки від однієї координати R, тобто $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$; вектор $\vec{E}$ направлений уздовж осі R, тому для його величини маємо: $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}$. Звідси

$$\varphi = -\int E dR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a R} + A. \qquad (11.8)$$

Хай потенціал зовнішньої кулі дорівнює нулю – $\varphi = 0$ за умови $R = R_1$. Тоді $A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_a R_1}$. Формула для потенціалу $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\cdot\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$.

Напруга, прикладена до конденсатора,

$$U = \varphi(R{=}r_1) - \varphi(R{=}R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Ємність одношарового конденсатора $C = q/U = \frac{4\pi\varepsilon_a}{1/r_1 - 1/R_1}$. (11.9)

Якщо конденсатор має декілька шарів, то ємність кожного шару – $C_k = \frac{4\pi\varepsilon_{ak}}{1/r_k - 1/R_k}$, ємність всього конденсатора $C = (\Sigma(C_k)^{-1})^{-1}$; напруга і напруженість поля для кожного шару – $U_k = q/C_k$; $E_k = q/(4\pi\varepsilon_{ak}\cdot R^2)$.

ЗАДАЧА 11.6. До кульового конденсатора (рис. 11.6) прикладена постійна напруга $U = 6000$ *В*. Геометричні розміри $r_1 = 5$ *см*, $R_1 = 10$ *см*. Діелектрична проникність ізоляції $\varepsilon = 4$. Визначити ємність конденсатора, побудувати графіки $E(R)$, $\varphi(R)$. Знайти енергію, що запасена у діелектрику.

Розв'язання

Скористаємося формулами, отриманими при розв'язанні задачі 11.5. Ємність конденсатора

$$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 R_1}{R_1-r_1}=44{,}48\ n\Phi.$$

Заряд конденсатора $q=CU=26{,}69\cdot10^{-8}\ Кл.$

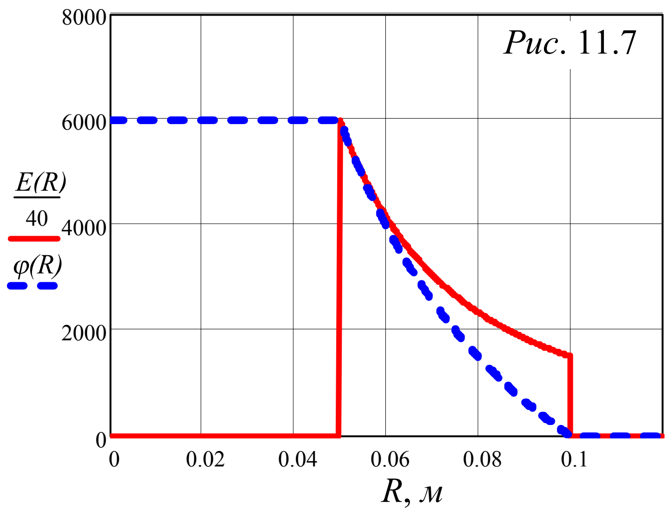
Енергія зарядженого конденсатора $W=½CU^2=0{,}8\ мДж.$

Напруженість і потенціал у функції координати $R\ [м]$:

$$E(R)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}=\frac{600}{R^2}\ В/м,\quad \varphi(R)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}+A.$$

Вважаючи, що $\varphi=0$ за умови $R=R_1$, отримаємо $\varphi(R)=\dfrac{600}{R}-6000\ В.$

Графіки $E(R)$ і $\varphi(R)$ подані на рис. 11.7.



ЗАДАЧА 11.7. Сферичний конденсатор має два шари ізоляції (рис. 11.8,а): $R_1=5\ см$, $R_2=8\ см$, $R_3=10\ см$, $R_4=10{,}5\ см$, $\varepsilon_1=6$, $\varepsilon_2=2$. Конденсатор увімкнений до джерела постійної напруги $U=36\ кВ$. Визначити ємність конденсатора, побудувати графік $E(R)$. Знайти напругу кожного шару.

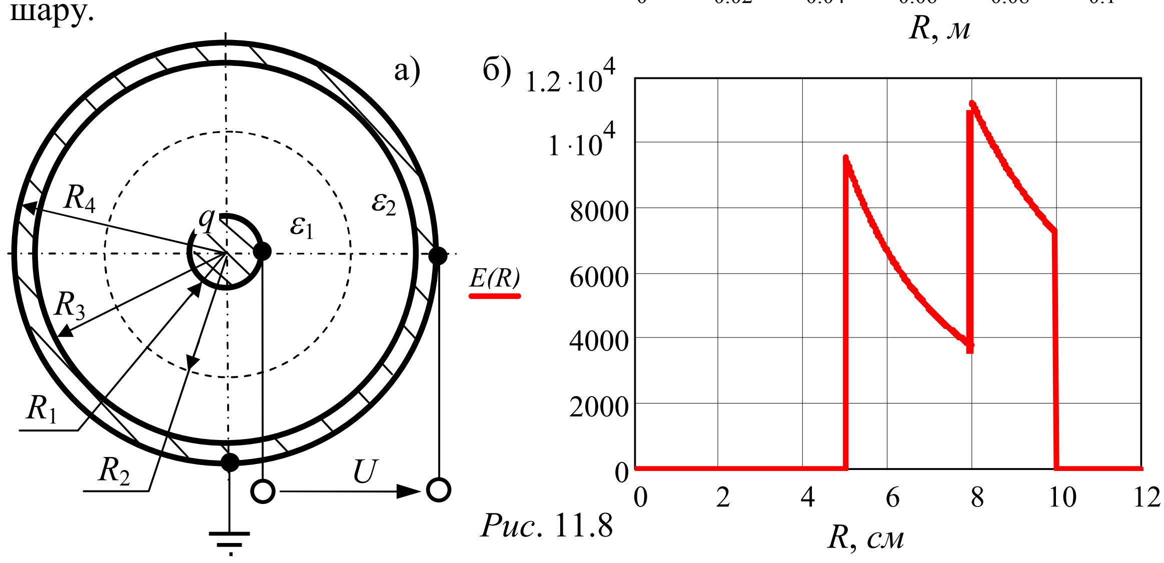


Рис. 11.8

Розв'язання

Ємність першого шару: $C_1=\dfrac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{R_1^{-1}-R_2^{-1}}=88{,}97\ n\Phi,$

другого: $C_2=\dfrac{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{R_2^{-1}-R_3^{-1}}=88{,}97\ n\Phi.$

Ємність конденсатора, утворена послідовним з'єднанням C_1 і C_2:

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=44{,}48\ n\Phi.$$

Заряд внутрішньої кулі: $q = CU = 1{,}6$ *мкКл*.

Напруженість поля у першій області $R_1 \le R \le R_2$, де R *[см]*,

$$E_1(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^2} = \frac{2{,}4\cdot 10^5}{R^2}\ \text{В/см},$$

а у другій області $R_2 \le R \le R_3$ $\quad E_2(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{7{,}2\cdot 10^5}{R^2}$ В/см.

Графік залежності $E(R)$ поданий на рис. 11.8,б.

Напруга на першому шарі ізоляції: $\quad U_1 = \int\limits_{R_1}^{R_2} E_1(R)dR = 18$ кВ,

на другому: $\quad U_2 = \int\limits_{R_2}^{R_3} E_2(R)dR = 18$ кВ.

Перевірка: $U_1 + U_2 = 18 + 18 = 36$ кВ $= U$.

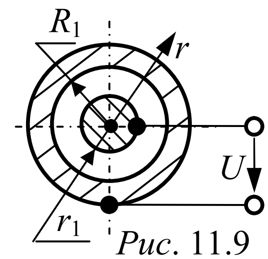


Рис. 11.9

ЗАДАЧА 11.8. Вивести формули для розрахунку поля і ємності циліндричного конденсатора, у якого внутрішній і зовнішній радіуси діелектричного шару – r_1 і R_1, довжина $l >> R_1$, діелектрична проникність ізоляції – ε_a (рис. 11.9).

Розв'язання

Хай внутрішній циліндр несе на собі заряд q. На підставі формули (11.5) з урахуванням того, що $q = \tau l$, знаходимо електричне зміщення і напруженість поля в діелектрику $D = q/(2\pi\cdot r\cdot l)$; $E = q/(2\pi\varepsilon_a\cdot r\cdot l)$.

Формулу для потенціалу $\varphi(r)$ отримаємо на підставі співвідношення (11.1). В циліндричній системі координат *grad* φ представляється як

$$grad\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0 \quad \text{(див. табл. Д1).}$$

Очевидно, що потенціал φ залежить тільки від однієї координати r, тобто $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ і $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$; вектор $\vec{E}$ направлений уздовж осі r, тому для його величини маємо:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \qquad \text{Звідси} \qquad \varphi = -\int E dr = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_a l}\ln r + A. \qquad (11.10)$$

Хай потенціал оболонки дорівнює нулю – $\varphi = 0$ при $r = R_1$. Тоді $A = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_a l}\ln R_1$. Формула для потенціалу $\quad \varphi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_a l}\ln\dfrac{R_1}{r}$. $\qquad$ (11.10,а)

Напруга, прикладена до конденсатора,

$$U = \varphi(r = r_1) - \varphi(r = R_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_a l}\ln\frac{R_1}{r_1}.$$

Ємність одношарового конденсатора $\quad C = q/U = \dfrac{2\pi\varepsilon_a l}{\ln(R_1/r_1)}$. $\qquad$ (11.11)

Якщо конденсатор має декілька шарів, то ємність кожного шару – $C_k = \dfrac{2\pi\varepsilon_a l}{ln(R_k / r_k)}$, ємність всього конденсатора – $C = (\Sigma(C_k)^{-1})^{-1}$; напруга і напруженість поля для кожного шару – $U_k = q/C_k$; $E_k = q/(2\pi\varepsilon_{ak} \cdot l \cdot r)$.

ЗАДАЧА 11.9. До коаксіального кабелю прикладена постійна напруга $U = 6$ *кВ*. Довжина кабелю $l = 20$ *м* (рис. 11.10). Радіус жили $r_1 = 0{,}5$ *см*, радіуси оболонки $r_2 = 2$ *см*, $r_3 = 2{,}4$ *см*. Відносна діелектрична проникність ізоляції $\varepsilon = 4$.

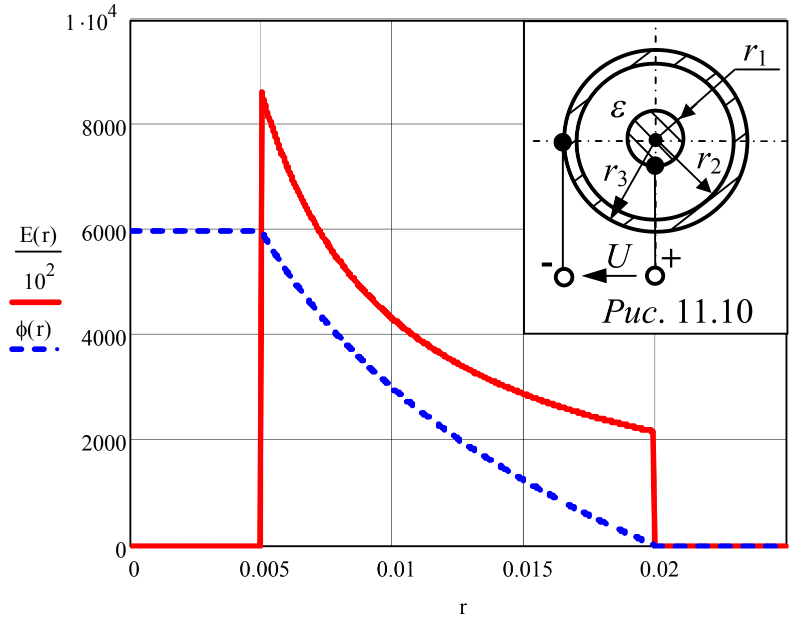


Рис. 11.10

Нехтуючи ефектом по краях, визначити ємність кабелю, побудувати графіки $E(r)$, $\varphi(r)$, знайти енергію, що запасена в ізоляції кабелю.

Відповіді: ємність кабелю за формулою (11.11) $C = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{ln(r_2 / r_1)} = 3{,}21$ *нФ*;

лінійна густина заряду $\tau = \dfrac{CU}{l} = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{ln(r_2 / r_1)}$;

напруженість і потенціал (формули (11.5) і (11.10,а)):

$$E(r) = \frac{4328}{r}\ В/м, \quad \varphi(r) = 4328 ln\frac{r_2}{r}\ В, \text{ де } r[м];$$

графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$ на рис. 11.10.

Об'ємна густина енергії в діелектрику $w_E = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$.

Енергія поля, що запасена в кабелі,

$$W_E = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau^2 l \cdot 2\pi r}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\tau^2 l}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{CU^2}{2} = 57{,}73 \cdot 10^{-9}\ Дж.$$

ЗАДАЧА 11.10. Розрахувати поле циліндричного променя електронів, що поширюється в вакуумі, якщо його $\rho = -10^{-10}$ *Кл/см*^{3}, $\varepsilon = 2$, а діаметр $d = 2$ *мм*. Задачу розв'язати за допомогою теореми Гауса в інтегральній формі.

Розв'язання

Теорема Гауса в інтегральній формі – $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma q$. В циліндричній системі координат

$\oint_S \vec{D}\cdot \vec{dS} = D\cdot 2\pi rl$ (див. (11.4)); $E = \dfrac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\varphi(r) = -\int Edr$ (див. задачу 11.8).

В області $r < d/2$

$$\Sigma q = \rho\cdot\pi r^2 l;\quad D_1 = ½\rho r,\quad E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot r;\qquad \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0}\cdot r^2 + A_1.$$

Хай $\varphi_1 = 0$ при $r = 0$. Тоді $A_1 = 0$. Після підстановки числових значень маємо: $E_1(r) = -2{,}825\cdot 10^6\cdot r$ *В/м*; $\varphi_1(r) = 1{,}412\cdot 10^6\cdot r^2$ *В*.

В області $r > d/2$ $\Sigma q = \rho\cdot\pi(d/2)^2 l$;

$$D_2 = \frac{\rho\cdot(d/2)^2}{2r};\quad E_2(r) = \frac{\rho(d/2)^2}{2\varepsilon_0 r};\quad \varphi_2(r) = -\frac{\rho(d/2)^2}{2\varepsilon_0}\cdot ln(r) + A_2.$$

При $r = ½d$ $\varphi_2(d/2) = \varphi_1(d/2) = 1{,}412\cdot 10^6\cdot(10^{-3})^2 = 1{,}41$ *В*, звідси

$$A_2 = \varphi_2(d/2) + \frac{\rho(d/2)^2}{2\varepsilon_0} ln(d/2) = 1{,}41 - 5{,}65\cdot\ln(0{,}001) = 40{,}44.$$

Таким чином, $E_2(r) = -\dfrac{5{,}65}{r}$ *В/м*; $\varphi_2(r) = 5{,}65\cdot ln(r) + 40{,}44$ *В*.

ЗАДАЧА 11.11. Всередині заземленої порожнистої металевої кулі з внутрішнім і зовнішнім радіусами $R_3 = 3{,}2$ *см* і $R_4 = 3{,}6$ *см*, відповідно, (рис. 11.11) розташована ще одна металева куля радіусу $R_1 = 0{,}8$ *см*, причому остання несе на собі заряд $q = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ *Кл*. В пристрої є область, заряджена рівномірно з об'ємною густиною $\rho = -10^{-10}$ *Кл/см*^{3}, її відносна діелектрична проникність $\varepsilon_1 = 2$, і область, що не містить вільних зарядів, її відносна діелектрична проникність $\varepsilon_2 = 1{,}5$. $R_2 = 1{,}6$ *см*.

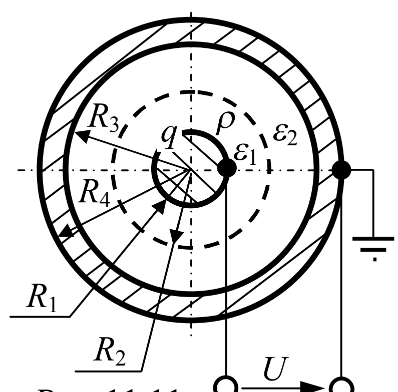


Рис. 11.11

Розрахувати і побудувати графіки залежності напруженості електро статичного поля і потенціалу від відстані до центру кулі.

Розв'язання

Області $0 < R < R_1$, $R_3 < R < R_4$ заповнені провідним матеріалом, тому електростатичне поле в цих областях відсутнє – $E = 0$, $D = 0$, $\varphi = const$. Поле відсутнє також за межами кулі, оскільки оболонка кулі заземлена.

В областях $R_1 < R < R_2$ і $R_2 < R < R_3$ розрахунок поля виконаємо за допомогою теореми Гауса в інтегральній формі: $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \Sigma q$. На підставі (11.2)

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = D\cdot 4\pi R^2.$$

В області $R_1 < R < R_2$ $\Sigma q = q + \rho\cdot {}^4\!/_3\,\pi(R^3 - R_1^3)$. Тоді

$$D_1 = \frac{q + \rho\,{}^4\!/_3\,\pi(R^3 - R_1^3)}{4\pi R^2};\qquad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{q - \rho\,{}^4\!/_3\,\pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^2} + \frac{\rho R}{3\varepsilon_1\varepsilon_0}.$$

На підставі (11.8) $\varphi_1 = -\int E_1 dR = \dfrac{q - \rho\, {}^4\!/_3\, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R} - \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} + A_1.$

В області $R_2 < R < R_3$ $\Sigma q = q + \rho \cdot {}^4\!/_3\, \pi (R_2^3 - R_1^3)$. Тоді

$$D_2 = \frac{q + \rho\, {}^4\!/_3\, \pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi R^2}; \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{q + \rho\, {}^4\!/_3\, \pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R^2};$$

$$\varphi_2 = -\int E_2 dR = \frac{q + \rho\, {}^4\!/_3\, \pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R} + A_2.$$

Постійні інтегрування A_1 і A_2 визначимо за умови, що $\varphi_2(R_3) = 0$, і врахувавши, що потенціал – функція безперервна.

$$\varphi_2(R_3) = \frac{q + \rho\, {}^4\!/_3\, \pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R_3} + A_2 = 0, \quad \text{звідси}$$

$$A_2 = -\frac{q + \rho\, {}^4\!/_3\, \pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R_3} = -4402.$$

Таким чином, після підстановки числових значень отримаємо:

$$\varphi_2(R) = \frac{140{,}86}{R} - 4402\ B, \quad E_2(R) = \frac{140{,}86}{R^2}\ B/м, \quad \text{де } R\,[м].$$

При $R = R_2$ $\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_2) = \dfrac{140{,}86}{0{,}016} - 4402 = 4402\ B.$

Тобто $\dfrac{q - \rho\, {}^4\!/_3\, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R_2} - \dfrac{\rho R_2^2}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} + A_1 = 4402$ і $A_1 = -2804.$

Таким чином, після підстановки числових значень отримаємо:

$$\varphi_1(R) = \frac{111{,}43}{R} + 9{,}42\cdot 10^5\cdot R^2 - 2804\ B, \quad E_1(R) = \frac{111{,}43}{R^2} - 18{,}83\cdot 10^5\cdot R\ B/м.$$

Графіки $\varphi(R)$ і $E(R)$ подані на рис. 11.12.

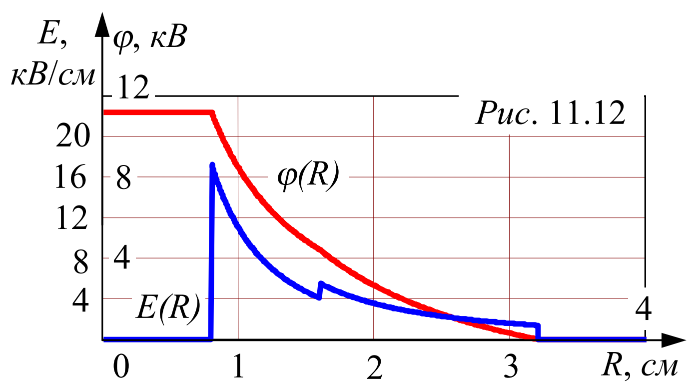


Рис. 11.12

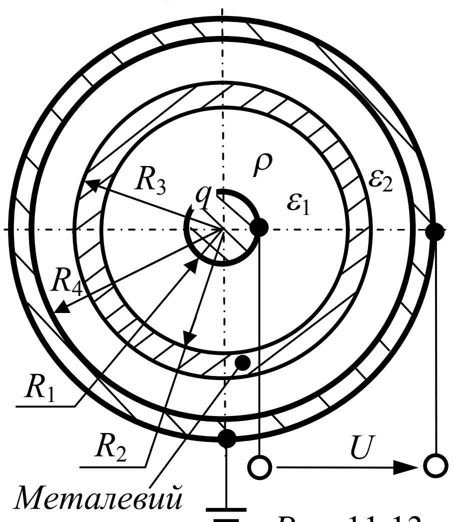


Рис. 11.13

ЗАДАЧА 11.12. Дві провідні кулі (рис. 11.13) розділені двома шарами діелектрика з відносними діелектричними проникностями $\varepsilon_1 = 2$ і $\varepsilon_2 = 1$ з металевим прошарком між ними. Радіуси зон: $R_1 = 1$ *см*, $R_2 = 3$ *см*, $R_3 = 4$ *см* і

$R_4 = 5$ *см*. Кулі увімкнені до джерела постійної напруги $U = 1000$ *В*. Область першого діелектрика заповнена вільним зарядом з рівномірною об'ємною густиною $\rho = 10^{-10}$ *Кл/см*^{3}.

Побудувати графіки зміни напруженості електростатичного поля і потенціалу у залежності від координат простору за умови заземленої оболонки. Розрахувати також ємність шару, в якому $\rho = 0$.

Задачу розв'язати за допомогою теореми Гауса в інтегральній формі.

Розв'язання

Припустимо, що внутрішня куля несе на собі заряд q. Далі поле можна розрахувати аналогічно тому, як це зроблено в задачі 11.11.

В області $R_1 < R < R_2$

$$E_1 = \frac{q - \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^2} + \frac{\rho R}{3\varepsilon_1\varepsilon_0}; \qquad \varphi_1 = -\int E_1 dR = \frac{q - \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R} - \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} + A_1.$$

В області $R_3 < R < R_4$

$$E_2 = \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R^2}; \qquad \varphi_2 = -\int E_2 dR = \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R} + A_2.$$

Хай $\varphi_2(R_4) = 0$, тоді

$$A_2 = -\frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R_4}; \qquad \varphi_2(R) = \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_4}\right).$$

Потенціал металевого прошарку $\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3)$. Звідси

$$A_1 = \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) - \frac{q - \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R_2} + \frac{\rho R_2^2}{6\varepsilon_1\varepsilon_0};$$

$$\varphi_1(R) = \frac{q - \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) - \frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}(R^2 - R_2^2).$$

Напруга, прикладена до пристрою,

$$U = \varphi_1(R_1) = \frac{q - \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{q + \rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) -$$

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2) = q \cdot \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right) -$$

$$-\frac{\rho \, {}^4\!/_3 \, \pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2) + \frac{\rho \, {}^4\!/_3 \, \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) =$$

$$= 3{,}447 \cdot 10^{11} \cdot q + 1117.$$

Звідси $q = \dfrac{U - 1117}{3{,}447 \cdot 10^{11}} = -3{,}406 \cdot 10^{-10}$ *Кл*.

З урахуванням значення заряду q одержуємо остаточні формули потенціалу і напруженості поля, на підставі яких будуємо необхідні графіки (рис. 11.14):

$$\varphi(R)=\begin{cases}\varphi_1=\dfrac{-3{,}414}{R}-0{,}942\cdot10^6\cdot R^2+1436\ B & при\ 0{,}01\le R\le 0{,}03\ м,\\ \varphi_2=\dfrac{94{,}87}{R}-1897\ B & при\quad 0{,}04\le R\le 0{,}05\ м.\end{cases}$$

$$E(R)=\begin{cases}E_1=-\dfrac{3{,}414}{R^2}+1{,}883\cdot10^6\cdot R\ \ B/м & при\ 0{,}01\le R\le 0{,}03\ м,\\ E_2=\dfrac{94{,}87}{R^2}\quad B/м & при\quad 0{,}04\le R\le 0{,}05\ м.\end{cases}$$

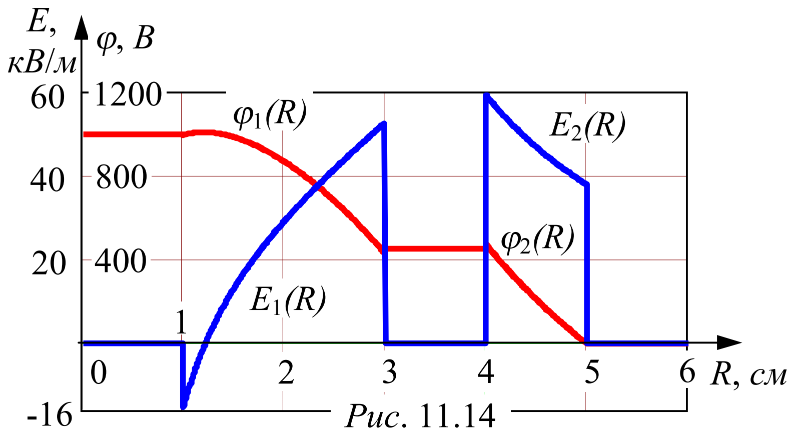


Рис. 11.14

Примітка. За допомогою ПЕОМ в системі MathCAD задача може бути розв'язана без таких громіздких викладень, а шляхом складання і розв'язання системи рівнянь, як це показано в задачі 11.46.

ЗАДАЧА 11.13. Яку максимальну напругу можна підвести до двошарового плоского конденсатора рис. 11.15, якщо: $\varepsilon_1=2$, $\varepsilon_2=4$, $d_1=2{,}5$ *мм*, $d_2=5$ *мм*. Пробивна напруженість ізоляції: $E_{проб}$ = 30 *кВ/см*. Запас електричної міцності прийняти рівним $n = 2{,}5$.

Для знайденої напруги розрахувати об'ємну густину енергії другого діелектрика.

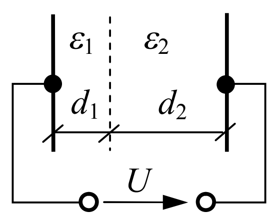


Рис. 11.15

Розв'язання

Виходячи з прийнятого запасу електричної міцності, допустима напруженість поля в діелектриках

$$E_{1max}\le\frac{E_{проб}}{n}=\frac{30}{2{,}5}=12\ кВ/см,\quad E_{2max}\le\frac{E_{проб}}{n}=12\ кВ/см.$$

Якщо нехтувати краєвим ефектом, то у плоского конденсатора напруженість поля в кожній області постійна – E_1 і E_2, відповідно. На межі поділу середовищ має місце умова $D_{1n}=D_{2n}$, яка в даному випадку приводить до виразу $\varepsilon_1 E_1=\varepsilon_2 E_2$ або $E_1 = 2E_2$.

Оскільки $E_1 > E_2$, приймаємо $E_1 = E_{1max} = 12$ *кВ/см*.

Тоді $E_2 = ½E_1 = 6$ *кВ/см*.

Максимально допустима напруга на затисках конденсатора

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 12\cdot0{,}25 + 6\cdot0{,}5 = 6\ кВ.$$

Об'ємна густина енергії другого діелектрика

$$w_2 = ½\varepsilon_2\varepsilon_0 E_2^2 = 0{,}5\cdot 4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot 6000^2 = 6{,}37\cdot 10^{-6}\ Дж/см^3.$$

ЗАДАЧА 11.14. Яку максимальну напругу можна підвести до двошарового коаксіального кабелю (рис. 11.16,а), якщо: $r_1 = 2{,}5$ *мм*, $r_2 = 7{,}5$ *мм*, $r_3 = 12$ *мм*, $r_4 = 14$ *мм*, $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 2$. Пробивна напруженість ізоляції: $E_{1проб} = E_{2проб} = 30$ *кВ/см*. Запас електричної міцності прийняти рівним 3.

Обчислити ємність кабелю.

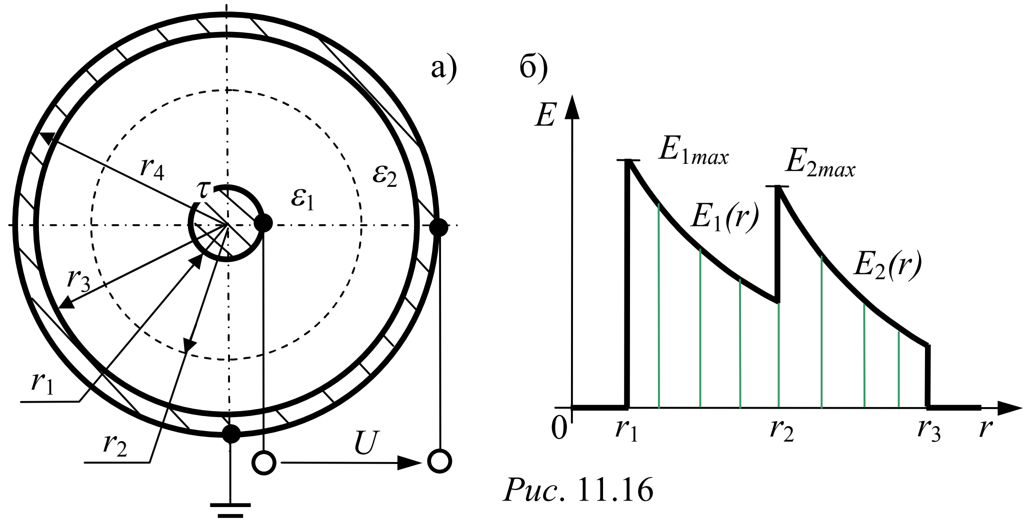


Рис. 11.16

Розв'язання

При увімкненні кабелю до джерела постійної напруги U жила кабелю нестиме на собі заряд τ на одиницю довжини. Напруженість поля визначимо за формулою (11.5).

Для першого шару ізоляції: $E_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r}$.

Для другого шару: $E_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r}$.

Приблизна картина розподілу напружености подана на рис. 11.16,б.

Найбільша напруженість поля в шарах ізоляції

$$E_{1max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1}, \quad E_{2max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r_2}.$$

Щоб не відбулося пробою ізоляції:

$$E_{1max} \le \frac{E_{1проб}}{n} = 10\ кВ, \quad E_{2max} \le \frac{E_{2проб}}{n} = 10\ кВ.$$

Добутки $\varepsilon_1 r_1 = 5\cdot 2{,}5 = 12{,}5$; $\varepsilon_2 r_2 = 2\cdot 7{,}5 = 15$; $\varepsilon_1 r_1 < \varepsilon_2 r_2$.

Тому $E_{1max} > E_{2max}$. Приймаємо $E_{1max} = 10$ *кВ*. Тоді

$$\tau = E_{1max}\cdot 2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1; \qquad E_1 = \frac{E_{1max} r_1}{r}; \qquad E_2 = \frac{E_{1max} r_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 r}.$$

Напруга першого шару ізоляції:

$$U_1 = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr = E_{1max} r_1 ln\frac{r_2}{r_1} = 10^4\cdot 0{,}25 ln3 = 2747\ В;$$

а другого шару: $U_2 = \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{E_{1max} r_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} ln\frac{r_3}{r_2} = \frac{10^4 \cdot 0{,}25 \cdot 5}{2} ln\frac{12}{7{,}5} = 2937\ B.$

Максимальна робоча напруга кабелю:

$$U = U_1 + U_2 = 2747 + 2937 = 5684\ B.$$

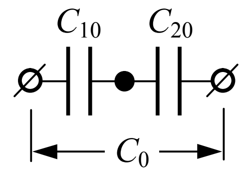


Рис. 11.17

Помітимо, що при виготовленні двошарового коаксіального кабелю відносну діелектричну проникність ізоляції зовнішнього шару, як правило, потрібно приймати меншою, ніж внутрішнього шару $(\varepsilon_2 < \varepsilon_1)$; інакше (при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) більша частина напруги буде прикладена до першого шару ізоляції.

Ємність двошарового кабелю (конденсатора) можна розрахувати, представивши його послідовним з'єднанням двох ємностей (рис. 11.17). У відповідності до (11.11) ємності шарів і всього кабелю:

$$C_{10} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{ln\, r_2/r_1},\quad C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{ln\, r_3/r_2},\quad C_0 = \frac{C_{10}\cdot C_{20}}{C_{10}+C_{20}} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}{\varepsilon_2\, ln\, r_2/r_1 + \varepsilon_1\, ln\, r_3/r_2}.$$

Або за визначенням ємності $C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} ln\frac{r_3}{r_2}} = 0{,}367\ н\Phi/м.$

ЗАДАЧА 11.15. Максимальна напруженість електростатичного поля в ізоляції двошарового циліндричного конденсатора (рис. 11.13, $\rho = 0$) складає $E_{max} = 30\ кВ/см$. Визначити напругу, прикладену до конденсатора, і його ємність, якщо $l = 5\,м$, $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $r_1 = 1\,см$, $r_2 = 3\,см$, $r_3 = 4\,см$, $r_4 = 5\,см$.

Розв'язання

Хай заряд внутрішньої жили – τ. Тоді напруженості і потенціали зон у відповідності до (11.5) і (11.8): $E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r}$; $\varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} ln(r) + A_1$;

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r};\quad \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} ln(r) + A_2.$$

Максимальні напруженості в областях:

$$E_{1max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1};\quad E_{2max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r_3}.$$

Оскільки $\varepsilon_1 \cdot r_1 = 2 < \varepsilon_2 \cdot r_3 = 4$, то $E_{2max} < E_{1max} = E_{max}$, $\tau = 2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1 E_{max}$,

$$\varphi_1 = -\,r_1 E_{max}\cdot ln(r) + A_1;\quad \varphi_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max}\cdot ln(r) + A_2.$$

Хай $\varphi_1(r_2) = \varphi_2(r_3) = 0$, тоді $A_1 = r_1 E_{max}\cdot ln(r_2)$, $A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max}\cdot ln(r_3)$,

$$\varphi_1(r) = r_1 E_{max}\cdot ln(r_2/r),\quad \varphi_2(r) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max}\cdot ln(r_3/r).$$

Прикладена напруга і ємність конденсатора

$$U = \varphi_1(r_1) - \varphi_2(r_4) = r_1 E_{max} \cdot ln\left({r_2}/{r_1} \cdot \left({r_4}/{r_3} \right)^{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \right) = 46{,}37\ кВ,$$

$$C = \frac{\tau \cdot l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{ln\left({r_2}/{r_1} \cdot \left({r_4}/{r_3} \right)^{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \right)} = 71{,}99\ nФ.$$

11.3 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ПІД ЧАС РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ПУАССОНА І ЛАПЛАСА

ЗАДАЧА 11.16. Дві провідні пластини розділені трьома шарами діелектрика з діелектричними проникностями $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ і $\varepsilon_3 = 3$. Товщина шарів діелектрика: $d_1 = 1\ см$, $d_2 = 2\ см$ і $d_3 = 3\ см$ (рис. 11.18). Пристрій увімкнений до джерела постійної напруги $U = 1000\ В$. Область першого діелектрика заповнена вільним зарядом з рівномірною густиною $\rho = 10^{-10}\ Кл/см^3$.

Побудувати графіки зміни напруженості електростатичного поля і потенціалу залежно від координат простору, вважаючи заземленою праву пластину.

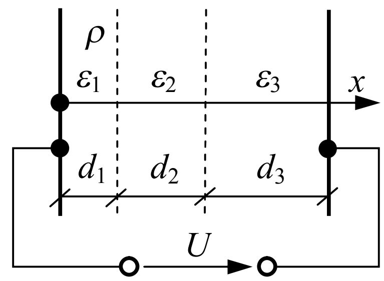


Рис. 11.18

Розв'язання

Задачу розв'яжемо за допомогою рівнянь Пуассона і Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad \text{або} \quad \nabla^2\varphi = 0.$$

Скалярний лапласіан в декартовій системі координат (рис. 11.18) розписується відповідно до табл. Д1 таким чином:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Але в даній задачі потенціал залежить тільки від однієї координати x, тобто $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$. Таким чином, для трьох різних областей одержуємо:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_1\varepsilon_0} \quad при \quad 0 \le x \le d_1, \\ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} = 0 \quad при \quad d_1 \le x \le d_1 + d_2, \\ \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2} = 0 \quad при \quad d_1 + d_2 \le x \le d_1 + d_2 + d_3. \end{array} \right.$$

Двократне інтегрування дає: $\varphi_1(x) = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_1\varepsilon_0}x^2 + A_1x + A_2;$

$$\varphi_2(x) = A_3x + A_4;$$
$$\varphi_3(x) = A_5x + A_6.$$

Цих виразів недостатньо для визначення постійних інтегрування $A_1 \div A_6$, тому використаємо ще формули для напруженості поля із співвідношення (11.1) з урахуванням табл. Д1:

$$E_1(x) = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_1\varepsilon_0}x - A_1; \quad E_2(x) = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = -A_3; \quad E_3(x) = -\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = -A_5.$$

Постійні інтегрування знаходимо за допомогою граничних умов.

Хай при $x = d_1 + d_2 + d_3$ $\varphi_3 = 0$ (потенціал правої пластини), тоді

$$A_5\cdot(d_1 + d_2 + d_3) + A_6 = 0. \qquad (11.12)$$

При $x = 0$ $\varphi_1 = U$ (потенціал лівої пластини), тоді $A_2 = U$. (11.13)

При $x = d_1$ $\varphi_1 = \varphi_2$, тобто $-\dfrac{\rho}{2\varepsilon_1\varepsilon_0}d_1^2 + A_1d_1 + A_2 = A_3d_1 + A_4$. (11.14)

На межі двох діелектриків однакові нормальні складові векторів електростатичної індукції – $D_{1n} = D_{2n}$. В даній задачі вектори $\vec{D}$ і $\vec{E}$ направлені уздовж осі x, тобто мають тільки нормальні складові. Тому при $x = d_1$ $\varepsilon_1\cdot E_1 = \varepsilon_2\cdot E_2$; тобто

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}d_1 - \varepsilon_1\cdot A_1 = -\varepsilon_2\cdot A_3. \qquad (11.15)$$

При $x = d_1 + d_2$ $\varphi_2 = \varphi_3$ і $\varepsilon_2\cdot E_2 = \varepsilon_3\cdot E_3$, тобто

$$A_3(d_1 + d_2) + A_4 = A_5(d_1 + d_2) + A_6; \qquad (11.16)$$
$$-\varepsilon_2\cdot A_3 = -\varepsilon_3\cdot A_5. \qquad (11.17)$$

Шість рівнянь (11.12-11.17) утворюють систему, розв'язання якої дає постійні інтегрування. Результат розв'язання системи: $A_1 = 6{,}083\cdot10^4$; $A_2 = 1000$; $A_3 = -2{,}608\cdot10^4$; $A_4 = 1304$; $A_5 = -1{,}739\cdot10^4$; $A_6 = 1043$.

Остаточно одержуємо

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1 = -5{,}65\cdot10^6x^2 + 60830x + 1000\ В \quad при \quad 0 \le x \le d_1, \\ \varphi_2 = -26080x + 1304\ В \quad при \quad d_1 \le x \le d_1 + d_2, \\ \varphi_3 = -17390x + 1043\ В \quad при \quad d_1 + d_2 \le x \le d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} E_1 = 11{,}3\cdot10^6x - 60830\ В/м \quad при \quad 0 \le x \le d_1, \\ E_2 = 26080\ В/м \quad при \quad d_1 \le x \le d_1 + d_2, \\ E_3 = 17390\ В/м \quad при \quad d_1 + d_2 \le x \le d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

Побудовані за цими формулами графіки подані на рис. 11.19*).

*) Для запису відповіді в один рядок під час побудови графіків в системі MathCAD можна застосувати функцію Хевісайда (функцію включення, одиничну східчасту функцію), яка в системі MathCAD позначається Φ. Наприклад, для даної задачі:
$\varphi(x) = \varphi_1\cdot[\Phi(x) - \Phi(x-d_1)] + \varphi_2\cdot[\Phi(x-d_1) - \Phi(x-d_1-d_2)] + \varphi_3\cdot[\Phi(x-d_1-d_2) - \Phi(x-d_1-d_2-d_3)]$.

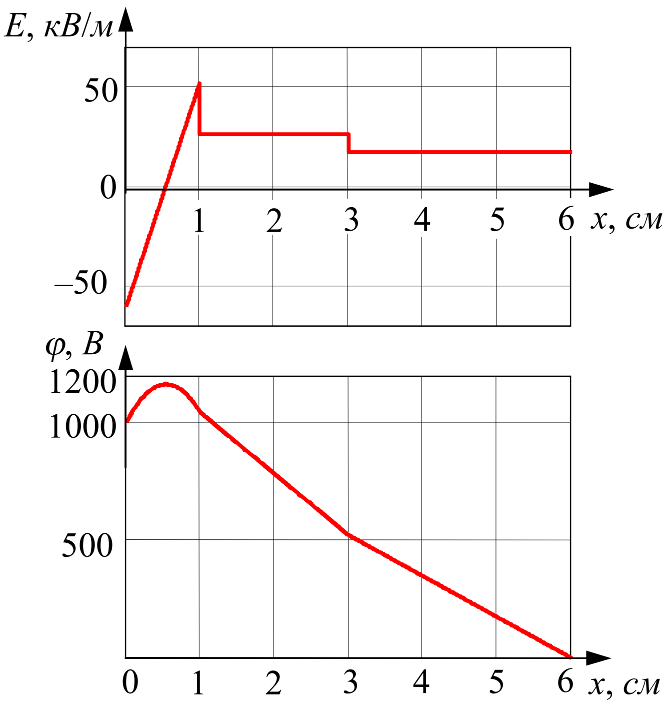


Рис. 11.19

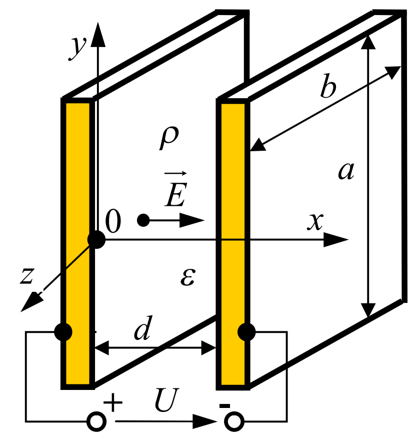


Рис. 11.20

ЗАДАЧА 11.17. Між двома плоскими електродами (рис. 11.20) напруженість поля змінюється за законом $E = E_x = E_0 \cdot \left(1 - x^2 / 2d^2\right)$, $E_y = 0$, $E_z = 0$. Відстань між електродами $d = 5\ мм$ набагато менша розмірів пластин, причому $a = 25\ см$, $b = 1\ м$, $E_0 = 12\ кВ/см$, діелектрична проникність діелектрика $\varepsilon = 4$.

Знайти напругу між електродами, об'ємну густину вільного заряду і весь вільний заряд, що є між електродами.

Розв'язання

Стан поля визначається рівнянням Пуассона $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0$. Оскільки $d << a$ і $d << b$, то можна нехтувати краєвим ефектом. Тоді при розташуванні осей декартової системи координат, як показано на рис. 11.20, φ залежить тільки від x і $\nabla^2\varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$; напруженість поля $E(x) = -\dfrac{d\varphi}{dx} = E_0 \cdot \left(1 - x^2 / 2d^2\right)$,

звідки $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = -\dfrac{dE}{dx} = \dfrac{E_0 x}{d^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ і

$$\rho = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{d^2}\cdot x = -\frac{4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot 12\cdot 10^3}{0{,}5^2}\cdot x = -1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot x\ Кл/см^3,\ \text{де}\ x[см].$$

Напруга між електродами

$$U = \int_0^d E(x)dx = E_0\cdot\left(x - x^3 / 6d^2\right)\Big|_0^d = E_0\cdot(d - d/6) = \frac{E_0 5d}{6} = \frac{12\cdot 5\cdot 0{,}5}{6} = 5\ кВ.$$

Сумарний заряд між електродами

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^d \rho(x) ab dx = a\cdot b\cdot \int_0^d \rho(x)dx = 25\cdot 100\cdot \int_0^{0{,}5} -1{,}7\cdot 10^{-8} x dx =$$

$$= -2500\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot ½\cdot 0{,}5^2 = -5{,}31\cdot 10^{-6}\ Кл.$$

Примітка. Розв'язання цієї задачі за допомогою системи MathCAD – див. задачу 11.42.

ЗАДАЧА 11.18. Розв'язати задачу 11.10 за допомогою рівнянь Пуассона і Лапласа.

Розв'язання

Загальний вид рівняння $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_a$ або 0. Сумістимо вісь z циліндричної системи координат з віссю променя, тоді скалярний лапласіан запишеться як $\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ (див. табл. Д1).

Але в даній задачі потенціал залежить тільки від однієї координати r, тобто $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$. Таким чином, для двох різних областей одержуємо:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad при \quad 0 \le r \le \frac{d}{2}, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = 0 \quad при \quad r \ge \frac{d}{2}. \end{array}\right.$$

Двократне інтегрування дає: $\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0}r^2 + A_1 ln(r) + A_2$;

$\varphi_2(r) = A_3 ln(r) + A_4$.

Щоб функція $\varphi_1(r)$ існувала при $r = 0$, складова $A_1 ln(r)$ повинна бути відсутня, тобто постійна інтегрування $A_1 = 0$. Приймемо, що $\varphi_1 = 0$ при $r = 0$. Тоді $A_2 = 0$ і $\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0}r^2 = 1{,}412\cdot10^6\cdot r^2$.

Для напруженості $\vec{E} = -grad\,\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha}_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0$.

Таким чином, $E_1(r) = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}r = -2{,}825\cdot10^6\cdot r$; $E_2(r) = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = -\frac{A_3}{r}$.

Гранична умова – $D_{1n} = D_{2n}$ або $\varepsilon\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_2$ при $r = d/2$:

$$\varepsilon\frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d}{2} = -\frac{A_3}{d/2}; \qquad A_3 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{-10^{-4}\cdot(10^{-3})^2}{2\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}} = 5{,}65.$$

При $r = d/2$ $\varphi_2(d/2) = \varphi_1(d/2) = 1{,}412\cdot10^6\cdot(10^{-3})^2 = 1{,}41$ B, звідси

$$A_4 = \varphi_1(d/2) - A_3 ln(d/2) = 1{,}41 - 5{,}65\cdot ln(0{,}001) = 40{,}44.$$

Остаточно одержуємо

$$\varphi(r) = \left[\begin{array}{l} \varphi_1 = 1{,}412\cdot10^6\cdot r^2\ B \quad при \quad 0 \le r \le 0{,}001\ м, \\ \varphi_2 = 5{,}65\cdot ln(r) + 40{,}44\ B \quad при \quad r \ge 0{,}001\ м. \end{array}\right.$$

$$E(r) = \begin{cases} E_1 = -2{,}825 \cdot 10^6 \cdot r \;\; В/м \quad при \quad 0 \le r \le 0{,}001\, м, \\ E_2 = -\dfrac{5{,}65}{r} \quad В/м \quad при \quad r \ge 0{,}001\, м. \end{cases}$$

Побудовані за цими формулами графіки подані на рис. 11.21.

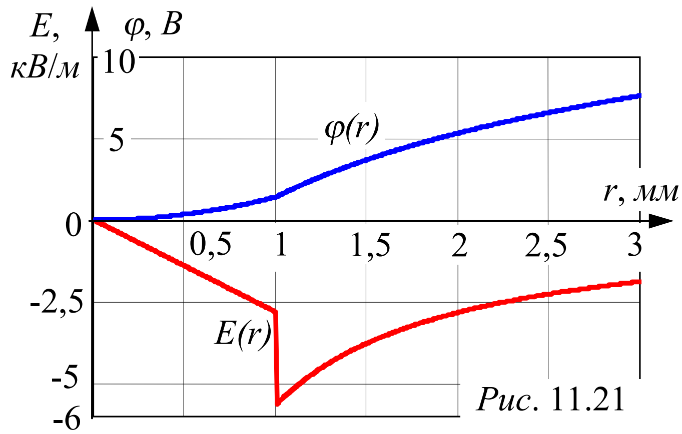


Рис. 11.21

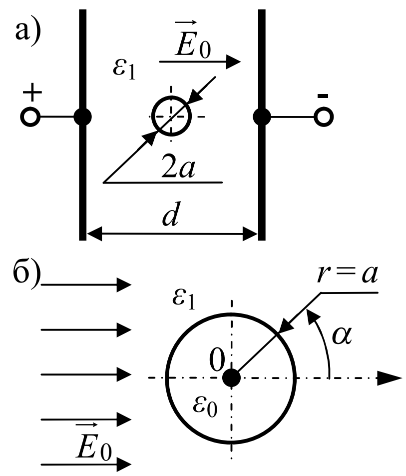


Рис. 11.22

ЗАДАЧА 11.19. В діелектрику плоского конденсатора ($\varepsilon_1 = 4$) виникло довге циліндричне повітряне включення діаметром $2a = 1$ *мм*. Відстань між пластинами $d = 20$ *мм* (рис. 11.22,а). Пробивні напруженості: для діелектрика $E_{1проб}$ = 120 *кВ/см*; для повітря $E_{2проб}$ = 30 *кВ/см*. Визначити максимальні і робочі напруги, на які може бути увімкнений конденсатор, якщо:

- в ізоляції відсутнє повітряне включення;
- в ізоляції є повітряне включення.

Прийняти в обох випадках відношення пробивної напруги до робочого рівним 3 (запас електричної міцності $n = 3$).

Розв'язання

Повітряне включення в ізоляції відсутнє.

Поле конденсатора рівномірне: $E_0 = \dfrac{U_{max}}{d} = E_{1проб}$, тоді

$$U_{max} = d \cdot E_{1проб} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ кВ}.$$

Робоча напруга $U = \dfrac{U_{max}}{n} = \dfrac{240}{3} = 80$ *кВ*.

В ізоляції є повітряне включення (рис. 11.22,б).

Нижче приведені отримані методом розділення змінних розв'язання рівняння Лапласа для незарядженого циліндра [3] ($\varphi(r, \alpha)$) і отримані диференціюванням цих розв'язань формули для напруженості електричного поля ($E(r, \alpha)$).

Для ізоляції (область 1): $\varphi_1 = A_1 + (A_2 r + \dfrac{A_3}{r}) \cos \alpha$,

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -(A_2 - \frac{A_3}{r^2}) \cos \alpha, \quad E_{1\alpha} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = (A_2 + \frac{A_3}{r^2}) \sin \alpha;$$

для внутрішньої повітряної області (область 2) аналогічно:

$$\varphi_2 = A_4 + (A_5 r + \frac{A_6}{r})\cos\alpha, \quad E_{2r} = -(A_5 - \frac{A_6}{r^2})\cos\alpha, \quad E_{2\alpha} = (A_5 + \frac{A_6}{r^2})\sin\alpha.$$

Відмітимо, що збурення рівномірного поля циліндром приводить до появи доданків $\frac{A}{r^2}$ у виразі для напруженостей і доданків $\frac{A}{r}$ – для потенціалів. При 5% погрішності можна вважати, що при $r > 20a$ збурення картини розподілу потенціалу вже немає, а щодо напруженості, то вже при $r > 5a$ погрішність буде менше 4%. В нашій задачі $a = 0{,}5$ *мм*, $½d = 10$ *мм*, співвідношення між ними 20. Висновок: поле буде збурене тільки поблизу циліндра. Тому за наявності циліндричного неоднорідного включення $E_0 = U/d$, як і раніше.

Проте, поблизу циліндричного включення напруженість поля як в ізоляції, так і в повітряному включенні відрізнятиметься від E_0, що може призвести до пробою одного з середовищ. Це неприпустимо.

Постійні інтегрування $A_1 \div A_6$ знаходимо з граничних умов при $r = a$, а також дослідженням розв’язання при $r = 0$ і $r = \infty$.

З умови безперервності потенціалу на межі циліндра випливає

$$A_1 = A_4. \tag{11.18}$$

Перша гранична умова $E_{1t} = E_{2t}$ приводить до рівності $E_{1\alpha} = E_{2\alpha}$ при $r = a$:

$$A_2 + \frac{A_3}{a^2} = A_5 + \frac{A_6}{a^2}. \tag{11.19}$$

Друга гранична умова $D_{1n} = D_{2n}$ при $r = a$ приводить до рівності $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$:

$$\varepsilon_1(A_2 - \frac{A_3}{a^2}) = \varepsilon_2(A_5 - \frac{A_6}{a^2}). \tag{11.20}$$

При $r \to 0$ розв’язання повинне давати кінцеві значення φ_2 і E_2, що приводить до нульового значення постійної інтегрування $A_6 = 0$. (11.21)

При $r \to \infty$ розв’язання повинне привести спостерігача в незбурене циліндром поле, коли при $\alpha = 0$ $E_{1r} = E_0 = U/d$: $A_2 = -E_0$. (11.22)

Оскільки потенціал визначається з точністю до постійної, то приймемо

$$A_1 = 0. \tag{11.23}$$

Тоді з шести рівнянь (11.18-11.23), які утворюють систему, знаходимо:

$$A_1 = A_4 = 0; \quad A_6 = 0; \quad A_2 = -E_0;$$

$$\begin{cases} -E_0 + \dfrac{A_3}{a^2} = A_5, \\ -E_0 - \dfrac{A_3}{a^2} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_5, \end{cases} \Rightarrow \; -2E_0 = A_5(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}); \quad A_5 = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2};$$

$$A_3 = a^2(A_5 + E_0) = a^2 E_0(1 - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) = a^2 E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Таким чином,

$$E_{1r} = E_0(1 + \frac{a^2}{r^2}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})\cos\alpha, \quad E_{1\alpha} = -E_0(1 - \frac{a^2}{r^2}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})\sin\alpha;$$

$$E_{2r} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos\alpha, \qquad E_{2\alpha} = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin\alpha.$$

Модуль напруженості поля в циліндрі

$$E_2 = \sqrt{E_{2r}^2 + E_{2\alpha}^2} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = E_0 \cdot \frac{2 \cdot 4}{4+1} = 1{,}6E_0,$$

звідки витікає, що поле всередині внесеного циліндра рівномірне.

Модуль напруженості поля в першому середовищі на поверхні циліндра при $r = a$

$$E_1 = \sqrt{E_{1r}^2 + E_{1\alpha}^2} = \frac{2E_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sqrt{(\varepsilon_2 \cos\alpha)^2 + (\varepsilon_1 \sin\alpha)^2},$$

де $E_{1r} = E_0(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})\cos\alpha = E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos\alpha,$

$$E_{1\alpha} = -E_0(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})\sin\alpha = E_0 \frac{-2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin\alpha.$$

Найбільші і найменші значення (екстремуми) напруженості в ізоляції визначаються умовою $\frac{d}{d\alpha}[(\varepsilon_2 \cos\alpha)^2 + (\varepsilon_1 \sin\alpha)^2] = 0.$

$$\varepsilon_2^2 \cdot 2\cos\alpha(-\sin\alpha) + \varepsilon_1^2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0; \quad \sin 2\alpha \cdot (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0; \quad 2\alpha = k\pi;$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi k, \text{ де } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

При $k = 0 \quad \alpha = 0, \qquad E_{1min} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 = 0{,}4E_0;$

$k = 1 \quad \alpha = 90°, \qquad E_{1max} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 = 1{,}6E_0.$

Таким чином, необхідно прийняти $E_0' = E_{1проб}/1{,}6 = 240/1{,}6 = 150$ *кВ/см*, а щоб не було іонізації повітря – $E_0'' = E_{2проб}/1{,}6 = 30/1{,}6 = 18{,}75$ *кВ/см*.

Оскільки $E_0'' < E_0'$, то за наявності повітряного циліндра

$$U_{max} = E_0''d = 18{,}75 \cdot 2 = 37{,}5 \text{ кВ},$$

а робоча напруга $U = \frac{U_{max}}{n} = \frac{37{,}5}{3} = 12{,}5$ *кВ*.

Таким чином, поява повітряних включень в діелектрику конденсатора призводить до значного погіршення умов його роботи.

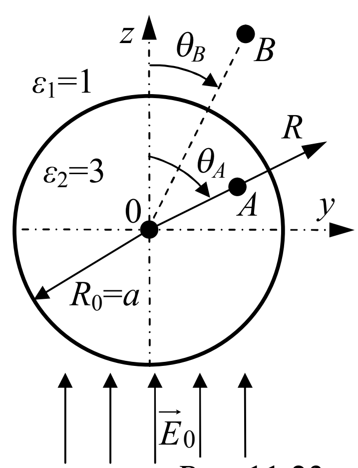


Рис. 11.23

ЗАДАЧА 11.20. Діелектрична куля радіусом $a = 2$ *см* знаходиться в рівномірному зовнішньому електричному полі (рис. 11.23). Різниця потенціалів між точками A і B $\varphi_A - \varphi_B = 5$ *В*. Сферичні координати точок: A(1 *см*, 60°, 90°); B(4 *см*, 30°, 90°). Середовищем, що оточує кулю, є повітря ($\varepsilon_1 = 1$). Відносна діелектрична проникність діелектрика кулі $\varepsilon_2 = 3$. Визначити модулі вектора зміщення в точках A і B.

Розв'язання

Загальне розв'язання рівняння Лапласа в сферичній системі координат отримано методом розділення змінних [3]. Застосуємо його для випадку, коли куля не заряджена.

Для першої області $R > a$ $\quad \varphi_1 = A_1 + (A_2 R + \frac{A_3}{R^2})\cos\theta,$

тоді складові напруженості – $\quad E_{1R} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial R} = -(A_2 - \frac{2A_3}{R^3})\cos\theta,$

$$E_{1\theta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = (A_2 + \frac{A_3}{R^3})\sin\theta.$$

Для другої області $R < a$:

$$\varphi_2 = A_4 + (A_5 R + \frac{A_6}{R^2})\cos\theta, \qquad E_{2R} = -(A_5 - \frac{2A_6}{R^3})\cos\theta, \qquad E_{2\theta} = (A_5 + \frac{A_6}{R^3})\sin\theta.$$

Для визначення постійних інтегрування $A_1 \div A_6$ скористаємося граничними умовами. З умови безперервності потенціалу на поверхні кулі маємо

$$A_1 = A_4. \tag{11.24}$$

Умова $E_{1t} = E_{2t}$ приводить до рівності $E_{1\theta} = E_{2\theta}$ при $R = a$:

$$A_2 + \frac{A_3}{a^3} = A_5 + \frac{A_6}{a^3}. \tag{11.25}$$

Умова $D_{1n} = D_{2n}$ при $R = a$ приводить до рівності $\varepsilon_1 E_{1R} = \varepsilon_2 E_{2R}$:

$$\varepsilon_1(A_2 - \frac{2A_3}{a^3}) = \varepsilon_2(A_5 - \frac{2A_6}{a^3}). \tag{11.26}$$

Умови в нулі $(R \to 0)$ призводять до того, що $\quad A_6 = 0, \quad$ (11.27) оскільки ні потенціал, ні напруженість в центрі сфери не можуть бути нескінченними.

Умови в нескінченності $(R \to \infty)$ дозволяють визначити A_2, оскільки там, де вже немає збурення поля внесеною сферою, $E_{1R} = E_0\cos\theta = -A_2\cos\theta.$

Звідси

$$A_2 = -E_0. \tag{11.28}$$

Оскільки потенціал визначається з точністю до постійної, то приймемо

$$A_1 = 0. \tag{11.29}$$

Тоді з шести рівнянь (11.24-11.29), які утворюють систему, знаходимо:

$$A_1 = A_4 = 0; \quad A_6 = 0; \quad A_2 = -E_0;$$

$$\begin{cases} -E_0 + \frac{A_3}{a^3} = A_5, \\ -E_0 - \frac{2A_3}{a^3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}A_5, \end{cases} \Rightarrow \; -3E_0 = A_5(2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}); \quad A_5 = -E_0\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2};$$

$$A_3 = a^3(A_5 + E_0) = a^3E_0(1 - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) = a^3E_0\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Задана умовою задачі різниця потенціалів: $\varphi_A - \varphi_B = 5$ B.

На підставі поданого розв'язання:

$$-E_0(-R_B+\frac{a^3}{R_B^2}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2})cos\,\theta_B+(-E_0)\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}R_A cos\,\theta_A=5.$$

Підставимо відстані в *см* і отримаємо:

$$-E_0(-4+\frac{2^3}{4^2}\cdot\frac{3-1}{2+3})\frac{\sqrt{3}}{2}-E_0\frac{3}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=5,\ \text{звідки}\qquad E_0=1{,}672\ В/см\ \text{ и}$$

$$A_2=-1{,}672\ В/см;\quad A_3=2^3\cdot 1{,}672\cdot\frac{3-1}{2+3}=5{,}35\ В\cdot см^2;\quad A_5=-1{,}672\cdot\frac{3}{5}=-1\ В/см.$$

Таким чином, маємо наступні відповіді.

Для точки *A* (область 2):

$E_{RA}=E_{2R}=-A_5 cos\ \theta_A=1\cdot cos60°=0{,}5\ В/см,$

$E_{\theta A}=A_5 sin\ \theta_A=-1\cdot sin60°=-0{,}866\ В/см,$

$E_A=\sqrt{E_{RA}^2+E_{\theta A}^2}=1\ В/см;\qquad D_A=\varepsilon_2\varepsilon_0 E_A=3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot 1=26{,}55\cdot 10^{-14}\ Кл/см^2.$

Для точки *B* (область 1):

$$E_{RB}=-(-1{,}672-\frac{2\cdot 5{,}35}{4^3})\cdot 0{,}866=1{,}594\ В/см,$$

$$E_{\theta B}=(-1{,}672+\frac{5{,}35}{4^3})\cdot 0{,}5=-0{,}7942\ В/см,\quad E_B=\sqrt{E_{RB}^2+E_{\theta B}^2}=1{,}781\ В/см;$$

$D_B=\varepsilon_1\varepsilon_0 E_B=8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot 1{,}781=15{,}76\cdot 10^{-14}\ Кл/см^2.$

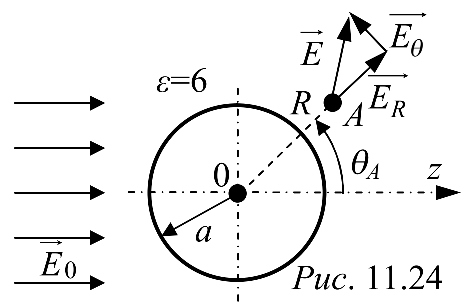


Рис. 11.24

ЗАДАЧА 11.21. Провідна заряджена куля радіусом $a=5\ мм$ поміщена в рівномірне електричне поле з напруженістю $E_0=4\ кВ/см$ (рис. 11.24). Навколишнє середовище має відносну діелектричну проникність $\varepsilon=6$. Знайти значення напруженості поля і вектора поляризації діелектрика в точці $A(7\ мм;\ 40°;\ 0°)$, якщо заряд кулі $Q=4\cdot 10^{-9}\ Кл.$

Розв'язання

Розв'язання виконаємо за допомогою рівняння Лапласа в сферичній системі координат. При вибраному розташуванні осей (рис. 11.24) потенціал не залежить від координати α ($\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$), тому дане поле описується рівнянням

$$\varphi=\frac{A_1}{R}+(A_2R+\frac{A_3}{R^2})cos\,\theta+A_4,$$

де доданок $\frac{A_1}{R}$ визначається зарядом кулі Q.

Для поля заряду Q на значній відстані від нього, коли він може розглядатися як точковий, маємо:

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}=\frac{A_1}{R},\quad \text{звідки}\quad A_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{4\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-14}}=600\ В\cdot см.$$

Для визначення решти постійних інтегрування застосуємо напруженість поля. Оскільки φ залежить тільки від R і θ, напруженість має тільки дві складові: $E_R = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial R} = \dfrac{A_1}{R^2} + (-A_2 + \dfrac{2A_3}{R^3})\cos\theta,\quad E_\theta = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\varphi}{\partial R} = (A_2 + \dfrac{A_3}{R^3})\sin\theta.$

З умов в нескінченності $R \to \infty$ одержуємо:

$$E_R = -A_2\cos\theta = E_0\cos\theta,\quad \text{звідки}\quad A_2 = -E_0 = -4000\ В/см.$$

На межі поділу діелектрик-провідне тіло немає тангенціальної складової напруженості поля. Тому: $E_\theta = 0$, звідки

$$A_2 + \frac{A_3}{a^3} = 0\ \text{ і }\ A_3 = -A_2\cdot a^3 = 4000\cdot 5^3\cdot 10^{-3} = 500\ В\cdot см^2.$$

Таким чином: $E_R = \dfrac{600}{R^2} + (4000 + \dfrac{1000}{R^3})\cos\theta,\quad E_\theta = (-4000 + \dfrac{500}{R^3})\sin\theta.$

В точці $A(0{,}7;\ 40°;\ 0°)$ $E_R = 4735\ В/см,\quad E_\theta = -2596\ В/см,$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \sqrt{4735^2 + 2596^2} = 5400\ В/см.$$

Визначимо вектор поляризації із співвідношень $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = 8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot(6-1)\cdot 5400 = 2{,}39\cdot 10^{-9}\ Кл/см^2.$$

ЗАДАЧА 11.22. Розв'язати задачу 11.12 за допомогою рівнянь Пуассона і Лапласа.

Розв'язання

Через центральну симетрію пристрою характеристики поля залежать тільки від однієї координати R, тобто $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ і $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$. З урахуванням цього рівняння для потенціалу в сферичній системі координат (див. табл. Д1) в зонах, зайнятих діелектриком, приймає вигляд:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)\right] = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\rho}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\quad при\quad R_1 < R < R_2, \\ 0\quad при\quad R_3 < R < R_4. \end{array}\right.$$

В результаті двократного інтегрування одержуємо:

$$\varphi_1(R) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}R^2 - \frac{A_1}{R} + A_2;\qquad \varphi_2(R) = -\frac{A_3}{R} + A_4.$$

Цих рівнянь недостатньо для визначення постійних інтегрування $A_1 \div A_4$, тому застосуємо ще напруженість поля:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{R}_0 - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{\theta}_0 - \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha}_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{R}_0,$$

звідки $E_1(R) = -\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial R} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_1\varepsilon_0}R - \dfrac{A_1}{R^2};\qquad E_2(r) = -\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial R} = -\dfrac{A_3}{R^2}.$

Для знаходження постійних інтегрування на підставі граничних умов для межі діелектрик-провідник $(D = \sigma,\ \varphi_{M1} = const)$ складемо систему рівнянь. Врахуємо, що вектори $\vec{D}$ і $\vec{E}$ направлені по радіальних лініях і, отже, мають тільки нормальну складову. Приймемо, що за рахунок явища електростатичної індукції на внутрішній стороні металевого прошарку з'явиться заряд $-q_{пр}$, а на зовнішній – $+q_{пр}$.

$R = R_1 \quad \varphi_1(R_1) = U, \qquad$ при $\; R = R_4 \quad \varphi_2(R_4) = 0,$
при $\; R = R_2 \quad \varphi_1(R_2) = \varphi_{пр}; \qquad$ при $\; R = R_3 \quad \varphi_2(R_3) = \varphi_{пр};$

або $\quad \varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3);$

$$D_1(R_2) = -\sigma(R_2) = -\frac{-q_{пр}}{4\pi R_2^2} = \frac{q_{пр}}{4\pi R_2^2}, \quad E_1(R_2) = \frac{D_1(R_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{q_{пр}}{\varepsilon_1\varepsilon_0 4\pi R_2^2};$$

$$D_2(R_3) = \sigma(R_3) = \frac{q_{пр}}{4\pi R_3^2}, \qquad E_2(R_3) = \frac{q_{пр}}{\varepsilon_2\varepsilon_0 4\pi R_3^2};$$

або $\quad R_2^{\,2}\varepsilon_1 E_1(R_2) = R_3^{\,2}\varepsilon_2 E_2(R_3).$

Отже, виходить система рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}R_1^{\,2} - \dfrac{A_1}{R_1} + A_2 = U, & \varepsilon_1 \cdot R_2^{\,2} \cdot \left(\dfrac{\rho}{3\varepsilon_1\varepsilon_0}R_2 - \dfrac{A_1}{R_2^2}\right) = \varepsilon_2 \cdot R_3^{\,2} \cdot \left(-\dfrac{A_3}{R_3^2}\right), \\ -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0}R_2^{\,2} - \dfrac{A_1}{R_2} + A_2 = -\dfrac{A_3}{R_3} + A_4, & -\dfrac{A_3}{R_4} + A_4 = 0. \end{cases}$$

Підставивши в ці рівняння числові значення і розв'язавши систему, одержуємо: $A_1 = 3{,}414$; $A_2 = 1436$; $A_3 = -94{,}87$; $A_4 = -1897$.

Записуємо остаточні формули потенціалу і напруженості поля, по яких будуємо необхідні графіки (рис. 11.14):

$$\varphi(R) = \begin{bmatrix} \varphi_1 = \dfrac{-3{,}414}{R} - 0{,}942 \cdot 10^6 \cdot R^2 + 1436\ B \quad при\ 0{,}01 \le R \le 0{,}03\ м, \\ \varphi_2 = \dfrac{94{,}87}{R} - 1897\ B \quad при \quad 0{,}04 \le R \le 0{,}05\ м. \end{bmatrix}$$

$$E(R) = \begin{bmatrix} E_1 = -\dfrac{3{,}414}{R^2} + 1{,}883 \cdot 10^6 \cdot R\ \ B/м\ \ при\ \ 0{,}01 \le R \le 0{,}03\ м, \\ E_2 = \dfrac{94{,}87}{R^2} \quad B/м \quad при \quad 0{,}04 \le R \le 0{,}05\ м. \end{bmatrix}$$

Ємність другого шару діелектрика на підставі (11.9), задача 11.5:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{1/R_3 - 1/R_4} = \frac{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{1/0{,}04 - 1/0{,}05} = 22{,}24 \cdot 10^{-12}\ Ф = 22{,}24\ пФ.$$

ЗАДАЧА 11.23. Симетрична сферична система з двох металевих куль знаходиться у повітрі, віддалена від землі та інших тіл на значну відстань (рис. 11.25). Простір між кулями заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$, в якому розподілений вільний заряд з рівномірною густиною $\rho = 5 \cdot 10^{-6}$ $Кл/м^3$. Радіус внутрішньої кулі $R_1 = 20$ $см$, внутрішній радіус сферичної

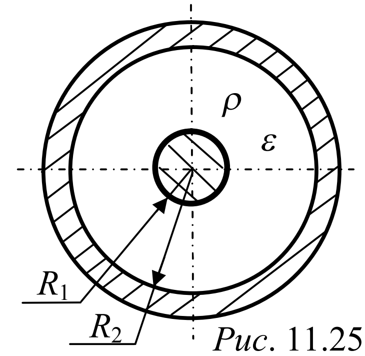


Рис. 11.25

оболонки $R_2 = 40$ *см*. Розрахувати залежність *E(R)*, *φ(R)* для області $R_1 < R < R_2$.

Відповідь: $E(R) = 47{,}08R - \dfrac{0{,}3762}{R}$ *кВ/м*,

$$\varphi(R) = -23{,}54R - \frac{0{,}3762}{R^2} + 4{,}703 \text{ кВ, де } R\ [м].$$

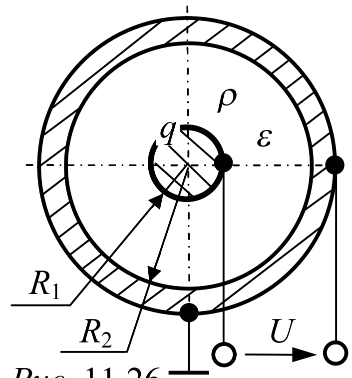


Рис. 11.26

ЗАДАЧА 11.24. Об'ємний заряд з рівномірною об'ємною густиною $\rho = 10^{-4}$ *Кл/м*^{3} розподілений в діелектрику $(\varepsilon = 4)$ між двома кулями з розмірами $R_1 = 4$ *см*, $R_2 = 10$ *см* (рис. 11.26). Кулі увімкнені до джерела постійної напруги $U = 40$ *кВ*. Оболонка заземлена. Визначити заряд q.
Відповідь: $q = 1{,}096 \cdot 10^{-6}$ *Кл*.

11.4 МЕТОД ДЗЕРКАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

ЗАДАЧА 11.25. Провідник із зарядом $\tau = 10^{-8}$ *Кл/м* створює електростатичне поле поблизу металевої поверхні. Визначити потенціал провідника, а також напруженість і потенціал поля у точках *A* і *B* (рис. 11.27,а), якщо

$$r_0 = 2 \text{ см};\ h = 4 \text{ м};\ \varepsilon = 1.$$

Розв'язання

Електростатичне поле у точці *B* (усередині металу) відсутнє: $E_B = 0$, $\varphi_B = 0$. Для розрахунку поля у верхній напівплощині рисунку застосуємо метод дзеркальних зображень. Коефіцієнт неповного віддзеркалення від ідеального провідника дорівнює –1. Розрахунковий рисунок має вид рис. 11.27,б, де два провідники із зарядами τ і $-\tau$ розташовані в однорідному середовищі з проникністю *ε*. Далі застосовуємо принцип накладання.

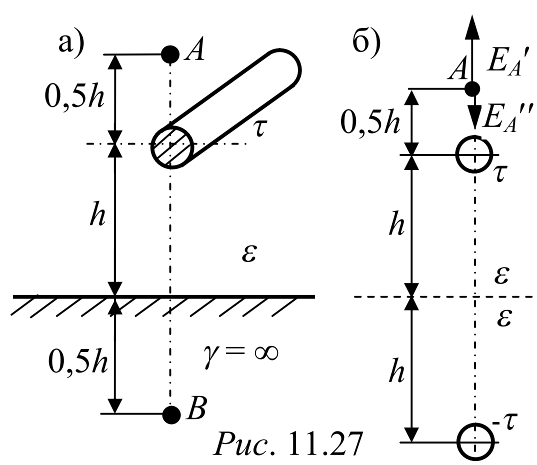


Рис. 11.27

Напруженість і потенціал від однієї зарядженої осі в однорідному середовищі визначаються відповідно до формул (11.5) і (11.10,а):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{h}{r}.$$

Як видно з рис. 11.27,б, повна напруженість у точці *A* дорівнює різниці напруженостей від двох провідників. Таким чином, шукана напруженість у точці *A*:

$$E_A = E_A' - E_A'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 0{,}5h} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 2{,}5h} = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}5 \cdot 4} - \frac{1}{2{,}5 \cdot 4}\right) = 71{,}93\ В/м.$$

Потенціали точки *A* і точки на поверхні провідника (потенціал провідника) визначаться виразами:

$$\varphi_A = \varphi_A' + \varphi_A'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(ln\frac{h}{0{,}5h} - ln\frac{h}{2{,}5h}\right) = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\,ln5 = 290\ B;$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(ln\frac{h}{r_0} - ln\frac{h}{2h}\right) = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\,ln\frac{2\cdot 4}{0{,}02} = 1078\ B.$$

ЗАДАЧА 11.26. Між провідником радіусом $r_0 = 1\ см$, розташованим у повітрі паралельно землі на висоті $h = 1\ м$, і землею діє напруга $U = 1000\ B$ (рис. 11.28,а). Визначити ємність C_0, енергію поля W_0 і силу F_0, що діє на одиницю довжини провідника.

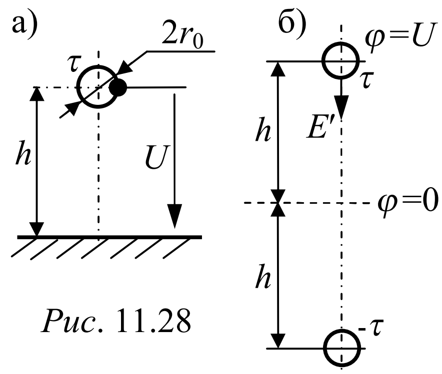


Рис. 11.28

Розв'язання

Відповідно до методу дзеркальних зображень складаємо розрахунковий рис. 11.28,б. Тоді потенціал провідника (див. задачу 11.25)

$$\varphi = U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\,ln\frac{2h}{r_0}.$$

Звідси заряд проводу

$$\tau = \frac{U\cdot 2\pi\varepsilon_0}{ln\dfrac{2h}{r_0}} = \frac{1000\cdot 2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{ln\dfrac{2}{0{,}01}} = 10{,}5\cdot 10^{-9}\ Кл/м.$$

Ємність одиниці довжини лінії $C_0 = \dfrac{\tau}{U} = 10{,}5\cdot 10^{-12}\ Ф/м = 10{,}5\ пФ/м.$

Напруженість поля, створеного зарядом $-\tau$ в місці розташування заряду τ у відповідності до (11.5)

$$E' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\cdot 2h} = \frac{10{,}5\cdot 10^{-9}}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2} = 94{,}4\ В/м.$$

Сила, з якою провід притягується до землі

$F_0 = \tau E' = 10{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 94{,}4 = 0{,}991\cdot 10^{-6}\ Н/м.$

Енергія одиниці довжини лінії

$W_0 = ½C_0U^2 = ½10{,}5\cdot 10^{-12}\cdot 10^6 = 5{,}25\cdot 10^{-6}\ Дж/м.$

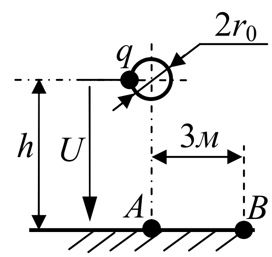


Рис. 11.29

ЗАДАЧА 11.27. Між металевою кулею радіусу $r_0 = 10\ см$ і провідною поверхнею (рис. 11.29) діє напруга $U = 500\ кВ$. Визначити поверхневу густину індукованого заряду у точках A і B, якщо $h = 4\ м$.

Відповіді: $q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 U}{\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{2h}}$; $E_A = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}$; $\sigma_A = D_A = \varepsilon_0 E_A = 5{,}6\cdot 10^{-8}\ Кл/м^2$;

$$\sigma_B = D_B = \varepsilon_0 E_B = \frac{q}{2\pi(h^2+3^2)}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+3^2}} = 2{,}87\cdot 10^{-8}\ Кл/м^2.$$

ЗАДАЧА 11.28. В прямому кутку, утвореному двома площинами провідної поверхні в повітрі знаходиться куля радіусом $R_0 = 1$ *см* із зарядом $q = 10^{-10}$ *Кл* (рис. 11.30,а). Визначити потенціал кулі по відношенню до провідної поверхні, ємність між кулею і провідним середовищем, напрям і величину сили, що діє на кулю.

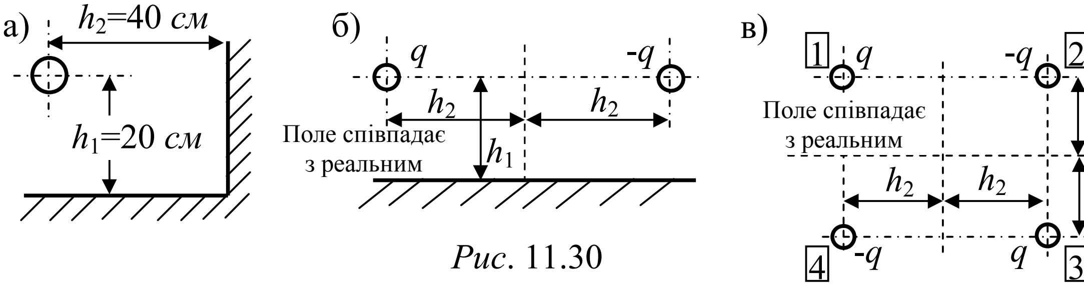


Рис. 11.30

Розв'язання

Відповідно до методу дзеркальних зображень після віддзеркалення відносно правої межі отримаємо рис. 11.30,б. Після вторинного віддзеркалення відносно нижньої межі отримаємо поле чотирьох куль в однорідному середовищі (рис. 11.30,в). Застосовуючи принцип накладання (див. задачі 11.2 і 11.3), одержуємо

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(R_0^{-1} - (2h_2)^{-1} + \left(\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}\right)^{-1} - (2h_1)^{-1}\right) = 87{,}55\ B,$$

$$C = q/\varphi_1 = 1{,}14\ n\Phi.$$

Силу, що діє на кулю, можна визначити через напруженість, яка створюється у місці розташування кулі рештою трьох зарядів. Але принцип накладання тут потрібно застосовувати у векторній формі (рис. 11.31). Для зручності розкладемо вектори напруженостей на горизонтальну *(x)* і вертикальну *(y)* складові.

$$E_{2y} = 0,\ \ E_{2x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2h_2)^2},$$

$$E_{3x} = \frac{-q\cdot\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0[(2h_1)^2 + (2h_2)^2]},\quad E_{3y} = \frac{q\cdot\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0[(2h_1)^2 + (2h_2)^2]},$$

де $\cos\alpha = \dfrac{2h_2}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}} = 0{,}8944;\quad \sin\alpha = 0{,}4473.$

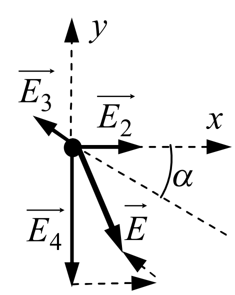


Рис. 11.31

$$E_{4x} = 0,\quad E_{4y} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2h_1)^2},$$

$$E_x = E_{2x} + E_{3x} + E_{4x} = 0{,}40\ B/м;\quad E_y = E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} = -5{,}12\ B/м;$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 5{,}13\ B/м;\quad F = q\cdot E = 10^{-10}\cdot 5{,}13 = 5{,}13\cdot 10^{-10}\ H.$$

Примітка. Якби замість кулі знаходився заряджений провідник (циліндр), паралельний куту, то можна було б обмежитися лише першим дзеркальним відображенням, а потім скористатися групами формул Максвела для двопровідної лінії.

ЗАДАЧА 11.29. Проводи двопровідної лінії, між якими діє напруга $U = 500\,В$, знаходяться в різних діелектриках, як показано на рис. 11.32. Розрахувати заряд на проводі лінії і її ємність. Геометричні розміри і властивості середовищ: $r_0 = 0{,}2\,см$, $r_1 = 20\,см$, $r_2 = 40\,см$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$.

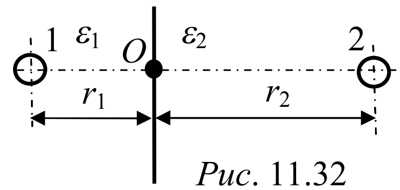


Рис. 11.32

Розв'язання

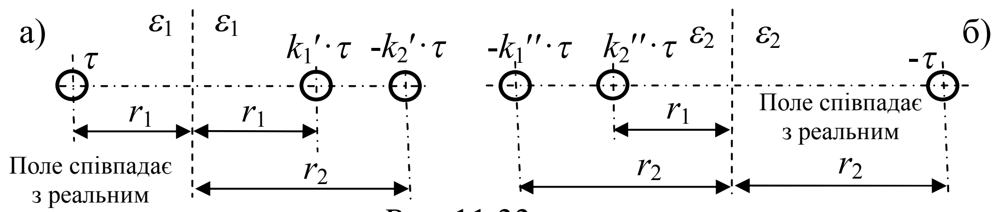


Рис. 11.33

Хай лівий провід має заряд τ, тоді правий – $-\tau$. Оскільки розрахунок поля потрібно виконати в обох середовищах, виконаємо його за допомогою двох рисунків (для кожного середовища окремо) – рис. 11.33,а і б. Коефіцієнти неповного віддзеркалення:

$$\mathrm{k1}' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = -\,0{,}333; \qquad \mathrm{k2}' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = 0{,}667;$$

$$\mathrm{k1}'' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = 0{,}333; \qquad \mathrm{k2}'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = 1{,}333.$$

Потенціал точки O (рис. 11.32) вважатимемо рівним нулю. Потенціал першого проводу обчислимо за рис. 11.33,а відповідно до принципу накладання з урахуванням (11.10,а):

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\Big(ln\frac{r_1}{r_0} + k_1'\cdot ln\frac{r_1}{2r_1} - k_2'\cdot ln\frac{r_2}{r_1 + r_2}\Big);$$

аналогічно потенціал другого проводу – за рис. 11.33,б:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\Big(-ln\frac{r_2}{r_0} - k_1''\cdot ln\frac{r_2}{2r_2} + k_2''\cdot ln\frac{r_1}{r_1 + r_2}\Big).$$

Напруга між проводами

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\varepsilon_1^{-1}\cdot\Big(ln\frac{r_1}{r_0} + k_1'\cdot ln\frac{r_1}{2r_1} - k_2'\cdot ln\frac{r_2}{r_1 + r_2}\Big) -$$

$$- \varepsilon_2^{-1}\cdot\Big(-\,ln\frac{r_2}{r_0} - k_1''\cdot ln\frac{r_2}{2r_2} + k_2''\cdot ln\frac{r_1}{r_1 + r_2}\Big)\Big] = \tau\cdot 15{,}06\cdot 10^{10}.$$

Звідси $\tau = U/15{,}06\cdot 10^{10} = 0{,}332\cdot 10^{-8}\ Кл/м$.

Ємність лінії $C_0 = \tau/U = 6{,}64\ nФ/м$.

11.5 ГРУПИ ФОРМУЛ МАКСВЕЛА. ЧАСТКОВІ ЄМНОСТІ

ЗАДАЧА 11.30. Лінія передачі (рис. 11.34) складається з трьох проводів радіусу $r_0 = 0{,}6\ см$. Висота підвісу проводів $h_1 = h_3 = 6\ м$, $h_2 = 5{,}2\ м$. Відстані між проводами по горизонталі $d_{12} = 2\ м$, $d_{23} = 1{,}6\ м$. Напруги між проводами $U_{12} = 60\ кВ$, $U_{23} = 40\ кВ$. Визначити потенціал і заряд кожного з проводів.

Розв’язання

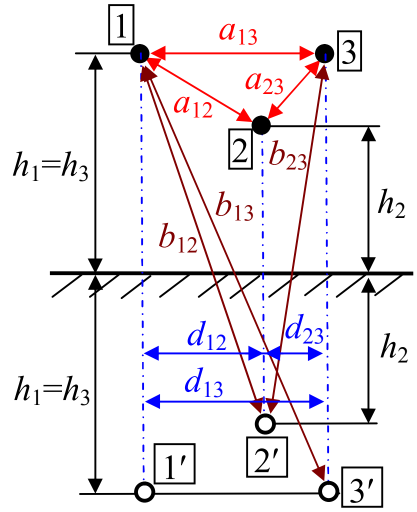


Рис. 11.34

Визначаємо відстані між проводами, а також між проводами і їх дзеркальними зображеннями (рис. 11.34):

$$a_{12}=\sqrt{(h_1-h_2)^2+d_{12}^2}=\sqrt{(6-5{,}2)^2+2^2}=2{,}13\ м,$$
$$a_{13}=\sqrt{(h_1-h_3)^2+d_{13}^2}=\sqrt{(6-6)^2+3{,}6^2}=3{,}6\ м,$$
$$a_{23}=\sqrt{(h_2-h_3)^2+d_{23}^2}=\sqrt{(5{,}2-6)^2+1{,}6^2}=1{,}79\ м,$$
$$b_{12}=\sqrt{(h_1+h_2)^2+d_{12}^2}=\sqrt{(6+5{,}2)^2+2^2}=11{,}4\ м,$$
$$b_{13}=\sqrt{(h_1+h_3)^2+d_{13}^2}=\sqrt{(6+6)^2+3{,}6^2}=12{,}5\ м,$$
$$b_{23}=\sqrt{(h_2+h_3)^2+d_{23}^2}=\sqrt{(5{,}2+6)^2+1{,}6^2}=11{,}3\ м.$$

Обчислюємо потенціальні коефіцієнти (на одиницю довжини):

$$\alpha_{11}=\alpha_{33}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{r_0}=\frac{1}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{2\cdot 6}{0{,}006}=13{,}66\cdot 10^{10}\ м/Ф,$$
$$\alpha_{22}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{r_0}=\frac{1}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{2\cdot 5{,}2}{0{,}006}=13{,}41\cdot 10^{10}\ м/Ф,$$
$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}}=\frac{1}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{11{,}4}{2{,}13}=3{,}02\cdot 10^{10}\ м/Ф,$$
$$\alpha_{13}=\alpha_{31}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b_{13}}{a_{13}}=\frac{1}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{12{,}5}{3{,}6}=2{,}24\cdot 10^{10}\ м/Ф,$$
$$\alpha_{23}=\alpha_{32}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b_{23}}{a_{23}}=\frac{1}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{11{,}3}{1{,}79}=3{,}32\cdot 10^{10}\ м/Ф.$$

Заряди проводів знайдемо за допомогою першої групи формул Максвела:
$$\begin{cases}\varphi_1=\tau_1\alpha_{11}+\tau_2\alpha_{12}+\tau_3\alpha_{13},\\ \varphi_2=\tau_1\alpha_{21}+\tau_2\alpha_{22}+\tau_3\alpha_{23},\\ \varphi_3=\tau_1\alpha_{31}+\tau_2\alpha_{32}+\tau_3\alpha_{33}.\end{cases}$$

Решту необхідних для визначення шести невідомих величин рівнянь записуємо, скориставшись додатковими умовами задачі:
$$\varphi_1-\varphi_2=U_{12},\quad \varphi_2-\varphi_3=U_{23},$$
і оскільки проводи утворюють ізольовану, не пов’язану із землею систему, то
$$\tau_1+\tau_2+\tau_3=0.$$

Розв’язавши отриману систему з шести рівнянь, знаходимо шукане:

$\tau_1=0{,}466\cdot 10^{-6}\ Кл/м$ $\tau_2=-0{,}058\cdot 10^{-6}\ Кл/м$ $\tau_3=-0{,}408\cdot 10^{-6}\ Кл/м$

$\varphi_1=52{,}8\ кВ$ $\varphi_2=-7{,}2\ кВ$ $\varphi_3=-47{,}2\ кВ.$

ЗАДАЧА 11.31. Розв’язати задачу 11.26 за допомогою груп формул Максвела.

Відповіді: $\alpha_{11}=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{r_0}=9{,}522\cdot 10^{10}\ м/Ф$; $\varphi_1=U=1000\ В$;

$\tau_1=\varphi_1/\alpha_{11}=1{,}05\cdot 10^{-8}\ Кл/м$; $C_0=C_{11}=10{,}5\ нФ/м.$

ЗАДАЧА 11.32. Визначити часткові і робочу (C_0) ємності одного метра двопровідної повітряної лінії електропередачі (рис. 11.35), якщо $h = d = 2$ *м*, $r_0 = 1$ *см*.

Відповіді: $a_{12} = d = 2$ *м*,

$b_{12} = \sqrt{d^2 + (2h)^2} = 2\sqrt{5}$ *м*;

$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 10{,}77 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*,

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1{,}45 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*;

$\beta_{11} = \beta_{22} = 9{,}46 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*,

$\beta_{12} = \beta_{21} = -1{,}27 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*;

$C_{11} = C_{22} = 8{,}19$ *пФ/м*, $C_{12} = C_{21} = 1{,}27$ *пФ/м*; $C_0 = 5{,}37$ *пФ/м*.

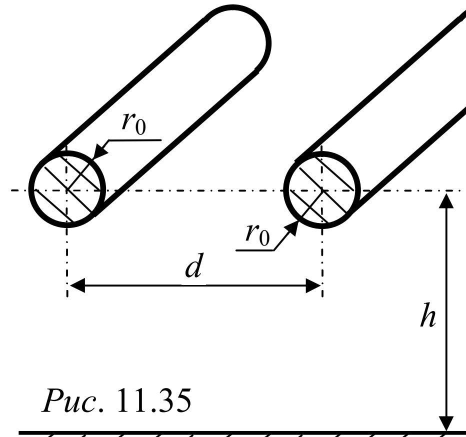


Рис. 11.35

ЗАДАЧА 11.33. Визначити часткові ємності трипровідної повітряної лінії електропередачі (рис. 11.36), якщо $r_0 = 1$ *см*, $h = 6$ *м*, $d = 2$ *м*.

Відповіді: $a_{12} = a_{13} = a_{23} = d = 2$ *м*,

$b_{12} = b_{23} = \sqrt{(0{,}5d)^2 + (2h + 0{,}5d\sqrt{3})^2} = 13{,}77$ *м*,

$b_{13} = \sqrt{d^2 + (2h)^2} = 12{,}17$ *м*,

$\alpha_{11} = \alpha_{33} = 12{,}76 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\alpha_{22} = 13{,}21 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*,

$\alpha_{12} = \alpha_{23} = 3{,}47 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\alpha_{13} = 3{,}25 \cdot 10^{10}$ *м/Ф*,

$\beta_{11} = \beta_{33} = 8{,}783 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*, $\beta_{22} = 8{,}54 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*,

$\beta_{12} = \beta_{23} = -1{,}852 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*, $\beta_{13} = -1{,}732 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*,

$C_{11} = C_{33} = 5{,}2$ *пФ/м*, $C_{22} = 4{,}836$ *пФ/м*,

$C_{12} = C_{23} = 1{,}852$ *пФ/м*, $C_{13} = 1{,}732$ *пФ/м*.

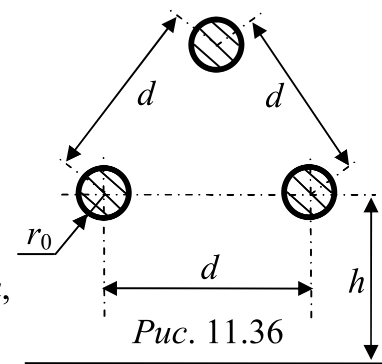


Рис. 11.36

ЗАДАЧА 11.34. Власні і часткові ємності трижильного кабелю, відповідно, складають: $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0{,}064$ *мкФ/км*, $C_{12} = C_{23} = C_{13} = 0{,}076$ *мкФ/км*. При випробуванні кабелю в лабораторії одна з жил кабелю була заземлена, друга мала потенціал $\varphi_2 = 2$ *кВ*, третя – $\varphi_3 = -3$ *кВ*. Оболонка кабелю не заземлена.

Знайти потенціал оболонки і заряди жил.

Розв'язання

Відповідно до умов задачі складемо схему рис. 11.37, для якої на підставі третьої групи формул Максвела

$$\begin{cases} \tau_1 = \varphi_1' C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13}, \\ \tau_2 = U_{21} C_{21} + \varphi_2' C_{22} + U_{23} C_{23}, \\ \tau_3 = U_{31} C_{31} + U_{32} C_{32} + \varphi_3' C_{33}, \end{cases}$$

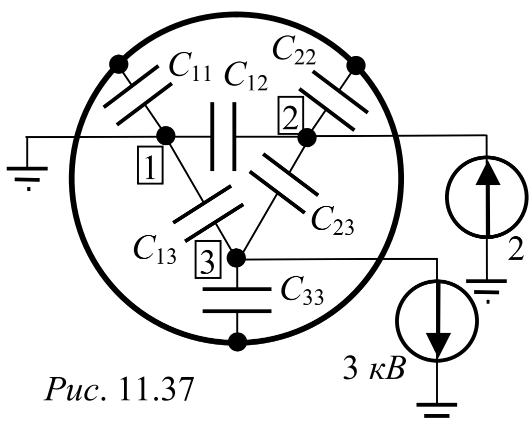


Рис. 11.37

де потенціали жил визначаються по відношенню до оболонки.

Якщо оболонку розглядати як четвертий провідник, то можна скласти рівняння і для неї з урахуванням того, що вона не з'єднана із землею, а значить, не несе заряду: $\tau_4 = (\varphi_4 - \varphi_1)C_{11} + (\varphi_4 - \varphi_2)C_{22} + (\varphi_4 - \varphi_3)C_{33} = 0.$

Тут потенціали визначаються по відношенню до землі.

Оскільки $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ і $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2$ *кВ*, $\varphi_3 = -3$ *кВ*, то

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3} = \frac{2000 - 3000}{3} = -333\ В.$$

Повертаємося до системи рівнянь і з урахуванням

$\varphi_1' = \varphi_1 - \varphi_4 = 333\ В$, $U_{21} = -U_{12} = 2000\ В$, $U_{13} = -U_{31} = 3000\ В$,

$U_{23} = -U_{32} = 5000\ В$, $\varphi_2' = \varphi_2 - \varphi_4 = 2333\ В$, $\varphi_3' = \varphi_3 - \varphi_4 = -2667\ В$

одержуємо $\tau_1 = (333\cdot 0{,}064 - 2000\cdot 0{,}076 + 3000\cdot 0{,}076)\cdot 10^{-6} = 97\cdot 10^{-6}$ *Кл/км*,

$\tau_2 = (2000\cdot 0{,}076 + 2333\cdot 0{,}064 + 5000\cdot 0{,}076)\cdot 10^{-6} = 681\cdot 10^{-6}$ *Кл/км*,

$\tau_3 = (-3000\cdot 0{,}076 - 5000\cdot 0{,}076 - 2667\cdot 0{,}064)\cdot 10^{-6} = -779\cdot 10^{-6}$ *Кл/км*.

ЗАДАЧА 11.35. Розрахувати часткову і робочу ємності двопровідної екранованої лінії (рис. 11.38), якщо: $r_0 = 2$ *мм*, $a = 4$ *см*, $r_1 = 10$ *см*, $\varepsilon = 4$.

При розрахунку прийняти, що оболонка (екран) заземлена.

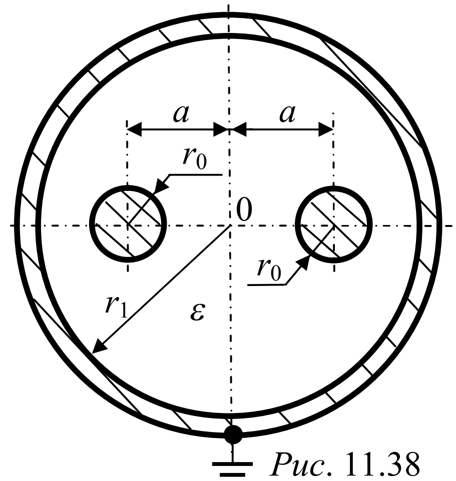


Рис. 11.38

Розв'язання

Приймемо, що під дією джерела напруги U, яке увімкнене до проводів, відбулося розділення зарядів між першим (лівим) проводом і другим (правим). Тоді перший провід несе заряд $\tau_1 = \tau$ на одиницю довжини лінії, а другий – $\tau_2 = -\tau$.

Для подальшого розрахунку скористаємося методом дзеркальних зображень для циліндру. Розрахункова схема для поля усередині циліндра має вид рис. 11.39, причому $a\cdot b = r_1^2$.

В нашому прикладі $b = \dfrac{r_1^2}{a} = \dfrac{10^2}{4} = 25$ *см*.

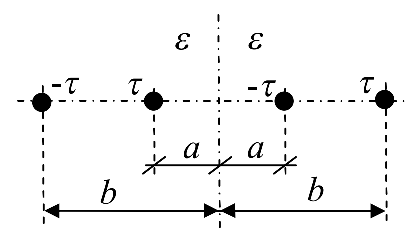


Рис. 11.39

Перша група формул Максвела для системи заряджених тіл, розташованих поблизу циліндричної провідної поверхні:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \tau_1\alpha_{11} + \tau_2\alpha_{12}, \\ \varphi_2 = \tau_1\alpha_{21} + \tau_2\alpha_{22}, \end{cases}$$

де $$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{b-a}{r_0} = \frac{10^{12}}{2\pi\cdot 4\cdot 8{,}85} ln\frac{25-4}{0{,}2} = 2{,}091\cdot 10^{10}\ м/Ф,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{b+a}{2a} = \frac{10^{12}}{2\pi\cdot 4\cdot 8{,}85} ln\frac{25+4}{2\cdot 4} = 0{,}579\cdot 10^{10}\ м/Ф.$$

Друга група формул Максвела: $\begin{cases} \tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2, \\ \tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2, \end{cases}$

де $\beta_{11} = \beta_{22} = \dfrac{\alpha_{22}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}} = \dfrac{2{,}091\cdot 10^{-10}}{2{,}091^2 - 0{,}579^2} = 0{,}518\cdot 10^{-10}$ *Ф/м*,

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{-\alpha_{21}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}} = \frac{-0{,}579\cdot 10^{-10}}{2{,}091^2 - 0{,}579^2} = -\,0{,}143\cdot 10^{-10}\ Ф/м.$$

Третя група формул Максвела: $\begin{cases}\tau_1 = U_{10}C_{11} + U_{12}C_{12},\\ \tau_2 = U_{21}C_{21} + U_{20}C_{22},\end{cases}$

де $C_{11} = C_{22} = \beta_{11} + \beta_{12} = 0{,}375\cdot 10^{-10}$ *Ф/м*, $C_{12} = C_{21} = -\,\beta_{12} = 0{,}143\cdot 10^{-10}$ *Ф/м*.

Часткові ємності лінії показані на рис. 11.40.

Робоча ємність двопровідної екранованої лінії на одиницю довжини:

$$C_0 = C_{12} + \frac{C_{11}\cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = (0{,}143 + \frac{0{,}375}{2})\cdot 10^{-10} =$$

$$= 0{,}331\cdot 10^{-10}\ Ф/м.$$

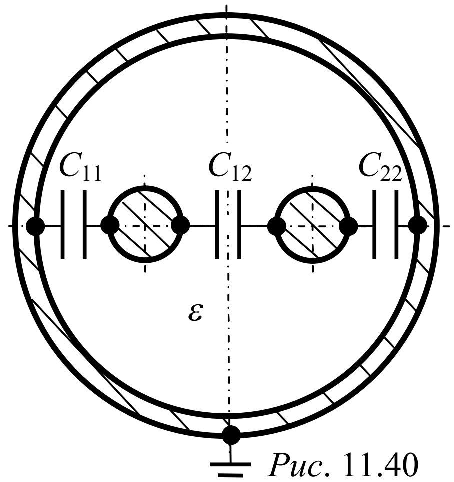


Рис. 11.40

ЗАДАЧА 11.36. В системі з двох провідників (рис. 11.41), розташованих у повітрі поблизу провідної поверхні, діє джерело ЕРС $E = 127$ *В*, причому другий провідник з'єднаний із землею. Геометричні розміри:

$r_0 = 6$ *мм*, $d_{12} = 1$ *м*, $h_1 = 3$ *м*, $h_2 = 4$ *м*.

Визначити заряди проводів.

Відповіді: $a_{12} = \sqrt{2}$ *м*, $b_{12} = 5\sqrt{2}$ *м*,
$\alpha_{11} = 12{,}4\cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\alpha_{22} = 12{,}9\cdot 10^{10}$ *м/Ф*,
$\alpha_{12} = 2{,}9\cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\varphi_1 = 127$ *В*, $\varphi_2 = 0$,
$\tau_1 = 0{,}852\cdot 10^{-11}$ *Кл/м*, $\tau_2 = -\,0{,}191\cdot 10^{-11}$ *Кл/м*.

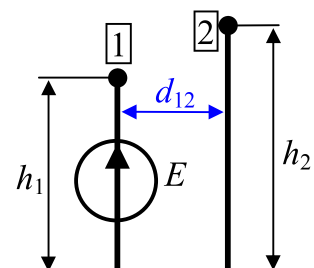


Рис. 11.41

ЗАДАЧА 11.37. Визначити потенціали і заряди системи проводів, поданої на рис. 11.42, де рубильники 1 і 2 замкнені, а 3 – розімкнений, $E = 10$ *кВ*, радіус проводів $r_0 = 5$ *мм*.

Як зміниться розв'язання, якщо спочатку провід 2 від'єднується від землі, потім провід 1 відмикається від джерела і, нарешті, провід 3 з'єднується із землею.

Відповіді: до перемикань
$\varphi_1 = 10$ *кВ*, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0{,}605$ *кВ*,
$\tau_1 = 80$ *мкКл/км*, $\tau_2 = -\,12$ *мкКл/км*, $\tau_3 = 0$,
$\alpha_{11} = \alpha_{33} = 11{,}5\cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\alpha_{22} = 12{,}3\cdot 10^{10}$ *м/Ф*,
$\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0{,}2\cdot 10^{10}$ *м/Ф*, $\alpha_{13} = 0{,}106\cdot 10^{10}$ *м/Ф*.

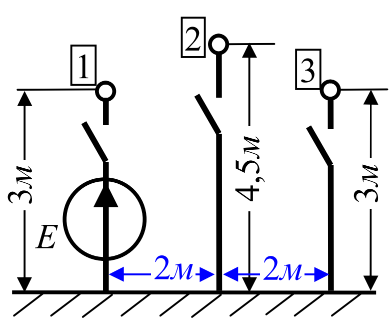


Рис. 11.42

Після перемикань $\tau_1' = \tau_1$, $\tau_2' = \tau_2$, $\varphi_3' = 0$. Далі з першої групи формул Максвела з тими ж потенціальними коефіцієнтами визначаємо:

$$\varphi_1' = 9950\ B,\quad \varphi_2' = -88\ B,\quad \tau_3' = -4{,}76\ мкКл/км.$$

Додатково на тему підрозділу 11.5 див. задачу 11.48, розв'язану за допомогою ПЕОМ в системі MathCAD.

11.6 СИМЕТРИЧНІ ПОЛЯ В СЕРЕДОВИЩАХ З НЕОДНОРІДНИМ ДІЕЛЕКТРИКОМ ($\varepsilon \neq$ const)

В таких середовищах відносна діелектрична проникність ε залежить від координат простору, наприклад $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Оскільки

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E},\ \text{ то }\ \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}(\varepsilon - 1),\ \text{ причому }\ \rho_{зв} = -\,div\,\vec{P}.$$

Часто діелектрична проникність задається за допомогою залежності $D(E)$ або $P(E)$, представленої графічно або аналітично.

ЗАДАЧА 11.38. Діелектрик плоского конденсатора неоднорідний $\varepsilon = \varepsilon(x)$, залежність для вектора поляризації $P = P_x = (a + bx^2)P_0$, де $a = 1$, $b = 0{,}05\ см^{-2}$, $P_0 = 3{,}5\cdot 10^{-10}\ Кл/см^2$.

Визначити густину зв'язаного заряду.

Розв'язання

$$\rho_{зв} = -\,div\,\vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -2bxP_0 = -2\cdot 0{,}05\cdot x\cdot 3{,}5\cdot 10^{-10} = -0{,}35\cdot 10^{-10} x\ Кл/см^3,$$

де $x\ [см]$.

ЗАДАЧА 11.39. Плоский конденсатор заповнений неоднорідним діелектриком з $\varepsilon(x) = 4d/(d + x)$. Пластини конденсатора увімкнені до джерела постійної напруги $U = 1\ кВ$.

Визначити залежність від координати x напруженості поля і значення вектора поляризации. Знайти ємність і заряд конденсатора при заданій напрузі. Відстань між пластинами $d = 0{,}2\ см$, їх площа $S = 4\ см^2$.

Розв'язання

З граничної умови одержуємо $D = \sigma = \dfrac{q}{S} = \varepsilon\varepsilon_0 E$,

звідки $E(x) = \dfrac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \dfrac{q(d + x)}{\varepsilon_0 S\cdot 4d}$.

Напруга $U = \int\limits_0^d E dx = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S\cdot 4d}\left(dx + \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^d = \dfrac{3qd}{8\varepsilon_0 S}$.

Ємність конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{8\varepsilon_0 S}{3d} = \frac{8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-14}\cdot 4}{3\cdot 0{,}2} = 4{,}75\cdot 10^{-12}\ Ф = 4{,}75\ пФ.$$

Заряд і напруженість поля

$$q = \frac{8\varepsilon_0 SU}{3d} = CU = 4{,}75\cdot 10^{-12}\cdot 1000 = 4{,}75\cdot 10^{-9}\ Кл,$$

$$E(x) = \frac{8\varepsilon_0 SU(d+x)}{3d\varepsilon_0 S4d} = \frac{2U(d+x)}{3d^2} = 16{,}7\cdot(0{,}2+x)\ кВ/см,\ \text{де}\ x\ [см].$$

Вектор поляризації

$$P(x) = \varepsilon_0 E(\varepsilon - 1) = \frac{2U\varepsilon_0(d+x)}{3d^2}\left(\frac{4d}{d+x} - 1\right) = \frac{2U\varepsilon_0}{3d^2}(3d - x) =$$

$$= 14{,}75\cdot10^{-10}\cdot(0{,}6 - x)\ Кл/см^2.$$

Густина зв'язаного заряду $\rho_{зв} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\dfrac{\partial P_x}{\partial x} = 14{,}75\cdot10^{-10}\ Кл/см^3$.

ЗАДАЧА 11.40. Між жилою коаксіального кабелю радіусом $r_1 = 1\ см$ і оболонкою з внутрішнім радіусом $r_2 = 4\ см$ міститься діелектрик з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = \dfrac{A}{r^2}$, де $A = 16\ см^2$, $r[см]$. При постійній напрузі $U = 1\ кВ$ визначити напруженість поля, електричне зміщення, поляризацію і зв'язаний об'ємний заряд, а також ємність на одиницю довжини кабелю.

Розв'язання

Відповідно до (11.5) $D = \dfrac{\tau}{2\pi r}$, тоді напруженість поля

$$E(r) = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r\, A/r^2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 A} r. \qquad (11.30)$$

Напруга $U = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 A}(r_2^2 - r_1^2)$, звідки $\tau = \dfrac{U\cdot 4\pi\varepsilon_0 A}{r_2^2 - r_1^2}$, (11.31)

ємність $C_0 = \dfrac{\tau}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 A}{r_2^2 - r_1^2} = \dfrac{4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-14}\cdot16}{4^2 - 1^2} = 1{,}19\cdot10^{-12}\ Ф/см = 0{,}119\ нФ/м.$

Після підстановки (11.31) в (11.30) знаходимо напруженість поля

$$E(r) = \frac{2U}{r_2^2 - r_1^2} r = 133{,}3r\ В/см,\ \text{де}\ r\ [см].$$

Електричне зміщення

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \frac{16}{r^2}\cdot 8{,}85\cdot10^{-14}\cdot133{,}3r = \frac{188{,}8}{r}\cdot10^{-12}\ Кл/см^2.$$

Поляризація

$$P = \varepsilon_0 E(\varepsilon - 1) = 8{,}85\cdot10^{-14}\cdot133{,}3r\left(\frac{16}{r^2} - 1\right) = \left(\frac{188{,}8}{r} - 11{,}8r\right)\cdot10^{-12}\ Кл/см^2.$$

Об'ємна густина зв'язаного заряду

$$\rho_{зв} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[(188{,}8 - 11{,}8r^2)\cdot10^{-12}] = 23{,}6\cdot10^{-12}\ Кл/см^3.$$

ЗАДАЧА 11.41. У циліндричного конденсатора радіус жили $r_1 = 1\ см$, внутрішній радіус оболонки $r_2 = 5\ см$. Простір між жилою і оболонкою заповнений сегнетоелектриком, для якого залежність модуля напруженості від модуля електричного зміщення визначається виразом

$$E = 10^{15}(0{,}45D^2 + 0{,}2\cdot 10^{-6}D),\ \text{де}\ E\ [В/см],\ D\ [Кл/см^2].$$

Конденсатор увімкнений на постійну напругу $U = 200$ *В*.

Нехтуючи краєвим ефектом і прийнявши потенціал жили нульовим, знайти залежність $E(r)$ і $\varphi(r)$. Обчислити ємність одиниці довжини конденсатора.

Розв'язання

За формулою (11.5) $D = \dfrac{\tau}{2\pi r}$, тоді

$$E(r) = 10^{15}(0{,}45D^2 + 0{,}2\cdot 10^{-6}D) = 10^{15}\left(0{,}45\cdot \frac{\tau^2}{4\pi^2 r^2} + 0{,}2\cdot 10^{-6}\cdot \frac{\tau}{2\pi r}\right). \quad (11.32)$$

Прикладена напруга

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = 10^{15}\left[\frac{0{,}45\tau^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + 0{,}2\cdot 10^{-6}\frac{\tau}{2\pi} ln\frac{r_2}{r_1}\right],$$

$$2\cdot 10^{-13} = \tau^2\cdot 9{,}12\cdot 10^{-3} + \tau\cdot 0{,}0512\cdot 10^{-6}.$$

З цього рівняння $\tau = 0{,}2653\cdot 10^{-5}$ *Кл/см*.

Підставивши в (11.32) значення τ, знаходимо

$$E(r) = \frac{80{,}23}{r^2} + \frac{84{,}45}{r}\ В/см, \qquad \varphi(r) = -\int E(r)dr = \frac{80{,}23}{r} - 84{,}45 ln(r) + A.$$

Приймемо, що $\varphi = 0$ при $r = r_1 = 1$ *см*, тоді $0 = 80{,}23 - 84{,}45 ln(r_1) + A$;

$A = 84{,}45 ln(r_1) - 80{,}23$; $\quad \varphi(r) = \dfrac{80{,}23}{r} + 84{,}45 ln\dfrac{1}{r} - 80{,}23$ *В*.

Ємність конденсатора $C_0 = \dfrac{\tau}{U} = \dfrac{0{,}2653\cdot 10^{-5}}{200} = 1{,}327\cdot 10^{-8}$ *Ф/см*.

11.7 ЗАСТОСУВАННЯ ПЕОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Застосовувати ПЕОМ доцільно для розв'язання задач, що вимагають великого об'єму обчислювальної роботи. Нижче подані приклади розв'язання деяких подібних задач.

ЗАДАЧА 11.42. Розв'язати задачу 11.17 за допомогою ПЕОМ. Текст програми див. в ДОДАТКУ до розділу 11.

ЗАДАЧА 11.43. Розв'язати задачу 11.23 за допомогою ПЕОМ. Текст програми див. в ДОДАТКУ до розділу 11.

ЗАДАЧА 11.44. Розв'язати задачу 11.24 за допомогою ПЕОМ. Текст програми див. в ДОДАТКУ до розділу 11.

ЗАДАЧА 11.45. В ізоляції коаксіального кабелю (рис. 11.43) є рівномірно розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = 10^{-10}$ *Кл/м*^{3}. Внутрішній і зовнішній радіуси діелектричного шару – $r_1 = 1$ *см* і $r_2 = 10$ *см*, довжина $l = 100$ *м*, відносна діелектрична проникність – $\varepsilon = 4$. Визначити енергію, що запасена в електричному полі.

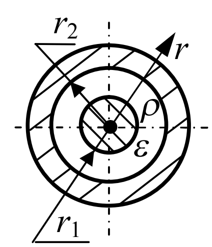


Рис. 11.43

Розв'язання

Задачу розв'яжемо, проінтегрувавши рівняння Лапласа для області $r_1 < r < r_2$. Аналогічно задачі 11.18 записуємо:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2 + A_1 ln(r) + A_2; \qquad E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} r - \frac{A_1}{r}.$$

Граничні умови: $\varphi(r{=}r_2) = 0$, $E(r{=}r_1) = 0$. З отриманої системи рівнянь знаходимо постійні інтегрування A_1 і A_2.

Енергію, що запасена в електричному полі, можна знайти двома способами.

В **першому способі** скористаємося формулою для енергії заряду dq шару завтовшки dr, розташованого на відстані r від осі:

$$dW = 0{,}5dq \cdot \varphi = 0{,}5\rho \cdot 2\pi rl \cdot dr \cdot \varphi;$$

$$W = \int_V dW = \int_{r_1}^{r_2} \rho\pi rl \cdot \varphi(r) dr = 0{,}533 \text{ } Дж.$$

В **другому способі** застосуємо формулу для об'ємної густини енергії електростатичного поля: $w = 0{,}5\varepsilon\varepsilon_0 E^2$.

$$wdV = 0{,}5\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot 2\pi rl \cdot dr = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot \pi rl \cdot dr,$$

$$W = \int_V wdV = \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon\varepsilon_0 \pi rl \cdot (E(r))^2 dr = 0{,}533 \text{ } Дж.$$

MathCAD-програма і відповіді подані в ДОДАТКУ до розділу 11.

Примітка. Відповіді для потенціалу і енергії в буквеному вигляді наступні:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{r^2}{2} + r_1^2 ln\frac{r}{r_2} + \frac{r_2^2}{2}\right); \quad W = \frac{\rho^2\pi l}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{3r_1^4 + r_2^4}{8} - 0{,}5r_1^2 r_2^2 - 0{,}5r_1^4 ln\frac{r_1}{r_2}\right).$$

ЗАДАЧА 11.46. Розв'язати задачу 11.12 за допомогою ПЕОМ. Текст програми див. в ДОДАТКУ до розділу 11.

ЗАДАЧА 11.47. Між проводами двопровідної лінії електропередачі (рис. 11.44) діє напруга $U = 220$ *кВ*. Побудувати графік залежності від координати x напруженості поля на осі, що з'єднує проводи. Визначити максимальну напруженість поля, якщо $d = 2$ *м*, $r_0 = 1$ *см*. Зміщенням електричних і геометричних осей нехтувати.

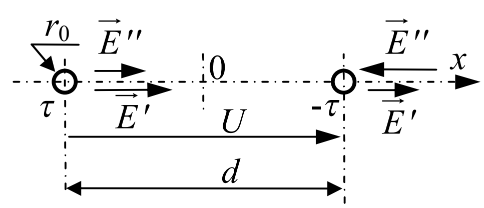


Рис. 11.44

Розв'язання

Напруженість електростатичного поля, яке створюється лівим і правим проводами лінії окремо на осі x, у відповідності до (11.5):

$$E' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \, |\, 0{,}5d + x \,|}, \qquad E'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \, |\, 0{,}5d - x \,|}.$$

Формули для потенціалу будь-якої точки в просторі між проводами у відповідності до (11.10):

$$\varphi' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{1}{0{,}5d + x}, \quad \varphi'' = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{1}{0{,}5d - x}, \quad \varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{0{,}5d - x}{0{,}5d + x}.$$

Тоді напруга між проводами

$$U = \varphi(x{=}{-}0{,}5d{+}r_0) - \varphi(x{=}0{,}5d{-}r_0) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{0{,}5d - (-0{,}5d + r_0)}{0{,}5d + (-0{,}5d + r_0)} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{0{,}5d - (0{,}5d - r_0)}{0{,}5d + (0{,}5d - r_0)} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \left(\frac{d - r_0}{r_0}\right)^2 =$$

$$= \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} ln \left(\frac{d - r_0}{r_0}\right).$$

Звідси заряд проводу лінії $\tau = \dfrac{\pi\varepsilon_0 U}{ln \dfrac{d - r_0}{r_0}}$.

Формула ємності двопровідної лінії на одиницю довжини

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{ln \dfrac{d - r_0}{r_0}}.$$

В просторі між проводами, як видно з рис. 11.44, напруженості від дії окремих проводів складаються, а зовні – віднімаються, усередині проводів поле відсутнє:

при $-0{,}5d + r_0 < x < 0{,}5d - r_0 \quad E = E' + E''$,

при $|x| > 0{,}5d + r_0 \quad E = E' - E''$.

Як видно з графіка, поданого в MathCAD-програмі, максимальне значення напруженості спостерігається в точці з координатою $x = 0{,}5d - r_0$ (на поверхні проводу): $E_{max} = E(x{=}0{,}5d{-}r_0) = 21$ *кВ/см*.

MathCAD-програма і відповіді подані в ДОДАТКУ до розділу 11.

ЗАДАЧА 11.48. В системі проводів, розташованих в повітрі поблизу провідної поверхні, діють два джерела ЕРС, як показано на рис. 11.45: $E_1 = 5$ *кВ*, $E_2 = 2$ *кВ*. Радіуси всіх проводів однакові і становлять $r_0 = 10$ *мм*. Висота підвісу проводів $h_1 = 5$ *м*, $h_2 = 7$ *м*, $h_3 = 6$ *м*. Відстані між провідниками по горизонталі $d_{12} = 3$ *м*, $d_{23} = 2$ *м*.

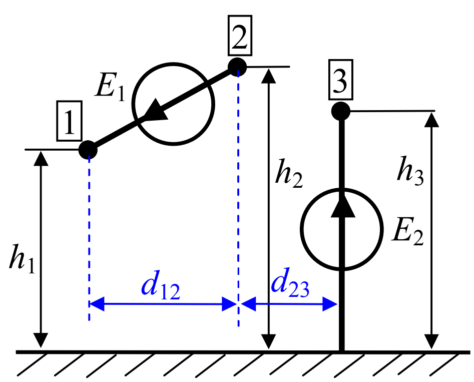


Рис. 11.45

Визначити потенціал і заряд на одиницю довжини кожного провідника. Додатково обчислити часткові ємності системи провідників.

Розв'язання задачі здійснюється за алгоритмом і за формулами задачі 11.30. MathCAD-програма і відповіді подані у ДОДАТКУ до розділу 11.

Стор. 524-530 – див. файл «Додаток до розділу 11».