

## 8 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 8.1 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСТАЛЕНОМУ РЕЖИМІ

#### 8.1.1 Основні теоретичні положення

Пристрої або електричні кола, в яких струми  $i(x,t)$  і напруги  $u(x,t)$  є функціями не лише часу  $t$ , але і залежать від координати  $x$ , називають *довгими лініями* або *лініями з розподіленими параметрами* (ЛРП). Чинниками, які обумовлюють розподіленість параметрів, є значна протяжність пристрою в просторі, висока напруга, висока частота. Прикладами ЛРП є: лінії електропередач напругою 110 кВ і вище, лінії зв'язку, кабель телеантени, пристрої затримки сигналів, гірлянди ізоляторів.

Вихідними характеристиками або *первинними параметрами* довгих ліній є:

- $r_0$ , Ом/км – подовжній опір лінії на одиниці довжини;
- $g_0$ , См/км – поперечна провідність лінії, причому  $g_0 \neq r_0^{-1}$ ;
- $L_0$ , Гн/км і  $C_0$ , Ф/км, відповідно, – індуктивність лінії та ємність між проводами на одиниці довжини лінії.

Якщо параметри  $r_0$ ,  $g_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$  однакові по всій довжині лінії, то вона називається *однорідною*. У довідковій літературі існують формули, по яких можна розрахувати первинні параметри лінії по відомих конструктивних параметрах.

Найбільш загальні диференціальні рівняння *двопровідної* лінії, які справедливі для будь-якого режиму роботи, мають вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Якщо ж лінія працює при синусоїдних струмах і напругах частотою  $\omega$ , то рівняння спрощують, зводячи їх в комплексній формі до одного диференціального рівняння другого порядку з нульовою правою частиною. Розв'язання таких рівнянь можна записати для діючих і миттєвих значень напруги і струму у будь-якій точці, віддаленій на відстань  $x$  від початку лінії або на відстань  $y$  від її кінця:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x} = \underline{U}_{3\phi} + \underline{U}_{np}; \\ \underline{I}(x) = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} [\gamma \underline{A}_1 e^{\gamma x} - \gamma \underline{A}_2 e^{-\gamma x}] = -\underline{I}_{3\phi} + \underline{I}_{np}; \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \sqrt{2} A_1 e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_{3\phi} + \beta x) + \sqrt{2} A_2 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_{np} - \beta x); \\ i(x,t) = -\sqrt{2} \frac{A_1}{Z_C} e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_{3\phi} - \varphi_C + \beta x) + \sqrt{2} \frac{A_2}{Z_C} e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_{np} - \varphi_C - \beta x); \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \underline{ch} \gamma x - \underline{Z}_C \underline{I}_1 \underline{sh} \gamma x; \\ \underline{I}(x) = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \underline{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \underline{ch} \gamma x; \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \underline{ch} \gamma y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \underline{sh} \gamma y; \\ \underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \underline{sh} \gamma y + \underline{I}_2 \underline{ch} \gamma y. \end{cases} \quad (8.4)$$

Тут:  $\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0$ , Ом/км – подовжній комплексний опір лінії;  
 $\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$ , См/км – поперечна комплексна повідність;  
 $\underline{Z}_C = Z_C \cdot e^{j\varphi_C} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ , Ом – характеристичний (хвильовий) опір лінії;

$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta$ , 1/км – коефіцієнт поширення хвилі в лінії;

$\alpha$ , Нн/км – коефіцієнт згасання хвилі;

$\beta$ , рад/км – коефіцієнт фази хвилі в лінії;

$A_1, A_2, \psi_{np}, \psi_{ze}$  – постійні інтегрування;

$U_1, U_2, I_1, I_2$  – напруга та струм на початку і в кінці лінії, відповідно.

Величини  $\underline{Z}_C$  і  $\gamma$  називають *вторинними параметрами* лінії, їх можна розрахувати через первинні параметри  $r_0, g_0, L_0, C_0$ , і навпаки.

З рівнянь (8.3) для миттєвих значень виходить, що в будь-якому перерізі лінії струм і напругу можна розглядати як накладання двох зустрічних хвиль – прямої (падаючої) і зворотної (відбитої), які затухають при поширенні. Іншими словами: у лінії мають місце хвильові процеси, причому:

$$u(x,t) = u_{np} + u_{ze}; \quad i(x,t) = i_{np} - i_{ze}. \quad (8.5)$$

Електромагнітну хвилю, яка поширюється по лінії, можна охарактеризувати напругою, струмом, довжиною хвилі  $\lambda$  і фазовою швидкістю її поширення  $v$ :

$$\lambda = 2\pi/\beta = v/f, \quad v = \omega/\beta. \quad (8.6)$$

Оскільки коефіцієнт фази  $\beta$  виражається через  $\omega, \underline{Z}_0, \underline{Y}_0$ , то довжина хвилі і швидкість її поширення залежать від частоти і параметрів самої лінії.

Для повітряних ліній характерно:

$$Z_C > 150 \text{ Ом}, \quad v \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = c = 300 \cdot 10^3 \text{ км/с},$$

для кабельних ліній зазвичай:  $Z_C < 120 \div 150 \text{ Ом}, \quad v \approx \frac{1}{2}c = 150 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$

Вхідний опір і параметри лінії можуть бути визначені за її конструктивними параметрами (за довідковими даними) або за результатами дослідів неробочого ходу і короткого замикання ( $\underline{Z}_H$  – опір навантаження,  $l$  – довжина лінії):

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C \cdot \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C \cdot \underline{th} \gamma l}{\underline{Z}_H \cdot \underline{th} \gamma l + \underline{Z}_C} = \underline{Z}_{HX} \cdot \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{K3}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{HX}}; \quad \underline{Z}_{HX} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{th} \gamma l}; \quad \underline{Z}_{K3} = \underline{Z}_C \underline{th} \gamma l.$$

Через опори  $\underline{Z}_{HX}$  і  $\underline{Z}_{K3}$  вторинні, а потім і первинні параметри лінії визначаються за формулами:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{HX} \cdot \underline{Z}_{K3}}; \quad \underline{th} \gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{K3}}{\underline{Z}_{HX}}}; \quad \frac{1 + \underline{th} \gamma l}{1 - \underline{th} \gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l}, \quad (8.7)$$

$$\gamma \cdot \underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0; \quad \gamma / \underline{Z}_C = \underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0. \quad (8.8)$$

Відношення напруги падаючої хвилі до напруги відбитої хвилі в кінці лінії називається *коефіцієнтом відбиття*:

$$\underline{n} = \frac{A_1 e^{\gamma l}}{A_2 e^{-\gamma l}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C}. \quad (8.9)$$

**Співвідношення для ліній при узгодженому навантаженні  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ :**

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C; \quad \eta = e^{-2\alpha l}; \quad \begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 e^{\gamma y} = \underline{U}_2 \cdot e^{\alpha y} \cdot e^{j\beta y}; \\ \underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \cdot e^{\gamma y} = \underline{I}_2 \cdot e^{\alpha y} \cdot e^{j\beta y}. \end{cases} \quad (8.10)$$

У техніці зв'язку, де можливі сигнали широкого діапазону частот, розрізняють *лінії без спотворень сигналів* (ЛБС), в яких сигнали на всіх частотах поширюються з однаковою швидкістю і затухають в рівній мірі, і *лінії без втрат* (ЛБВ), в яких  $\omega L_0 \gg r_0$ ,  $\omega C_0 \gg g_0$  і величинами  $r_0$ ,  $g_0$  можна знехтувати.

**Співвідношення для ЛБС:**

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}; \quad \alpha = \sqrt{r_0 g_0} \neq f(\omega), \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \neq f(\omega),$$

характеристичний опір  $\underline{Z}_C = \sqrt{L_0 / C_0}$  резистивний. (8.11)

**Співвідношення для ЛБВ:**  $r_0 = 0$ ,  $g_0 = 0$ ;  $\alpha = 0 \neq f(\omega)$ ,

$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ ;  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \neq f(\omega)$ ; ЛБВ є окремим випадком ЛБС;

характеристичний опір  $\underline{Z}_C = \sqrt{L_0 / C_0}$  резистивний;

основні рівняння ЛБВ: 
$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin \beta y; \\ \underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y; \end{cases} \quad (8.12)$$

вхідний опір ЛБВ:

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \underline{Z}_C \cdot \operatorname{tg} \beta l}{\underline{Z}_H \cdot j \operatorname{tg} \beta l + \underline{Z}_C}, \quad \underline{Z}_{HX} = -j \frac{\underline{Z}_C}{\operatorname{tg} \beta l}; \quad \underline{Z}_{K3} = j \underline{Z}_C \operatorname{tg} \beta l. \quad (8.13)$$

У курсі ТОЕ основи теорії ЛРП розглядаються стосовно однорідних двопровідних ліній, що працюють при синусоїдних напругах і струмах. Всі розрахункові співвідношення можуть бути поширені на симетричні трифазні лінії з урахуванням однієї фази, а також на лінії постійного струму. Лініям постійного струму індуктивність  $L_0$  і ємність  $C_0$  також властиві, але не проявляють себе. Тут враховуються лише параметри  $r_0$ ,  $g_0$ .

Лінія із розподіленими параметрами є симетричним чотириполюсником. Тому, зіставляючи рівняння ЛРП (8.4) при  $y = l$  з рівняннями чотириполюсника форми  $A$  (див. розд. 5)

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2,$$

отримуємо наступні співвідношення:

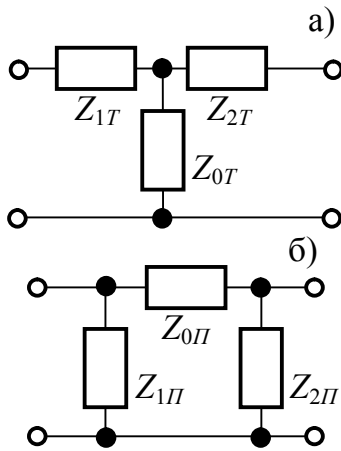


Рис. 8.1

$$\underline{A} = \underline{D} = ch\gamma l, \quad \underline{B} = \underline{Z}_C \cdot sh\gamma l, \quad \underline{C} = \frac{sh\gamma l}{\underline{Z}_C}. \quad (8.14)$$

ЛРП як чотириполіусник може бути представлена  $T$ - або  $\Pi$ -еквівалентною схемою (рис. 8.1), опори яких обчислюються за формулами:

$$\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_{2T} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}} = \underline{Z}_C \frac{ch\gamma l - 1}{sh\gamma l}; \quad \underline{Z}_{0T} = \frac{1}{\underline{C}} = \frac{\underline{Z}_C}{sh\gamma l};$$

$$\underline{Z}_{1\Pi} = \underline{Z}_{2\Pi} = \frac{\underline{B}}{\underline{D} - 1} = \underline{Z}_C \frac{sh\gamma l}{ch\gamma l - 1}; \quad \underline{Z}_{0\Pi} = \underline{B} = \underline{Z}_C \cdot sh\gamma l. \quad (8.15)$$

### 8.1.2 Розрахунок параметрів лінії та режимів її роботи

**ЗАДАЧА 8.1.** Для визначення параметрів лінії зв'язку завдовжки 160 км на частоті 1000 Гц поставлено досліди неробочого ходу і короткого замикання, в результаті яких отримано:  $\underline{Z}_{HX} = 887 \cdot e^{-j70^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_{KЗ} = 540 \cdot e^{j71^\circ}$  Ом. Визначити первинні і вторинні параметри лінії.

#### Розв'язання

1. Визначаємо вторинні параметри лінії.

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{HX} \cdot \underline{Z}_{KЗ}} = 692 \cdot e^{j0,5^\circ} \text{ Ом}, \quad th \gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{KЗ}}{\underline{Z}_{HX}}} = 0,780 \cdot e^{j70,5^\circ} = 0,26 + j0,735;$$

$$\frac{1 + th \gamma l}{1 - th \gamma l} = \frac{1 + (0,26 + j0,735)}{1 - (0,26 + j0,735)} = 1,399 \cdot e^{j75,11^\circ} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l}.$$

$$\text{Ця рівність розпадається на дві:} \quad e^{2\alpha l} = 1,399$$

$$\text{і} \quad 2\beta l = 1,311 + 2\pi k.$$

З першої рівності знаходимо коефіцієнт згасання

$$2\alpha l = \ln e^{2\alpha l} = \ln 1,399 = 0,336, \quad \alpha = 0,00105 \text{ Нн/км}.$$

Щоб оцінити число повних  $2\pi$  радіан на всій довжині лінії, визначимо приблизно при  $v = 150 \cdot 10^3$  км/с загальний зсув за фазою на всій довжині лінії:

$$2\beta' l = 2l \cdot \frac{\omega}{v} = 2 \cdot 160 \cdot \frac{2\pi \cdot 1000}{150 \cdot 10^3} = 13,4 \text{ рад} > 4\pi, \quad k = 13,4/6,283 \approx 2.$$

Отже:  $2\beta l = 1,311 + 2\pi \cdot 2$ , звідки  $\beta = 0,04337$  рад/км.

Таким чином,  $\underline{Z}_C = 692 \cdot e^{j0,5^\circ}$  Ом,

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,00105 + j0,04337 = 0,04338 e^{j88,61^\circ} \text{ 1/км}.$$

2. Визначаємо первинні параметри лінії:

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = \gamma \cdot \underline{Z}_C = 0,04338 e^{j88,61^\circ} \cdot 692 e^{j0,5^\circ} = 30,02 e^{j89,11^\circ} = 0,46 + j30,02 \text{ Ом/км},$$

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = \gamma / \underline{Z}_C = 0,04338 e^{j88,61^\circ} / (692 e^{j0,5^\circ}) =$$

$$= 62,68 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j88,11^\circ} = (2,06 + j62,64) \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

З урахуванням частоти  $\omega = 2\pi f = 6283$  рад/с остаточно отримуємо:

$$r_0 = 0,46 \text{ Ом/км},$$

$$g_0 = 2,06 \cdot 10^{-6} \text{ См/км},$$

$$L_0 = 30,02/6283 \text{ Гн/км} = 4,79 \text{ мГн/км}, \quad C_0 = 62,64 \cdot 10^{-6}/6283 \text{ Ф/км} = 9,97 \text{ нФ/км}.$$

**ЗАДАЧА 8.2.** З дослідів неробочого ходу і короткого замикання для повітряної лінії зв'язку завдовжки  $l = 120$  км на частоті  $800$  Гц знайдено:  $\underline{Z}_{HX} = 182e^{j3,55^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_{K3} = 209e^{-j22,1^\circ}$  Ом. Визначити вторинні і первинні параметри лінії, а також обчислити вхідний опір лінії, якщо її навантажити на  $\underline{Z}_H = 2\underline{Z}_C$ .

Відповіді:  $\underline{Z}_C = 195e^{-j9,28^\circ}$  Ом,  $\gamma = 8,93 \cdot 10^{-3} + j18,40 \cdot 10^{-3}$  1/км;  $r_0 = 2,3$  Ом/км,  $g_0 = 30 \cdot 10^{-6}$  См/км,  $L_0 = 0,65$  мГн/км,  $C_0 = 20$  нФ/км,  $\underline{Z}_{ex} = 191e^{-j5^\circ}$  Ом.

**ЗАДАЧА 8.3.** Експериментальним шляхом вдалося отримати деякі параметри лінії зв'язку завдовжки  $l = 140$  км, яка працює на частоті  $f = 1500$  Гц:  $\underline{Z}_C = 710 \cdot e^{-j9^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_0 = 19,2 \cdot e^{j70^\circ}$  Ом/км. Розрахувати первинні і вторинні параметри, визначити вхідний опір в режимі неробочого ходу і в режимі короткого замикання.

### Розв'язання

Кутова частота  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1500 = 9425$  рад/с.

Оскільки  $\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = 6,57 + j18,04$  Ом/км, то первинні подовжні параметри

$$r_0 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_0) = 6,57 \text{ Ом/км}, \quad L_0 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}(\underline{Z}_0) = \frac{18,04}{9425} = 1,91 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}.$$

Далі з  $\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$  знаходимо

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_C^2} = \frac{19,2 \cdot e^{j70^\circ}}{(710 \cdot e^{-j9^\circ})^2} = 38,1 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j88^\circ} = (1,33 + j38,08) \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

Звідси поперечні первинні параметри

$$g_0 = \operatorname{Re}(\underline{Y}_0) = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}(\underline{Y}_0) = \frac{38,08}{9425} \cdot 10^{-6} = 4,04 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

Вторинні параметри:

- характеристичний опір  $\underline{Z}_C = 710 \cdot e^{-j9^\circ}$  Ом,
- коефіцієнт поширення

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{19,2 e^{j70^\circ} \cdot 38,1 \cdot 10^{-6} e^{j88^\circ}} = 27,1 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j79^\circ} = (5,16 + j26,55) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}.$$

Звідси коефіцієнт згасання –  $\alpha = \operatorname{Re}(\gamma) = 5,16 \cdot 10^{-3}$  Нп/км,

коефіцієнт фази –  $\beta = \operatorname{Im}(\gamma) = 26,55 \cdot 10^{-3}$  рад/км.

Обчислюємо гіперболічні функції:  $\gamma l = 0,722 + j3,717$ ;

$$e^{\gamma l} = 2,059 \cdot e^{j213^\circ} = -1,727 - j1,121; \quad e^{-\gamma l} = 0,486 \cdot e^{-j213^\circ} = -0,407 + j0,265;$$

$$\operatorname{sh} \gamma l = \frac{1}{2}[e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}] = -0,660 - j0,693 = 0,957 \cdot e^{-j133,6^\circ};$$

$$\operatorname{ch} \gamma l = \frac{1}{2}[e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}] = -1,067 - j0,428 = 1,150 \cdot e^{-j158,1^\circ};$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \operatorname{sh} \gamma l / \operatorname{ch} \gamma l = 0,832 \cdot e^{j24,5^\circ}.$$

Опори неробочого ходу і короткого замикання:

$$\underline{Z}_{1HX} = \underline{Z}_C / \operatorname{th} \gamma l = 710 \cdot e^{-j9^\circ} / (0,832 \cdot e^{j24,5^\circ}) = 854 \cdot e^{-j33,5^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{1K3} = \underline{Z}_C \operatorname{th} \gamma l = 710 \cdot e^{-j9^\circ} \cdot 0,832 \cdot e^{j24,5^\circ} = 591 \cdot e^{j15,5^\circ} \text{ Ом}.$$

**ЗАДАЧА 8.4.** Для двопровідної повітряної лінії зв'язку відомі вторинні параметри на частоті 50 Гц:  $Z_C = 440 \cdot e^{-j10^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\gamma = (4 + j18) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}$ .

Ця лінія працює на постійному струмі і живить навантаження  $r_H = 400 \text{ Ом}$ . Напряга на вході лінії  $U_1 = 600 \text{ В}$ . Визначити  $U_2$  і  $I_1$ , якщо довжина лінії  $l = 200 \text{ км}$ .

#### Розв'язання

Визначимо первинні параметри лінії  $r_0$  і  $g_0$ , які при роботі лінії на постійному струмі залишаються тими ж самими:

$$r_0 = \operatorname{Re}(\gamma \cdot Z_C) = \operatorname{Re}(18,44 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j77,5^\circ} \cdot 440 \cdot e^{-j10^\circ}) = 3,105 \text{ Ом/км},$$

$$g_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{\gamma}{Z_C}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{18,44 \cdot 10^{-3} e^{j77,5^\circ}}{440 e^{-j10^\circ}}\right) = 1,826 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

Вторинні параметри лінії при роботі на постійному струмі:

$$Z_C = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{3,105}{1,826 \cdot 10^{-6}}} = 1303 \text{ Ом},$$

$$\gamma = \sqrt{r_0 g_0} = \sqrt{3,105 \cdot 1,826 \cdot 10^{-6}} = 2,382 \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}.$$

Напрягу в кінці лінії і струм на початку лінії знайдемо за допомогою основних рівнянь довгої лінії в гіперболічних функціях з урахуванням того, що  $I_2 = U_2/r_H$ :

$$U_1 = U_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma l + I_2 Z_C \cdot \operatorname{sh} \gamma l = U_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma l + \frac{U_2}{r_H} Z_C \cdot \operatorname{sh} \gamma l = U_2 \cdot \left( \operatorname{ch} \gamma l + \frac{Z_C}{r_H} \operatorname{sh} \gamma l \right),$$

звідси шукана напряга

$$U_2 = \frac{U_1}{\operatorname{ch} \gamma l + \frac{Z_C}{r_H} \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{600}{\operatorname{ch}(2,382 \cdot 10^{-3} \cdot 200) + \frac{1303}{400} \operatorname{sh}(0,4764)} = 220 \text{ В}.$$

Струм на початку лінії

$$I_1 = \frac{U_2}{Z_C} \cdot \operatorname{sh} \gamma l + I_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma l = \frac{U_2}{Z_C} \cdot \operatorname{sh} \gamma l + \frac{U_2}{r_H} \cdot \operatorname{ch} \gamma l = \frac{220}{1303} \cdot 0,4945 + \frac{220}{400} \cdot 1,116 = 0,697 \text{ А}.$$

**ЗАДАЧА 8.5.** Телефонна лінія завдовжки 25 км на частоті 800 Гц має параметри:  $Z_C = 366,2 e^{-j40,58^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\gamma = (36,15 + j41,75) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}$ . Визначити напрягу, струм і потужність сигналу на вході лінії, якщо лінія увімкнена до джерела постійного струму при  $r_H = 1500 \text{ Ом}$  і струмі  $I_2 = 50 \text{ мА}$ .

Відповіді:  $U_1 = 100,4 \text{ В}$ ,  $I_1 = 51,75 \text{ мА}$ ,  $P_1 = 5,196 \text{ Вт}$ .

**ЗАДАЧА 8.6.** Визначити опори T- і П-схем заміщення ЛРП довжиною  $l = 400 \text{ км}$  з параметрами:

$$Z_C = 391 e^{-j3,75^\circ} \text{ Ом} \text{ і } \gamma = (0,187 + j1,058) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}.$$

Відповіді: опори T-схеми (рис. 8.1,а):  $Z_{1T} = Z_{2T} = 20,74 + j82,69 \text{ Ом}$ ,  $Z_{0T} = 92,4 - j932,1 \text{ Ом}$ ; опори П-схеми (рис. 8.1,б):  $Z_{1П} = Z_{2П} = 206 - j1781 \text{ Ом}$ ,  $Z_{0П} = 37,1 + j158,9 \text{ Ом}$ .

**ЗАДАЧА 8.7.** Трифазна сталелегалюмінієва повітряна лінія електропередачі завдовжки 300 км має наступні параметри (на фазу):

$$r_0 = 0,08 \text{ Ом/км}, \quad g_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}, \quad \omega L_0 = 0,42 \text{ Ом/км}, \quad \omega C_0 = 2,7 \text{ мкСм/км}.$$

Обчислити вторинні параметри лінії, фазову швидкість і довжину хвилі.

Визначити фазну напругу, струм і активну потужність на початку лінії, її ККД, якщо на приймальному кінці лінійна напруга 330 кВ, активна потужність 300 МВт і коефіцієнт потужності навантаження дорівнює 0,92 ( $\varphi_2 > 0$ ).

Обчислити комплекси напруги падаючої та відбитої хвиль на початку і в кінці ЛЕП.

### Розв'язання

Прийmemo, що навантаження лінії симетричне, з'єднане зіркою, а розрахунок виконаємо для однієї фази. Вторинні параметри лінії:

- характеристичний опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0,08 + j0,42}{3,75 \cdot 10^{-8} + j2,7 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{0,428e^{j79,2}}{2,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,2}}} = 398 \cdot e^{-j5^\circ} \text{ Ом},$$

- коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{0,428e^{j79,2} \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,2}} = \\ &= 1,07 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j84,2^\circ} = (0,108 + j1,069) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}. \end{aligned}$$

Звідси коефіцієнт згасання –  $\alpha = \text{Re}(\gamma) = 0,108 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}$ ,

коефіцієнт фази –  $\beta = \text{Im}(\gamma) = 1,069 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$ .

Фазова швидкість і довжина хвилі:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{1,069 \cdot 10^{-3}} = 294 \text{ 000 км/с}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1,069 \cdot 10^{-3}} = 5880 \text{ км}.$$

Обчислюємо гіперболічні функції:  $\gamma l = 0,033 + j0,321$ ;

$$e^{\gamma l} = 1,033 \cdot e^{j18,4^\circ} = 0,980 + j0,326; \quad e^{-\gamma l} = 0,968 \cdot e^{-j18,4^\circ} = 0,919 - j0,305;$$

$$\text{sh } \gamma l = \frac{1}{2}[e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}] = 0,031 + j0,316 = 0,317 \cdot e^{j84,4^\circ};$$

$$\text{ch } \gamma l = \frac{1}{2}[e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}] = 0,949 + j0,01 = 0,950 \cdot e^{j0,62^\circ}.$$

Отримаємо комплекси фазної напруги і струму в кінці лінії:

$$\underline{U}_{2\phi} = \frac{U_{2\text{Л}}}{\sqrt{3}} = \frac{330}{\sqrt{3}} = 190,5 \text{ кВ}; \quad \cos \varphi_2 = 0,92, \text{ тому } \varphi_2 = 23,1^\circ;$$

$$I_{2\phi} = \frac{P_2}{3U_{2\phi} \cos \varphi_2} = \frac{300}{3 \cdot 190,5 \cdot 0,92} = 0,571 \text{ кА}; \quad \psi_{i2} = \psi_{u2} - \varphi_2 = -\varphi_2;$$

$$\underline{I}_{2\phi} = I_{2\phi} \cdot e^{-j\varphi_2} = 0,571 \cdot e^{-j23,1^\circ} \text{ кА}.$$

За основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях (8.4) розрахуємо комплекси фазної напруги і струму на початку лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\phi} &= \underline{U}_{2\phi} \cdot \text{ch } \gamma l + \underline{I}_{2\phi} \underline{Z}_C \cdot \text{sh } \gamma l = \\ &= 190,5 \cdot 0,95 \cdot e^{j0,62^\circ} + 0,571 \cdot e^{-j23,1^\circ} \cdot 398 \cdot e^{-j5^\circ} \cdot 0,317 \cdot e^{j84,4^\circ} = 229,3 \cdot e^{j15,6^\circ} \text{ кВ}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{1\phi} = \frac{U_{2\phi}}{\underline{Z}_C} \cdot \text{sh } \gamma l + \underline{I}_{2\phi} \cdot \text{ch } \gamma l = \frac{190,5}{398 e^{-j5^\circ}} \cdot 0,317 \cdot e^{j84,4^\circ} + 0,571 \cdot e^{-j23,1^\circ} \cdot 0,95 \cdot e^{j0,62^\circ} =$$

$$= 0,505 \cdot e^{-j6,3^\circ} \text{ кА.}$$

Активна потужність на початку лінії

$$P_1 = 3 \operatorname{Re}(\underline{U}_{1\phi} \cdot \underline{I}_{1\phi}^*) = 3 \cdot 229,3 \cdot 0,505 \cdot \cos(15,6^\circ + 6,3^\circ) = 322 \text{ МВт.}$$

Коефіцієнт корисної дії лінії

$$\eta = P_2/P_1 = 300/322 = 0,93.$$

Електромагнітні процеси в довгій лінії розглядаються як результат накладання падаючої (прямої) та відбитої (зворотної) хвиль:

$$\underline{U} = \underline{U}_e + \underline{U}_n = \underline{A}_1 e^{zx} + \underline{A}_2 e^{-zx},$$

$$\underline{I} = -\underline{I}_e + \underline{I}_n = -\frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{zx} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{-zx},$$

де  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  – постійні інтегрування, які визначаються, наприклад, через напругу і струм в кінці лінії:

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_{2\phi} - \underline{I}_{2\phi} \underline{Z}_C}{2} e^{-zl} = \frac{190,5 - 0,571 e^{-j23,1^\circ} \cdot 398 e^{-j5^\circ}}{2} \cdot 0,968 \cdot e^{-j18,4^\circ} = 51,9 \cdot e^{j76,8^\circ};$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_{2\phi} + \underline{I}_{2\phi} \underline{Z}_C}{2} e^{zl} = \frac{190,5 + 0,571 e^{-j23,1^\circ} \cdot 398 e^{-j5^\circ}}{2} \cdot 1,033 \cdot e^{j18,4^\circ} = 209,3 \cdot e^{j3,1^\circ}.$$

На початку лінії  $x = 0$ , тому

$$\underline{U}_n(x=0) = \underline{A}_2 = 209,3 \cdot e^{j3,1^\circ} \text{ кВ}, \quad \underline{U}_e(x=0) = \underline{A}_1 = 51,9 \cdot e^{j76,8^\circ} \text{ кВ},$$

$$\underline{I}_n(x=0) = \underline{U}_n(x=0)/\underline{Z}_C = 0,526 \cdot e^{j8,1^\circ} \text{ кА},$$

$$\underline{I}_e(x=0) = \underline{U}_e(x=0)/\underline{Z}_C = 0,13 \cdot e^{j81,8^\circ} \text{ кА}.$$

В кінці лінії  $x = l$ , тому

$$\underline{U}_n(x=l) = \underline{A}_2 \cdot e^{-zl} = \frac{\underline{U}_{2\phi} + \underline{I}_{2\phi} \underline{Z}_C}{2} = 202,6 \cdot e^{-j15,3^\circ} \text{ кВ},$$

$$\underline{U}_e(x=l) = \underline{A}_1 \cdot e^{zl} = \frac{\underline{U}_{2\phi} - \underline{I}_{2\phi} \underline{Z}_C}{2} = 53,6 \cdot e^{j95,2^\circ} \text{ кВ},$$

$$\underline{I}_n(x=l) = \underline{U}_n(x=l)/\underline{Z}_C = 0,509 \cdot e^{-j10,3^\circ} \text{ кА},$$

$$\underline{I}_e(x=l) = \underline{U}_e(x=l)/\underline{Z}_C = 0,135 \cdot e^{j100,2^\circ} \text{ кА}.$$

Як і слід було чекати, внаслідок втрат в лінії падаюча хвиля зменшується в напрямі від початку до кінця лінії, а відбита – в напрямі від кінця лінії до початку.

**ЗАДАЧА 8.8.** В кінці лінії задачі 8.7 сталося: а) вимкнення навантаження; б) трифазне коротке замикання. Для кожного випадку визначити лінійні напруги і струми на початку і в кінці лінії, якщо фазна напруга на вході залишилася такою, як розраховано в задачі 8.7.

Визначити також значення напруги і струму падаючої і відбитої хвиль в кінці лінії.

### Розв'язання

При розв'язанні задачі скористаємося основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях (8.4).

**а) при вимкненні навантаження** (режим неробочого ходу) струм в кінці лінії  $\underline{I}_{2\phi} = 0$ , тому



$$\underline{U}_{2\Phi} = \frac{\underline{U}_{1\Phi}}{ch(\underline{\gamma}l)} = \frac{229,3e^{j15,6}}{0,95e^{j0,6}} = 241 \cdot e^{j15^\circ} \text{ кВ}, \quad U_{2Л} = \sqrt{3} U_{2\Phi} = \sqrt{3} \cdot 241 = 418 \text{ кВ};$$

$$\underline{I}_{1\Phi} = \frac{\underline{U}_{2\Phi}}{\underline{Z}_C} sh \underline{\gamma}l = \frac{241e^{j15}}{398e^{-j5}} \cdot 0,317 \cdot e^{j84,4^\circ} = 0,192 \cdot e^{j104,4^\circ} \text{ кА}, \quad I_{1Л} = I_{1\Phi} = 0,192 \text{ кА}.$$

У режимі неробочого ходу коефіцієнт відбиття +1, тобто падаюча хвиля відбивається повністю, причому без зміни знаку. Тому  $\underline{U}_n(x=l) = \underline{U}_s(x=l)$ . Зважаючи на це,  $\underline{U}_{2\Phi} = \underline{U}_n(x=l) + \underline{U}_s(x=l) = 2\underline{U}_n(x=l) = 241 \cdot e^{j15^\circ} \text{ кВ}$ , звідки  $\underline{U}_n(x=l) = \underline{U}_s(x=l) = \underline{U}_{2\Phi}/2 = 120,5 \cdot e^{j15^\circ} \text{ кВ}$ ,  
 $\underline{I}_n(x=l) = \underline{I}_s(x=l) = \underline{U}_n(x=l)/\underline{Z}_C = 0,303 \cdot e^{j10^\circ} \text{ кА}$ .

**б) при короткому замиканні** напруга в кінці лінії  $\underline{U}_{2\Phi} = 0$ , тому

$$\underline{I}_{2\Phi} = \frac{\underline{U}_{1\Phi}}{\underline{Z}_C sh(\underline{\gamma}l)} = \frac{229,3e^{j15,6}}{398e^{-j5} \cdot 0,317e^{j84,4}} = 1,817 \cdot e^{-j63,8^\circ} \text{ кА}, \quad I_{2Л} = I_{2\Phi} = 1,817 \text{ кА};$$

$$\underline{I}_{1\Phi} = \underline{I}_{2\Phi} \cdot ch \underline{\gamma}l = 1,817 \cdot e^{-j63,8^\circ} \cdot 0,95 \cdot e^{j0,6^\circ} = 1,726 \cdot e^{-j63,2^\circ} \text{ кА}, \quad I_{1Л} = I_{1\Phi} = 1,726 \text{ кА}.$$

У режимі короткого замикання коефіцієнт відбиття дорівнює -1. Тому  $\underline{I}_n(x=l) = -\underline{I}_s(x=l)$ . З урахуванням цього

$$\underline{I}_{2\Phi} = \underline{I}_n(x=l) - \underline{I}_s(x=l) = 2\underline{I}_n(x=l) = 1,817 \cdot e^{-j63,8^\circ} \text{ кА},$$

звідки  $\underline{I}_s(x=l) = -\underline{I}_n(x=l) = \underline{I}_{2\Phi}/2 = 0,909 \cdot e^{-j63,8^\circ} \text{ кА}$ ,  
 $\underline{U}_n(x=l) = -\underline{U}_s(x=l) = \underline{I}_n(x=l) \cdot \underline{Z}_C = 362 \cdot e^{-j58,8^\circ} \text{ кВ}$ .

**ЗАДАЧА 8.9.** У режимах а) неробочого ходу і б) короткого замикання визначити лінійну напругу і струми на початку і в кінці лінії задачі 8.8, якщо її довжина 900 км, а фазна напруга на вході  $\underline{U}_{1\Phi} = 229,3 \text{ кВ}$ .

*Відповіді:*  $ch \underline{\gamma}l = 0,574 + j0,080$ ,  $sh \underline{\gamma}l = 0,056 + j0,824$ ;

а)  $U_{2Л} = 685 \text{ кВ}$ ;  $I_1 = 821 \text{ А}$ ; б)  $I_2 = 697 \text{ А}$ ;  $I_1 = 404 \text{ А}$ .

З порівняння результатів розрахунків двох однотипних ліній різної довжини (у задачі 8.8 довжина лінії 300 км, в задачі 8.9 – 900 км), бачимо, що в другому випадку різко виросли напруга в кінці лінії і струм на початку лінії в режимі неробочого ходу при значному зменшенні струму в режимі короткого замикання. Можна зробити висновок, що, починаючи з деякого значення довжини лінії, режим неробочого ходу у високовольтній ЛРП виявляється небезпечнішим за режим короткого замикання.

### 8.1.3 Лінії, узгоджені з навантаженням

**ЗАДАЧА 8.10.** Для трифазної ЛЕП, узгодженої з навантаженням, відомі комплекси фазної напруги на початку лінії  $\underline{U}_1 = 100 \text{ кВ}$  і фазного струму в кінці лінії  $\underline{I}_2 = 190e^{-j90^\circ} \text{ А}$ . Визначити ККД лінії, якщо її характеристичний опір  $\underline{Z}_C = 500e^{-j10^\circ} \text{ Ом}$ .

#### Розв'язання

Оскільки лінія узгоджена з навантаженням, опір навантаження дорівнює характеристичному, і тоді напруга в кінці лінії

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_C = 0,19e^{-j90^\circ} \cdot 500e^{-j10^\circ} = 95e^{-j100^\circ} \text{ кВ}.$$

Оскільки при узгодженому навантаженні  $U_2 = U_1 e^{-\alpha l}$ , то  

$$e^{-\alpha l} = U_2/U_1 = 95/100 = 0,95.$$
 ККД лінії  $\eta = e^{-2\alpha l} = 0,95^2 = 0,903$ .

**ЗАДАЧА 8.11.** Повітряна двопровідна лінія завдовжки 100 км навантажена на опір  $Z_C = 410 e^{-j30^\circ}$  Ом.

Напряга на вході лінії –  $u_1(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t + 120^\circ)$  В, на виході –  $u_2(t) = 188,7\sqrt{2} \sin(314t + 79,9^\circ)$  В. Визначити струм і напругу, записати їх миттєві значення в точці А, яка розташована в 20 км від кінця лінії.

**Розв'язання**

Рівняння лінії в узгодженому режимі: 
$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot e^{2l} = \underline{U}_2 \cdot e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}, \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot e^{2l} = \underline{I}_2 \cdot e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}. \end{cases}$$

Для розрахунку струму і напруги в точці А необхідно знати параметри лінії: коефіцієнт згасання  $\alpha$  і коефіцієнт фази  $\beta$ . Знаходимо їх з першого рівняння лінії:

$$e^{2l} = \underline{U}_1/\underline{U}_2 = 220e^{j120^\circ}/188,7e^{j79,9^\circ} = 1,166e^{j40,1^\circ} = +j0,7 \text{ рад},$$

$$e^{\alpha l} = 1,166; \quad \alpha l = \ln 1,166 = 0,153; \quad \alpha = 0,00153 \text{ Нп/км}; \quad \beta l = 0,7 + 2\pi k \text{ рад}.$$

Орієнтовне значення коефіцієнта фази

$$\beta_{op} = \frac{\omega}{v} = \frac{314}{3 \cdot 10^5} \approx 10^{-3} \text{ рад/км}; \quad \beta_{op} l \approx 0,1 \text{ рад};$$

таким чином,  $k = 0$  і  $\beta = 0,007 \text{ рад/км}$ .

Тоді напруга в точці А:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_2 \cdot e^{2y} = 188,7e^{j79,9^\circ} \cdot e^{0,00153 \cdot 20} \cdot e^{j0,007 \cdot 20} = 194,6e^{j79,9^\circ} \cdot e^{j0,14 \text{ рад} = 8,02^\circ} = 194,6e^{j87,92^\circ} \text{ В}.$$

Співвідношення  $Z_{ex} = Z_C$  справедливо для будь-якого перерізу лінії, тому струм в точці А можна обчислити як

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A/Z_C = 194,6e^{j87,92^\circ}/(410e^{-j30^\circ}) = 0,475e^{j117,92^\circ} \text{ А}.$$

Миттєві значення напруги і струму:

$$u_A(t) = 194,6\sqrt{2} \sin(314t + 87,92^\circ) \text{ В}, \quad i_A(t) = 0,475\sqrt{2} \sin(314t + 117,92^\circ) \text{ А}.$$

**ЗАДАЧА 8.12.** Лінія завдовжки 25 км отримує живлення від джерела ЕРС  $e_1 = 141,4 \sin 5000t$  В з внутрішнім опором  $r_i = 100$  Ом. Параметри лінії:  $Z_C = 335,5 - j497,4$  Ом,  $\gamma = (3,48 + j19,70) \cdot 10^{-3}$  1/км,  $Z_H = Z_C$ . Визначити струми, напруги, потужності на вході і в кінці лінії, знайти ККД лінії.

Відповіді:  $U_1 = 90,6$  В,  $I_1 = 0,151$  А,  $P_1 = 7,65$  Вт;  
 $U_2 = 83,04$  В,  $I_2 = 0,138$  А,  $P_2 = 6,43$  Вт;  $\eta = 0,84$ .

**ЗАДАЧА 8.13.** Двопровідна лінія завдовжки 100 км навантажена на опір  $Z_C = 1410e^{-j30^\circ}$  Ом. В 20 км від кінця лінії напруга  $u_a(t) = 141,4 \sin(314t + 60^\circ)$  В. У точці "b", що знаходиться в 40 км від її кінця, відомий струм

$$i(t) = 0,164 \sin(314t + 120^\circ) \text{ А}.$$

Визначити миттєве і діюче значення напруги на вході лінії.

Відповідь:  $u_1(t) = 715,6\sqrt{2} \sin(314t + 180^\circ)$  В;  $U_1 = 715,6$  В.

**ЗАДАЧА 8.14.** Двопровідна лінія завдовжки  $l = 20$  км з вторинними параметрами  $\underline{Z}_C = 1350e^{-j24^\circ}$  Ом і  $\gamma = 0,0175 + j0,039$  1/км навантажена на опір, який дорівнює хвильовому. Визначити потужність  $P_2$ , яка передається в навантаження, і потужність  $P_1$ , яка підводиться до лінії, якщо напруга  $U_1 = 10$  В.

Відповіді:  $P_1 = 67,67$  мВт,  $P_2 = 33,6$  мВт.

**ЗАДАЧА 8.15.** Повітряна лінія зв'язку має наступні параметри:

$$r_0 = 2,84 \text{ Ом/км}, \quad g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}, \quad L_0 = 1,94 \text{ мГн/км}, \quad C_0 = 6,25 \text{ нФ/км}.$$

Визначити: 1) при якому опорі приймача в лінії відсутня відбита хвиля на середній розрахунковій частоті 800 Гц; 2) напругу, струм, активну потужність джерела і ККД лінії завдовжки 59 км, якщо напруга на навантаженні дорівнює 20 В, а її опір – як в п. 1.

#### Розв'язання

Обчислимо вторинні параметри лінії на частоті

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 800 = 5027 \text{ рад/с:}$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,84 + j5027 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 10^{-6} + j5027 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{\frac{10,15e^{j73,8}}{31,56 \cdot 10^{-6} e^{j88,7}}} = 567 \cdot e^{-j7,46^\circ} \text{ Ом},$$

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{10,15e^{j73,8} \cdot 31,56 \cdot 10^{-6} e^{j88,7}} = 17,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j81,3^\circ} \text{ 1/км}.$$

Звідси коефіцієнт згасання –  $\alpha = \text{Re}(\gamma) = 2,71 \cdot 10^{-3}$  Нп/км.

Відбита хвиля в лінії відсутня, якщо лінія узгоджена з навантаженням, тобто якщо її опір  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C = 567 \cdot e^{-j7,46^\circ}$  Ом.

Тоді напруга, струм і потужність в кінці лінії:

$$\underline{U}_2 = 20 \text{ В}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{20}{567e^{-j7,46^\circ}} = 0,0353 \cdot e^{j7,46^\circ} \text{ А},$$

$$P_2 = \text{Re}(\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^*) = 20 \cdot 0,0353 \cdot \cos(-7,46^\circ) = 0,7 \text{ Вт}.$$

При узгодженому навантаженні ККД лінії можна обчислити за формулою  $\eta = e^{-2\alpha l} = e^{-2 \cdot 2,71 \cdot 10^{-3} \cdot 59} = 0,73$ .

Потужність на початку лінії  $P_1 = P_2/\eta = 0,7/0,73 = 0,96$  Вт.

Напруга і струм на початку лінії

$$U_1 = U_2 \cdot e^{\alpha l} = 20 \cdot e^{\alpha l} = 20e^{0,00271 \cdot 59} = 23,4 \text{ В},$$

$$I_1 = I_2 \cdot e^{\alpha l} = 0,0353 \cdot e^{0,00271 \cdot 59} = 0,041 \text{ А}.$$

**ЗАДАЧА 8.16.** Генератор постійного струму з напругою 10 кВ живить послідовно з'єднані повітряну і кабельну лінії. Параметри повітряної ЛРП:  $l_1 = 20$  км,  $r_{01} = 4$  Ом/км,  $g_{01} = 1 \cdot 10^{-6}$  См/км. Параметри кабелю:  $l_2 = 40$  км,  $r_{02} = 0,5$  Ом/км,  $g_{02} = 0,5 \cdot 10^{-6}$  См/км. Кабель має узгоджене навантаження. Визначити потужності генератора і приймача, ККД повітряної лінії, кабелю і загальний ККД.

Відповіді:  $P_G = 94,3$  кВт,  $P_H = 82,2$  кВт;  $\eta_1 = 0,907$ ,  $\eta_2 = 0,96$ ,  $\eta_{\text{заг}} = 0,872$ .

**ЗАДАЧА 8.17.** По силовій ЛЕП завдовжки 50 км передаються сигнали автоматики і телемеханіки, причому на їх частоті коефіцієнт згасання  $\alpha = 96 \text{ мНп/км}$ ,  $Z_C = 640e^{-j10^\circ} \text{ Ом}$ . На частоті сигналу приймач узгоджений з лінією. Рівень сигналу на початку лінії (за потужністю) дорівнює  $a = 4,6 \text{ Нп}$ . Визначити напругу сигналу на приймальному пристрої.

#### Розв'язання

*Визначення.* Потужність сигналу в будь-якій точці лінії може бути задана у вигляді «рівня сигналу в неперах» по відношенню до сигналу потужністю 1 мВт, рівень якого прийнятий рівним нулю.

1. За умовами задача рівень сигналу на початку лінії  $a = 4,6 \text{ Нп}$ .

Оскільки  $a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_0} = 4,6 \text{ Нп}$ , де  $P_0 = 1 \text{ мВт}$ , то  $P_1 = e^{2a} = e^{2 \cdot 4,6} = 9897 \text{ мВт}$ .

2. Загальне згасання сигналу в лінії  $\alpha l = 96 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 4,8 \text{ Нп}$ .

Отже, рівень сигналу у приймача  $a_{\Pi} = 4,6 - 4,8 = -0,2 \text{ Нп}$ , а його потужність  $P_2 = e^{2 \cdot (-0,2)} = e^{-0,4} = 0,67 \text{ мВт}$ .

3. Приймач узгоджений з лінією, тобто

$$Z_H = Z_C = 640e^{-j10^\circ} = 630,3 - j111,1 \text{ Ом} = Z_1.$$

Напругу сигналу на вході лінії доцільно розрахувати через провідність за виразом  $P_1 = g_H U_1^2$  з урахуванням узгодженого режиму роботи:

$$Y_H = 1/Z_H = (1,539 + j0,271) \cdot 10^{-3} \text{ См}, \quad g_H = \text{Re}(Y_H) = 1,539 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

$$\text{Тоді } U_1 = \sqrt{\frac{P_1}{g_H}} = \sqrt{\frac{9,897}{1,539 \cdot 10^{-3}}} = 80,2 \text{ В},$$

$$U_2 = U_1 \cdot e^{-a l} = 80,2 \cdot e^{-4,8} = 0,66 \text{ В}.$$

**ЗАДАЧА 8.18.** Потужність передавального пристрою 1 мВт. На приймач, узгоджений з лінією, яка має  $\alpha = 0,02 \text{ Нп/км}$ , необхідно передати сигнал потужністю не менше 1 мкВт.

Визначити допустиму дальність зв'язку і співвідношення напруги  $U_1/U_2$  сигналу на вході і на виході лінії.

*Відповіді:*  $l = 173 \text{ км}$ ,  $U_1/U_2 = 31,62$ .

#### 8.1.4 Лінії без спотворень

**ЗАДАЧА 8.19.** Повітряна двопровідна лінія зв'язку завдовжки 100 км має параметри:  $r_0 = 2,8 \text{ Ом/км}$ ,  $g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}$ ,  $L_0 = 2 \text{ мГн/км}$  і працює в узгодженому режимі при частоті  $\omega = 5000 \text{ рад/с}$ . Яку додаткову індуктивність  $L_0'$  необхідно увімкнути на кожен кілометр довжини лінії, щоб в ній не було спотворень, а вихідна напруга відставала від вхідного на  $100^\circ$  за фазою?

#### Розв'язання

За умовою зсув фаз в лінії складає

$$\beta l = 100^\circ + 360^\circ \cdot k = 1,745 + 2\pi k \text{ рад}, \text{ тобто } \beta = (1,745 + 2\pi k) \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}.$$

Оцінимо значення  $\beta$ . Фазова швидкість у повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла, тому  $\beta \approx \frac{\omega}{c} = \frac{5000}{300000} = 1,667 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}$ .

З порівняння двох отриманих відповідей приходимо до висновку, що  $k = 0$ . Остаточно маємо  $\beta = 0,01745 \text{ рад/км}$ .

Для лінії без спотворень справедливі наступні співвідношення

$$\beta = \omega \sqrt{(L_0 + L'_0)C_0} \quad \text{і} \quad \frac{r_0}{L_0 + L'_0} = \frac{g_0}{C_0}$$

$$\text{або} \quad \sqrt{(L_0 + L'_0)C_0} = \frac{\beta}{\omega} \quad \text{і} \quad \sqrt{\frac{L_0 + L'_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}}.$$

Перемножуючи дві останні рівності, знаходимо

$$(L_0 + L'_0) = \frac{\beta}{\omega} \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \frac{0,01745}{5000} \sqrt{\frac{2,8}{0,7 \cdot 10^{-6}}} = 0,00698 \text{ Гн/км}.$$

І нарешті:  $L'_0 = 6,98 - 2 = 4,98 \text{ мГн/км}$ .

**ЗАДАЧА 8.20.** Кабельна лінія зв'язку має довжину 150 км і хвильовий опір  $Z_C = 60 \text{ Ом}$ . Цю лінію сигнали проходять без спотворень за 1 мс і затухають при цьому на 11,3 дБ. Визначити первинні параметри лінії.

#### Розв'язання

Згасання в лінії складає  $\alpha l = 11,3 \text{ дБ} = 11,3 \cdot 0,115 = 1,3 \text{ Нн}$ .

Звідси коефіцієнт згасання  $\alpha = \frac{1,3}{l} = \frac{1,3}{150} = 8,66 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}$ .

У той же час, для лінії без спотворень справедливі співвідношення:

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{r_0}{g_0}, \quad Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \alpha = \sqrt{r_0 g_0}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Причому для кабельної лінії можна прийняти  $v = 150 \text{ 000 км/с}$ .

З цих співвідношень знаходимо:

$$r_0 = \alpha \cdot Z_C = 8,66 \cdot 10^{-3} \cdot 60 = 0,52 \text{ Ом/км},$$

$$g_0 = \frac{\alpha^2}{r_0} = \frac{8,66^2 \cdot 10^{-6}}{0,52} = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ См/км},$$

$$L_0 = \frac{Z_C}{v} = \frac{60}{1,5 \cdot 10^5} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км} = 0,4 \text{ мГн/км},$$

$$C_0 = \frac{1}{Z_C v} = \frac{1}{60 \cdot 1,5 \cdot 10^5} = 0,111 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км} = 0,111 \text{ мкФ/км}.$$

**ЗАДАЧА 8.21.** Первинні параметри двопровідної мідної телефонної лінії (при  $f = 100 \text{ кГц}$ ):

$$r_0 = 14 \text{ Ом/км}, \quad L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}, \quad g_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}, \quad C_0 = 6,36 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

Обчислити індуктивність  $L_1$ , яку треба включити на кожен кілометр довжини, щоб лінія стала такою, що не спотворює сигнали. Чому при цьому будуть дорівнювати вторинні параметри лінії?

$$\text{Відповіді: } L_1 = \frac{r_0 C_0}{g_0} - L_0 = 15,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}, \quad Z_C = \sqrt{\frac{L_0 + L_1}{C_0}} = 1673 \text{ Ом},$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{(L_0 + L_1)C_0} = 8,37 \cdot 10^{-3} + j6,685 \text{ 1/км.}$$

**ЗАДАЧА 8.22.** Лінія без спотворень задачі 8.21 увімкнена на напругу  $u_1 = (10\sin(2\pi \cdot 10^5 t) + 5\sin(4\pi \cdot 10^5 t)) \text{ В}$ . Визначити миттєве значення напруги в кінці лінії завдовжки  $l = 100 \text{ км}$  при узгодженому навантаженні і в режимі неробочого ходу. Вказати, чи зберігається неспотворена передача сигналів.

*Відповіді:*  $\gamma(\omega) = 6,685 \cdot e^{j89,93^\circ} \text{ 1/км}$ ;  $\gamma(2\omega) = 13,37 \cdot e^{j89,96^\circ} \text{ 1/км}$ ;

при  $Z_2 = Z_C$ :  $\underline{U}_{2m} = \underline{U}_{1m} \cdot e^{-\gamma l}$ ;  $u_2 = (4,33\sin(2\pi \cdot 10^5 t - 143,73^\circ) + 2,17\sin(4\pi \cdot 10^5 t + 72,54^\circ)) \text{ В}$ , неспотворення зберігається, оскільки  $U_{2m}^{(1)}/U_{1m}^{(1)} = U_{2m}^{(2)}/U_{1m}^{(2)} = 0,433$  і  $\psi^{(1)} \cdot 2 = \psi^{(2)}$  ( $-143,73 \cdot 2^\circ = -287,46^\circ$ ;  $-287,46^\circ + 360^\circ = 72,54^\circ$ );

при НХ:  $\underline{U}_{2m} = \underline{U}_{1m}/ch(\gamma l)$ ;  $u_2 = (8,09\sin(2\pi \cdot 10^5 t - 153,35^\circ) + 5,08\sin(4\pi \cdot 10^5 t + 65,31^\circ)) \text{ В}$ , неспотворення не зберігається, оскільки  $U_{2m}^{(1)}/U_{1m}^{(1)} = 0,809 \neq U_{2m}^{(2)}/U_{1m}^{(2)} = 1,02$  і  $\psi^{(1)} \cdot 2 \neq \psi^{(2)}$  ( $-153,35 \cdot 2^\circ = -306,70^\circ$ ;  $-306,70^\circ + 360^\circ = 53,3^\circ \neq 65,31^\circ$ ).

### 8.1.5 Лінії без втрат

**ЗАДАЧА 8.23.** В кінці повітряної лінії без втрат увімкнений вольтметр, який показує  $100 \text{ В}$ . Визначити показ амперметра на відстані  $2 \text{ м}$  від кінця лінії, якщо частота генератора  $f = 3 \cdot 10^7 \text{ Гц}$ , а хвильовий опір лінії  $Z_C = 1000 \text{ Ом}$ .

#### Розв'язання

В кінці лінії увімкнений вольтметр з великим опором. Отже, лінія працює у режимі неробочого ходу, струм в кінці лінії  $I_2 = 0$ , тому одне з основних рівнянь ЛБВ (8.12) приймає вигляд:  $\underline{I}(y) = j \frac{U_2}{Z_C} \sin(\beta y)$ .

Фазова швидкість в повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Тоді коефіцієнт фази лінії:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,2\pi \text{ рад/м.}$$

Таким чином, показ амперметра

$$I_A = |\underline{I}(y=2)| = \frac{U_2}{Z_C} \sin(\beta y) = \frac{100}{1000} \sin(0,2\pi \cdot 2) = 0,0951 \text{ А.}$$

**ЗАДАЧА 8.24.** Генератор з довжиною хвилі  $\lambda = 20 \text{ м}$  увімкнений на ідеальну ЛБВ завдовжки  $l = 5 \text{ м}$ . Наприкінці лінії увімкнений амперметр, який показує струм  $0,17 \text{ А}$ , а в середині лінії – вольтметр, показ якого  $120 \text{ В}$ . Визначити хвильовий опір лінії. Прийняти  $r_V = \infty$ ,  $r_A = 0$ .

#### Розв'язання

Рівняння лінії без втрат в режимі КЗ:  $\underline{U}(y) = jZ_C I_2 \sin(\beta y)$ .

Для середини лінії  $\beta y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot y = \frac{2\pi}{20} \cdot 2,5 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}$ .

Тоді опір  $Z_C = U(y)/(I_2 \sin(\beta y)) = 120/(0,17 \cdot 0,7071) = 998 \text{ Ом}$ .

**ЗАДАЧА 8.25.** Визначити параметри повітряної лінії без втрат завдовжки 24 м з хвильовим опором 600 Ом, яка працює на частоті 15 МГц. При опорі навантаження 300 Ом і напрузі  $U_2 = 120$  В розрахувати напругу, струм і потужність на початку лінії.

Відповіді:  $\beta = 0,314$  м<sup>-1</sup>,  $L_0 = 2$  мкГн/м,  $C_0 = 5,56$  пФ/м,  $U_1 = 231$  В,  $I_1 = 0,227$  А,  $P_1 = 48$  Вт.

**ЗАДАЧА 8.26.** Визначити струм генератора, що живить навантажену на  $r_H$  лінію без втрат при напрузі  $U_T = 120$  В і наступних параметрах лінії:

$$l = 100 \text{ м}, \quad \lambda = 60 \text{ м}, \quad L_0 = 5,3 \text{ мкГн/м}, \quad r_H = 380 \text{ Ом}.$$

Відповіді:  $Z_C = 1590$  Ом,  $\beta = 0,1047$  рад/м,  $Z_{\text{вх}} = 255,6e^{j59,69^\circ}$  Ом,  $I_1 = 0,047e^{-j59,69^\circ}$  А.

**ЗАДАЧА 8.27.** В кінці повітряної лінії без втрат завдовжки  $l = 12$  м увімкнена індуктивність  $L = 17,3$  мкГн. Визначити, на якій відстані від кінця лінії знаходяться найближчі пучності напруги і струму, якщо частота джерела  $\omega = 10^8$  рад/с, а параметри лінії  $L_0 = 10$  мкГн/м,  $C_0 = 1,11$  пФ/м.

#### Розв'язання

Індуктивність  $L$  можна змоделювати відрізком короткозамкненої ЛБВ довжиною  $l_1$ . Розрахуємо довжину відрізка.

Опір індуктивності в комплексній формі  $j\omega L$ , вхідний опір короткозамкненої ЛБВ  $Z_K = jZ_C \operatorname{tg}(\beta l_1)$ , тобто  $\omega L = Z_C \operatorname{tg}(\beta l_1)$ ,

де вторинні параметри лінії  $Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{1,11 \cdot 10^{-12}}} = 3000$  Ом,

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 10^8 \sqrt{10^{-5} \cdot 1,11 \cdot 10^{-12}} = 0,333 \text{ рад/м}.$$

$$\text{Отримуємо: } l_1 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{Z_C}\right) = \frac{1}{0,333} \operatorname{arctg}\left(\frac{10^8 \cdot 17,3 \cdot 10^{-6}}{3000}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ м}.$$

$$\text{Довжина хвилі } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,333} = 6\pi \text{ м}.$$

В короткозамкненої ЛБВ найближча пучність напруги знаходиться від кінця лінії на відстані, яка дорівнює чверті довжини хвилі:  $\frac{1}{4}\lambda = 1,5\pi$  м.

В даній лінії з урахуванням відрізка  $l_1$ :  $1,5\pi - l_1 = 1,5\pi - 0,5\pi = \pi = 3,14$  м.

Пучність струму зміщена у порівнянні з пучністю напруги на чверть довжини хвилі. Тому координата пучності струму наступна:

$$\pi + 1,5\pi = 2,5\pi = 7,85 \text{ м}.$$

**ЗАДАЧА 8.28.** Для узгодження лінії з навантаженням на частоті 100 МГц необхідно додати індуктивний опір 800 Ом, який може бути змодельований відрізком лінії без втрат. Визначити найменшу довжину  $l_{\min}$  відрізка короткозамкненої лінії без втрат, виконаної з мідних проводів радіусом  $r = 2$  мм з відстанню між проводами  $d = 20$  см. Розрахувати опір відрізка при розімкненому кінці.

*Вказівка.* Первинні параметри ЛБВ обчислити за формулами:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{d}{r} \text{ Гн/м}; \quad C_0 = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{d}{r}}$$

*Відповідь:*  $l_{\min} = 46,1 \text{ см}$ ,  $Z_{HX} = -j381,9 \text{ Ом}$ .

**ЗАДАЧА 8.29.** Повітряна лінія без втрат з параметрами:  $l = 30 \text{ м}$ ,  $f = 15 \text{ МГц}$ ,  $Z_C = 600 \text{ Ом}$  працює на навантаження:  $U_2 = 120 \text{ В}$ ,  $r_H = 300 \text{ Ом}$ . Визначити положення мінімумів і максимумів напруги уздовж лінії.

### Розв'язання

Відомо, що у режимі неробочого ходу або при короткому замиканні в лініях без втрат виникають стоячі хвилі. Оскільки при цьому коефіцієнт відбиття  $n = \pm 1$ , пряма і зворотна хвилі однакові за величиною, їх накладання дає вузли і пучності напруги, які розподілені уздовж лінії при НХ (КЗ) відповідно до виразів:

$$y_{\text{вузлів(пучностей)}} = (2k + 1) \cdot \lambda/4; \quad y_{\text{пучностей(вузлів)}} = k\lambda/2; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При довільному неузгодженому навантаженні  $|K| < 1$ , пряма і зворотна хвилі не рівні між собою. В результаті накладання цих хвиль в лінії виникають мінімуми і максимуми напруги. Очевидно, що вони будуть в тих точках, де пряма і зворотна хвилі або збігаються за фазою (максимуми), або відрізняються на  $180^\circ$  (мінімуми).

1. Визначимо коефіцієнт відбиття  $K$  хвилі від навантаження і оцінимо напругу прямої і зворотної хвиль  $U_{np}$ ,  $U_{zv}$ .

$$n = \frac{r_H - Z_C}{r_H + Z_C} = \frac{300 - 600}{300 + 600} = -0,333, \quad \text{тобто} \quad U_{zv} = -0,333 U_{np}.$$

В кінці лінії напруга знаходиться як

$$U_2 = U_{np} + U_{zv} = U_{np} - 0,333 \cdot U_{np} = 0,667 \cdot U_{np} = 120 \text{ В}.$$

Оскільки  $K < 0$ , то в кінці лінії має місце мінімум напруги, тобто  $U_{\min} = 120 \text{ В}$ , причому:

$$U_{np} = U_{\min}/0,667 = 180 \text{ В}, \quad U_{zv} = -0,333 U_{np} = -60 \text{ В}.$$

Максимальне значення напруги  $U_{\max} = 180 + 60 = 240 \text{ В}$ .

2. Отже, перший мінімум напруги знаходиться в кінці лінії. Далі мінімуми напруги слідує через  $\lambda/2$ . Оцінимо довжину хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = 300 \cdot 10^3 / (15 \cdot 10^6) = 20 \text{ м}.$$

Максимуми напруги зсунені відносно мінімумів на  $\lambda/4 = 5 \text{ м}$  і далі по лінії також йдуть через  $\lambda/2$ .