

6 ЛІНІЙНІ КОЛА ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ НЕСИНУСОЇДНИХ НАПРУГАХ І СТРУМАХ

6.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Будь-яка періодична функція (наприклад, напруга $u(t)$) з періодом T , що відповідає умовам Діріхле^{*)}, може бути розкладена в ряд Фур'є, в якому кутова частота основної гармоніки визначається за формулою $\omega = 2\pi/T$:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U'_{mk} \cdot \sin(k\omega t) + U''_{mk} \cdot \cos(k\omega t)) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cdot \sin(k\omega t + \psi_k),$$

тут k – номер гармоніки, а коефіцієнти визначаються за виразами:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) d(\omega t),$$

$$U'_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \sin(k\omega t) d\omega t,$$

$$U''_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cos(k\omega t) d\omega t,$$

$$U_{mk} = \sqrt{(U'_{mk})^2 + (U''_{mk})^2}, \quad \operatorname{tg}(\psi_k) = U''_{mk}/U'_{mk}.$$

Діюче значення періодичної функції (напруги):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\omega t)]^2 d\omega t} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (U_k)^2}.$$

Потужності періодичного струму (активна P , реактивна Q , повна S , потужність спотворення T):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\varphi_k), \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_k),$$

$$S = U \cdot I, \quad S^2 > P^2 + Q^2, \quad T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

Коефіцієнти, що характеризують періодичні несинусоїдні функції:

коефіцієнти потужності і амплітуди: $\chi = \frac{P}{U \cdot I}; \quad k_a = \frac{I_{max}}{I};$

коефіцієнти гармонік і спотворення: $k_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} (I_k)^2}}{I_1}, \quad k_C = \frac{I_1}{I}.$

6.2 РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ В РЯД ФУР'Є

ЗАДАЧА 6.1. Залежність $u(t)$ показана на рис. 6.1,а. Вона має симетрію відносно осі абсцис і початку координат. Тому достатньо задати її значення лише для першої чверті періоду, які наведені в табл. 6.1. Розкласти залежність $u(t)$ в ряд Фур'є і побудувати її лінійний спектр частот.

^{*)} Всі періодичні функції, якими оперує практична електротехніка, відповідають цим умовам.

Таблиця 6.1. Значення функції $u(t)$ для першої чверті періоду при $\Delta t = 0,5 \text{ мс}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t, \text{ мс}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$u_n, \text{ В}$	12,35	17,53	15,89	16,09	28,15	54,93	89,78	121,7	142,7	149,8

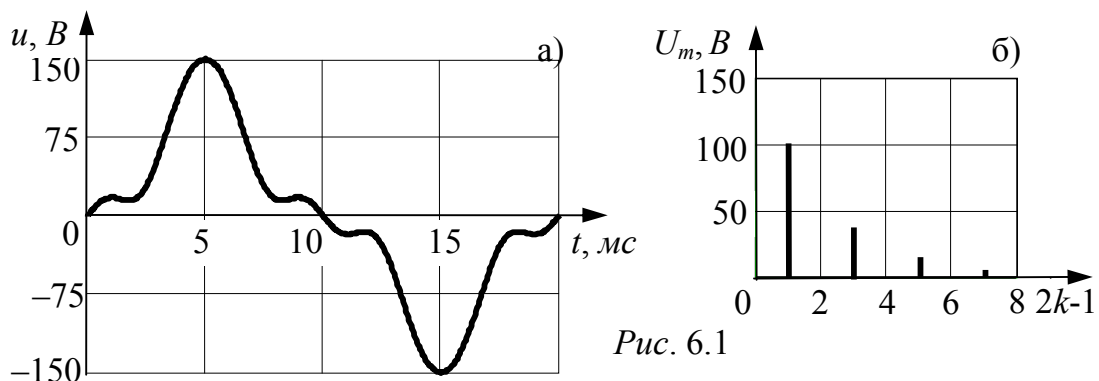


Рис. 6.1

Розв'язання

Оскільки функція $u(t)$ має одночасно два види симетрії, в її розкладанні присутні лише синусоїди з непарним порядковим номером, а значення інтеграла, що визначає амплітуду $(2k-1)$ -ої гармоніки, обчислюється за чверть періоду з множенням результату на чотири:

$$U_{m2k-1} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin((2k-1)\omega \cdot t) dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin((2k-1)\omega \cdot t) dt. \quad (6.1)$$

Проте, оскільки $u(t)$ задана таблицею, то її розкладання в ряд Фур'є виконаємо графо-аналітичним методом. При використанні наближеного інтегрування період функції ділиться на рівне число інтервалів (у нашому випадку їх число $N = 40$) і проводиться заміна $dt = T/N = T/40$. Проте, з огляду на те, що значення функції визначається для кінця інтервалу, і ці значення будуть різними в двох симетричних інтервалах, то з метою здобуття точнішого результату за рахунок компенсації позитивної похибки одного інтервалу від'ємною похибкою симетричного інтервалу наближене інтегрування повинне виконуватися за півперіоду. Тому продовжимо табл. 6.1 до половини періоду.

Продовження таблиці 6.1. Значення функції $u(t)$ для другої чверті періоду при $\Delta t = 0,5 \text{ мс}$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t, \text{ мс}$	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
$u_n, \text{ В}$	142,7	121,7	89,78	54,93	28,15	16,09	15,89	17,53	12,35	0

Тоді формула (6.1) приймає вид (підсумовування за половину періоду):

$$U_{m2k-1} \approx \frac{4}{T} \sum_{n=1}^{20} u_n \sin((2k-1)\omega \cdot t_n) \frac{T}{40} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{20} u_n \sin((2k-1)\omega \cdot t_n), \quad (6.2)$$

де $T = 0,02 \text{ с}$ – період функції $u(t)$;

$n = 1 \dots 20$ – номер інтервалу наближеного інтегрування при $\Delta t = T/40$.

Застосувавши дані табл. 6.1 і виконавши відповідно до (6.2) розрахункові дії для амплітуд перших десяти гармонік (враховуючи лише непарні), отримаємо:

$$U_{m1} = 100 \text{ В}; \quad U_{m3} = -40 \text{ В}; \quad U_{m5} = 15 \text{ В}; \quad U_{m7} = 5 \text{ В}; \quad U_{m9} = -0,19 \text{ В}.$$

Дев'ята гармоніка, зважаючи на її малість, може не враховуватися у подальших діях.

Визначення миттєвого значення розкладання функції $u(t)$ у ряд Фур'є (непарні гармоніки 1...7):

$$u(t) = \sum_{k=1}^7 U_{mk} \sin(k\omega t) = 100\sin(\omega t) - 40\sin(3\omega t) + 15\sin(5\omega t) + 5\sin(7\omega t) \text{ В}.$$

Графіки $u(t)$ і амплітудного частотного спектру подані на рис. 6.1.

ЗАДАЧА 6.2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну пилкоподібну напругу, що описується на інтервалі $0 < \omega t < 2\pi$ функцією: $u(\omega t) = \frac{\omega t}{2\pi}$.

Розв'язання

Постійна складова (нульова гармоніка):

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2}.$$

До речі, її можна також визначити з формули для площі трикутника.

Амплітуди синусної та косинусної складових k -ої гармоніки визначаються за формулами:

$$U'_{mk} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega t \sin(k\omega t) d(\omega t) = \frac{\sin(k2\pi) - k2\pi \cos(k2\pi)}{2(k\pi)^2} = -\frac{1}{k\pi}.$$

$$U''_{mk} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega t \cos(k\omega t) d(\omega t) = \frac{k2\pi \sin(k2\pi) + \cos(k2\pi) - \cos(0)}{2(k\pi)^2} = 0.$$

Таким чином, в розкладанні функції $u(\omega t)$ присутні лише синусоїдні складові і розкладання має вигляд:

$$u(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\omega t)}{k}. \quad (6.3)$$

На рис. 6.2 подані графіки функції $u(\omega t)$, побудовані відповідно до (6.3) для різного числа гармонік. Очевидно, що збільшення числа гармонік підвищує точність представлення вихідної функції. Проте, при цьому все більшою мірою виявляються характерні “викиди” в точках розриву вихідної функції (явище Гіббса^{*)}). Це явище характерне тим, що функція, представлена тригонометричним рядом, у місці розриву робить стрибок, який перевищує початкову функцію приблизно на 18%. Із-за явища Гіббса представлення розривних функцій поблизу точок розриву не можна визнати задовільним.

ЗАДАЧА 6.3. Синусоїдну напругу з амплітудою U_m , в якій “відтяти” від’ємні півхвилі (рис. 6.3,а^{**}), розкласти у тригонометричний ряд.

$$\text{Відповідь: } u(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{2U_m}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \dots \right).$$

^{*)} Гіббс – американський фізик, який уперше виявив і дослідив це явище (1899 р.).

^{**)} Така напруга спостерігається на виході однофазного однонапівперіодного випрямляча, що працює на активне навантаження.

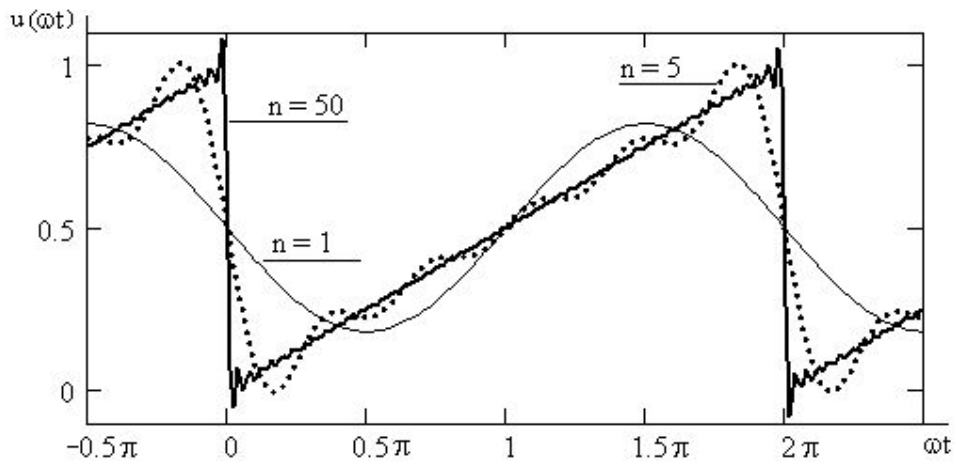


Рис. 6.2. Графіки функції $u(t)$.

$n = 1$ – перша гармоніка розкладу (6.3); $n = 5$ – сума п'яти гармонік розкладу (6.3); $n = 50$ – сума п'ятдесяти гармонік.

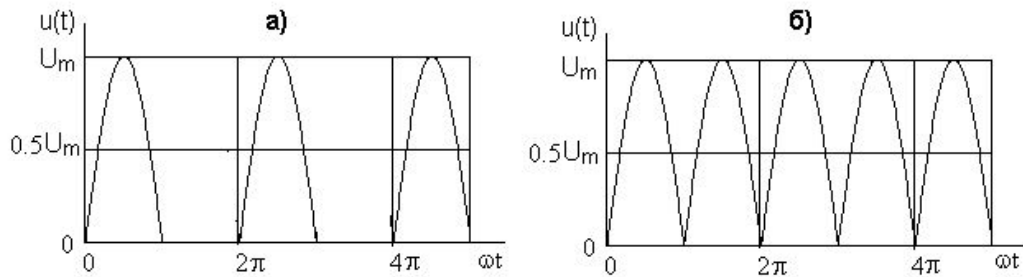


Рис. 6.3

ЗАДАЧА 6.4. Розкласти у тригонометричний ряд напругу на виході однофазного мостового випрямляча, яка описується функцією

$$u(t) = |U_m \cdot \sin(\omega t)| \quad (\text{рис. 6.3,б}).$$

Відповідь:
$$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} - \frac{4U_m}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \dots \right).$$

ЗАДАЧА 6.5. Ця задача ілюструє застосування комплексної передатної функції, розпочате у задачах 5.42 і 5.43.

Розрахувати і побудувати графік вихідної напруги $u_2(t)$ схеми із

КПФ
$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{83333}{j\omega + 66,67} \text{ Ом}$$
 за

умови, що на вході діє джерело періодичного несинусоїдного струму, графік якого подано на рис. 6.4.

Розв'язання

Виконаємо аналітичне розкладання в ряд Фур'є функції рис. 6.4. Період і кутова частота основної гармоніки:

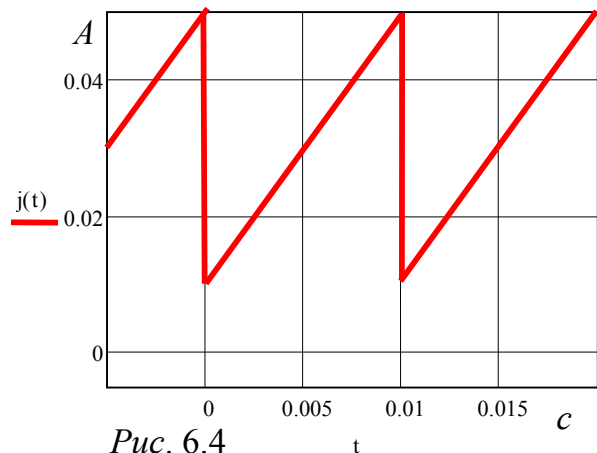


Рис. 6.4

$$T = 0,01 \text{ c}, \quad \omega = 2\pi/T = 628 \text{ рад/с.}$$

Аналітичний опис функції в межах $0 \leq t \leq T$:

$$j(t) := 0.01 + 4 \cdot t \text{ A.}$$

Виберемо кількість гармонік розкладання $m := 10$, хай номери гармонік змінюються в межах $k := 1 \dots m$.

Постійна складова ряду:

$$j_0(t) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T j(t) dt \quad j_0(0.01) = 0.03,$$

таким чином, $Bm_0 := 0.03$, $Cm_0 := 0$.

Амплітуди синусних і косинусних складових:

$$Bm_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T j(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt \quad Cm_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T j(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) dt.$$

$$Bm^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	0.03	-0.013	-6.366·10 ⁻³	-4.244·10 ⁻³	-3.183·10 ⁻³	-2.546·10 ⁻³

$$Cm^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Звідси видно, що у розкладанні відсутні косинусні складові.

Повні амплітуди і початкові фази гармонік:

$$Jm_k := j_0(0.01) \quad Jm_k := \sqrt{(Bm_k)^2 + (Cm_k)^2} \quad \psi_k := \begin{cases} \text{atan} \left(\frac{Cm_k}{Bm_k} \right), & Bm_k > 0 \\ \pi + \text{atan} \left(\frac{Cm_k}{Bm_k} \right), & Bm_k < 0 \end{cases}$$

$$\psi_0 := \pi/2$$

$$\frac{\psi}{\text{deg}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	90	180	180	180	180	180	180	180	180	180

$$Jm^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	0.03	0.013	6.366·10 ⁻³	4.244·10 ⁻³	3.183·10 ⁻³	2.546·10 ⁻³

Окремі гармоніки і повний струм джерела:

$$j_1(t) := Jm_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1) \quad j_2(t) := Jm_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_2)$$

$$j_3(t) := Jm_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_3) \quad j_4(t) := Jm_4 \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t + \psi_4)$$

$$j_5(t) := Jm_5 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + \psi_5) \quad j_6(t) := Jm_6 \cdot \sin(6 \cdot \omega \cdot t + \psi_6)$$

$$j(t) := j_0(t) + \sum_{k=1}^m (Jm_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k)).$$

Відповіді з числовими значеннями: $j_0(t) = 0,03 \text{ A}$,

$$j_1(t) = 0,013 \sin(\omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A}, \quad j_2(t) = 0,00637 \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A},$$

$$j_3(t) = 0,00424 \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A}, \quad j_4(t) = 0,00138 \sin(4 \cdot \omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A},$$

$$j_5(t) = 0,00255 \sin(5 \cdot \omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A}, \quad j_6(t) = 0,00212 \sin(6 \cdot \omega \cdot t + 180^\circ) \text{ A}.$$

Графіки постійної складової, перших п'яти гармонік та повного струму з урахуванням одинадцяти перших гармонік подано на рис. 6.5.

Із застосуванням комплексного передатного опору, а точніше, його АЧХ и ФЧХ, що одержані під час розв'язанні задачі 5.42:

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{83333}{j\omega + 66,67} \text{ Ом}, \quad Z(\omega) = \sqrt{\frac{83333^2}{\omega^2 + 66,67^2}} \text{ Ом}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{66,67},$$

визначаємо гармоніки вихідної напруги:

$$u_{20}(t) := Z(0) \cdot j_0(t) \quad U_{2m_k} := Z(k \cdot \omega) \cdot J_{m_k} \quad \psi u_{2_k} := \psi_k + \varphi(k \cdot \omega)$$

$U_{2m}^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	37.5	1.679	0.422	0.188	0.106	0.068	0.047	0.034	0.026
$\frac{\psi u_2^T}{\text{deg}} =$	0	1	2	3	4	5	6	7		
	0	0	96.057	93.037	92.026	91.519	91.216	91.013	90.868	

$$u_{20}(t) = 37,5 \text{ В},$$

$$u_{21}(t) = 1,679 \sin(\omega \cdot t + 96,06^\circ) \text{ В}, \quad u_{22}(t) = 0,422 \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 93,03^\circ) \text{ В},$$

$$u_{23}(t) = 0,188 \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 92,03^\circ) \text{ В}, \quad u_{24}(t) = 0,106 \sin(4 \cdot \omega \cdot t + 91,52^\circ) \text{ В},$$

$$u_{25}(t) = 0,068 \sin(5 \cdot \omega \cdot t + 91,22^\circ) \text{ В}, \quad u_{26}(t) = 0,047 \sin(6 \cdot \omega \cdot t + 91,01^\circ) \text{ В}.$$

Окремі гармоніки і повна вихідна напруга:

$$u_{21}(t) := U_{2m_1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi u_{2_1}) \quad u_{22}(t) := U_{2m_2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_2})$$

$$u_{23}(t) := U_{2m_3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_3}) \quad u_{24}(t) := U_{2m_4} \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_4})$$

$$u_{25}(t) := U_{2m_5} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_5}) \quad u_{26}(t) := U_{2m_6} \cdot \sin(6 \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_6})$$

$$u_2(t) := u_{20}(t) + \sum_{k=1}^m (U_{2m_k} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi u_{2_k})).$$

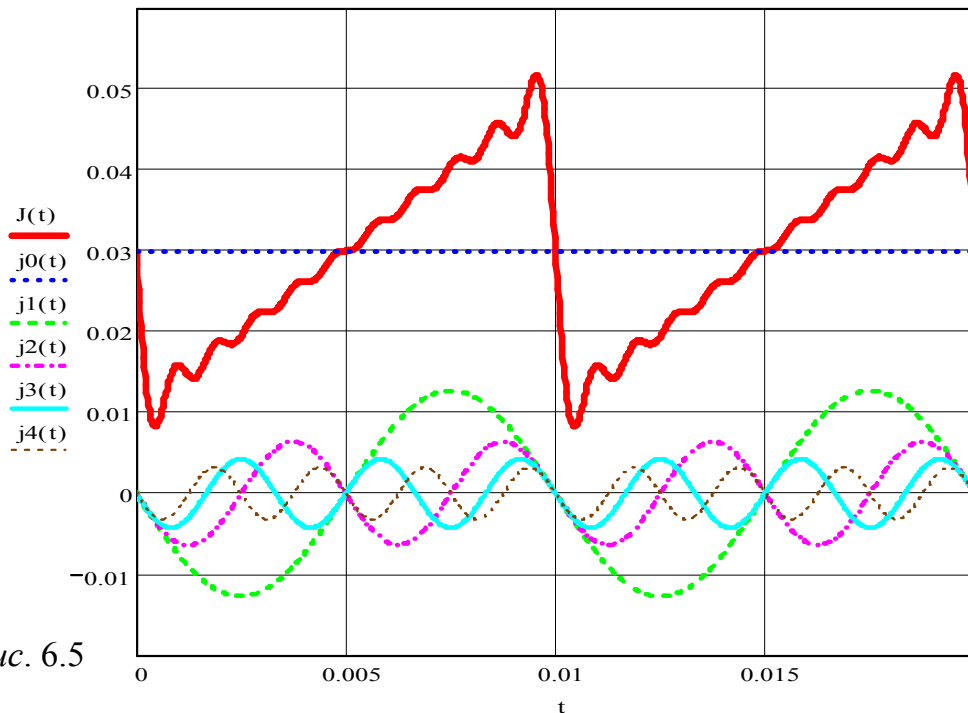


Рис. 6.5

Графіки постійної складової і повної напруги з урахуванням 11 перших гармонік подані на рис. 6.6,а, а подальші чотири гармоніки, зважаючи на їх малість, подані окремо на рис. 6.6,б.

Як видно з графіка, амплітуда першої гармоніки не перевищує 2 В, а амплітуди подальших гармонік менші за 0,5 В. Таким чином, коливання вихідної напруги малі, напруга згладжена завдяки використанню фільтру

НИЗЬКОЇ ЧАСТОТИ.

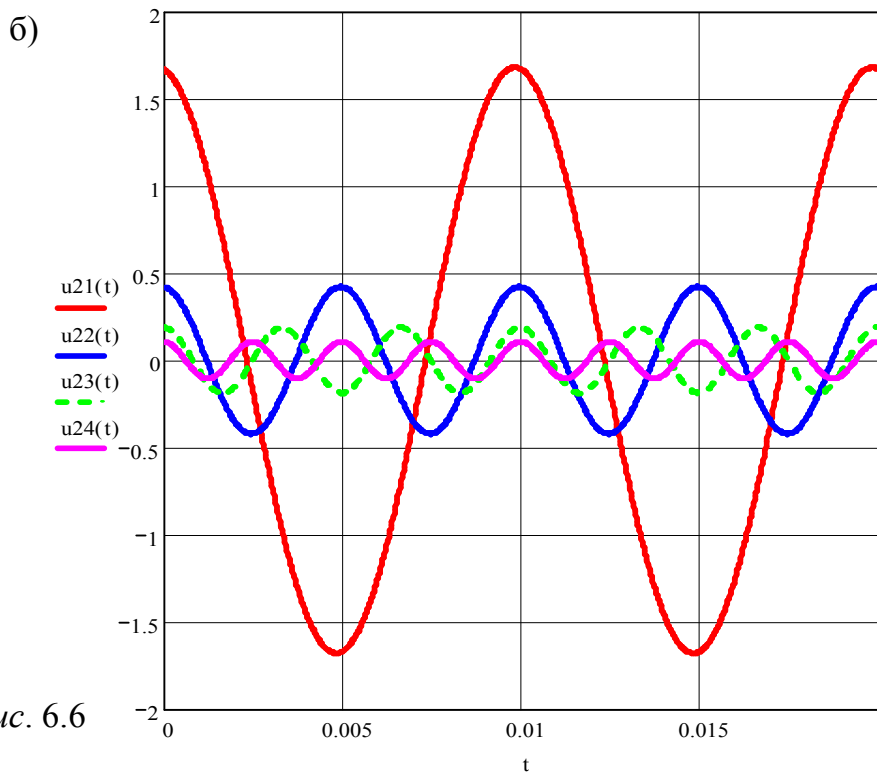
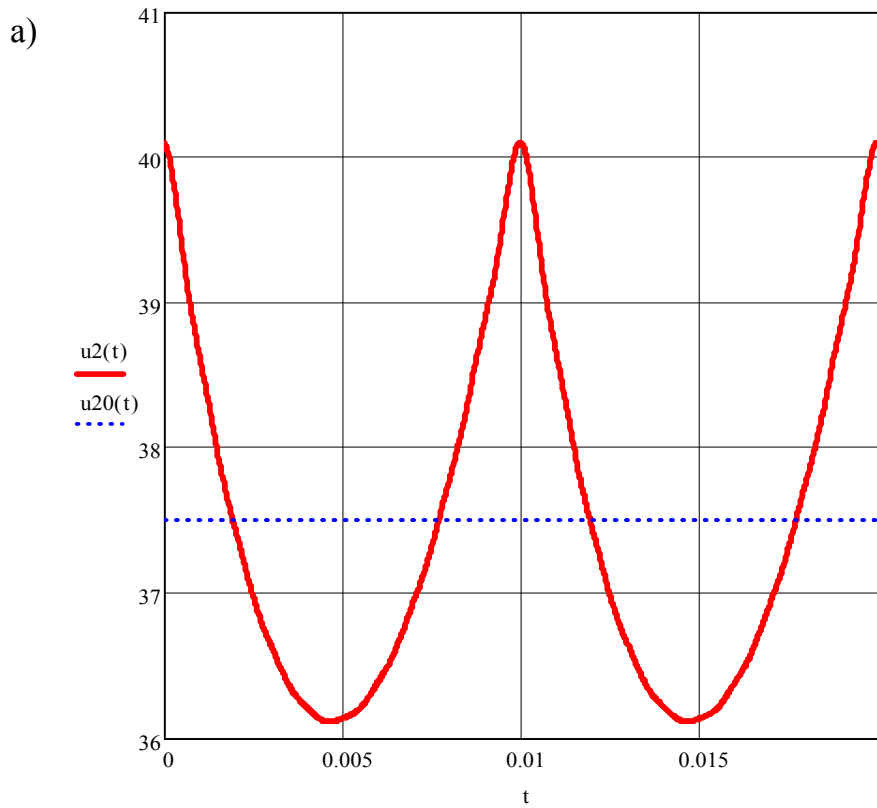


Рис. 6.6

6.3 ОДНОФАЗНІ КОЛА НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

ЗАДАЧА 6.6. До послідовного кола $r = 40 \text{ Ом}$ і $C = 40 \text{ мкФ}$ прикладена напруга, що змінюється згідно із законом (див. задачу 6.1):

$$u(t) = Um^{(1)} \sin(\omega t) + Um^{(3)} \sin(3\omega t) + Um^{(5)} \sin(5\omega t) + \dots, \quad (6.4)$$

де $Um^{(1)} = 100 \text{ В}$, $Um^{(3)} = -40 \text{ В}$, $Um^{(5)} = 15 \text{ В}$, $Um^{(7)} = 5 \text{ В}$, $Um^{(9)} = -0,19 \text{ В}$.

У спільній системі координат побудувати графіки напруги на активному опорі, на ємності, а також напругу джерела живлення. Визначити їх діючі значення, коефіцієнти спотворення, коефіцієнти гармонік, перевірити баланс потужностей.

Розв'язання

Задачу розв'яжемо із застосуванням програми MathCAD. Введення вихідної інформації: масиви амплітуд і початкових фаз напруги джерела, його період T , кутова частота ω , параметри кола r , C і змінна k :

$$T := 0.02 \quad r := 40 \quad C := 40 \cdot 10^{-6} \quad k := 1..5$$

$$Um := \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 15 \\ 5 \\ 0.19 \end{pmatrix} \quad \psi := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \omega := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Формування функцій користувача для визначення масивів комплексних амплітуд напруги джерела, вхідних опорів, комплексних амплітуд струмів та напруг на ємності (враховуючи, що розкладання (6.4) містить тільки непарні синусоїди, змінній $k = 1, 2, 3 \dots$ відповідають номери гармонік $2 \cdot k - 1 = 1, 3, 5, \dots$):

$$Z_k := r + \frac{1}{j \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \omega \cdot C} \quad Um_k := Um_k \cdot e^{j \cdot \psi_k} \quad Im_k := \frac{Um_k}{Z_k} \quad Ucm_k := Im_k \cdot \frac{1}{j \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \omega \cdot C}$$

Масиви амплітуд напруг – вхідної, на активному опорі, на ємності:

$$Um = \begin{pmatrix} 100 \\ -40 \\ 15 \\ 5 \\ -0.19 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{|Im| \cdot r} \begin{pmatrix} 44.911 \\ 33.336 \\ 13.937 \\ 4.810 \\ 0.186 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{|Ucm|} \begin{pmatrix} 89.348 \\ 22.107 \\ 5.545 \\ 1.367 \\ 0.041 \end{pmatrix}$$

Визначення діючих значень напруги джерела U , струму I , напруги на резисторі $I \cdot r$, напруги на ємності Uc :

$$U := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \frac{(Um_k)^2}{2}} \quad I := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \frac{(|Im_k|)^2}{2}} \quad Uc := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \frac{(|Ucm_k|)^2}{2}}$$

$$U = 76.974 \quad I = 1.023 \quad I \cdot r = 40.901 \quad Uc = 65.209$$

Визначення потужностей окремих гармонік, потужностей джерела і споживача, коефіцієнта потужності χ :

$$P_{Ek} := \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \cdot U_{m_k} \cdot \overline{I_{m_k}}\right) \quad P_{E\Sigma} := \sum_{k=1}^5 P_{Ek} \quad P_{II} := I^2 \cdot r$$

$$P_{E\Sigma} = 41.821 \quad P_{II} = 41.821 \quad \chi := \frac{P_{E\Sigma}}{U \cdot I} \quad \chi = 0.531$$

$$P_E = \begin{pmatrix} 25.12 \\ 13.891 \\ 2.428 \\ 0.289 \\ 4.302 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Визначення коефіцієнта гармонік k_g і коефіцієнта спотворення k_C трьох напруг (джерела, на активному опорі, на ємності):

$$k_g := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{U^2 - \left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{U} \\ \frac{\sqrt{I^2 - \left(\frac{|I_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2}}{I} \\ \frac{\sqrt{U_c^2 - \left(\frac{|U_{cm1}|}{\sqrt{2}}\right)^2}}{U_c} \end{pmatrix} \quad k_C := \begin{pmatrix} \frac{U_{m1}}{U \cdot \sqrt{2}} \\ \frac{|I_{m1}|}{I \cdot \sqrt{2}} \\ \frac{|U_{cm1}|}{U_c \cdot \sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad k_g = \begin{pmatrix} 0.395 \\ 0.631 \\ 0.248 \end{pmatrix} \quad k_C = \begin{pmatrix} 0.919 \\ 0.776 \\ 0.969 \end{pmatrix}$$

Запис миттєвих значень напруг і струмів у колі:

$$u(t) := \sum_{k=1}^5 U_{m_k} \cdot \sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \omega \cdot t]$$

$$i(t) := \sum_{k=1}^5 |I_{m_k}| \cdot \sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \omega \cdot t + \arg(I_{m_k})]$$

$$u_r(t) := i(t) \cdot r \quad u_c(t) := u(t) - u_r(t)$$

Графіки напруги кола подані на рис. 6.7. Коментарі до графіків:

1. Вищі гармоніки, які входять до складу напруги джерела, інтенсивно проявляють себе в нарузі на активному опорі (отже, в кривій струму) і мало виявляються у складі напруги на ємності.

2. Із зіставлення коефіцієнтів видно, що крива напруги на ємності ($k_C = 0,969$) майже не спотворена у порівнянні з кривою струму ($k_C = 0,776$).

3. Кількісно про склад вищих гармонік можна також судити по коефіцієнту гармонік k_g , який є найбільш низьким для кривої напруги на ємності ($k_g = 0,248$), тоді як для кривої струму його значення складає $k_g = 0,631$.

Висновок. Для rC -кола характерне те, що струм (і напруга на резисторі) як би відтягують на себе високочастотні коливання, визволяючи від них напругу на ємності. Механічним аналогом rC -кола можна вважати

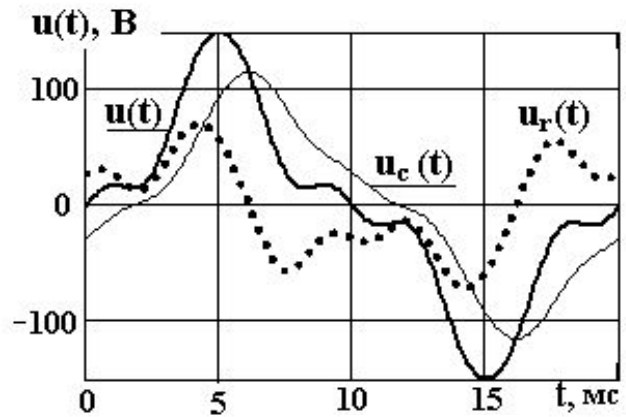


Рис. 6.7

демпфер (гаситель коливань), який містить пружний елемент (наприклад, пружину) і механічний опір (наприклад, поршень). Подібні пристрої широко застосовуються для гасіння коливань у вимірювальних приладах, амортизаторах і тому подібне.

ЗАДАЧА 6.7. Задана в задачі 6.6 вхідна напруга діє на послідовне коло $r = 1000 \text{ Ом}$ і $L = 3 \text{ Гн}$. Виконати розрахунок амплітуд гармонійних складових напруг на активному опорі і індуктивності. Побудувати амплітудні спектри цих напруг, напруги джерела живлення, зробити висновки відносно розподілу вищих гармонік.

Відповідь: 100 В, 40 В, 15 В, 5 В напруга джерела.
 72,8 В, 13,3 В, 3,11 В, 0,75 В напруга на активному опорі,
 68,6 В, 37,7 В, 14,7 В, 4,94 В напруга на індуктивному опорі.

Звертаємо увагу на те, що механічним аналогом rL -кола є маса і механічний опір, пропорційний швидкості (наприклад, човен на воді).

ЗАДАЧА 6.8. У колі рис. 6.8 на частоті основної гармоніки $\omega_1 = 9600 \text{ с}^{-1}$ має місце резонанс струмів, а на третій гармоніці настає резонанс напруги. Визначити індуктивності котушок L_1 і L_2 , якщо $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 5 \text{ Ом}$, $C = 2,5 \text{ мкФ}$.
Відповіді: 1) $L_1 = 25,2 \text{ мкГн}$, $L_2 = 63,4 \text{ мкГн}$; 2) $L_1 = 0,543 \text{ мГн}$, $L_2 = 4,28 \text{ мГн}$.

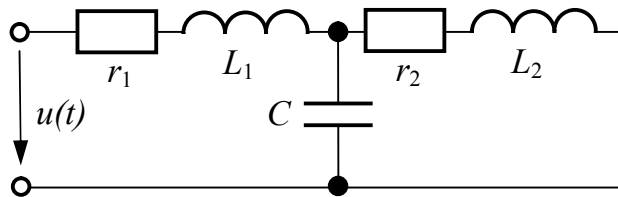


Рис. 6.8

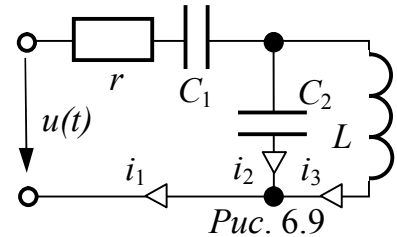


Рис. 6.9

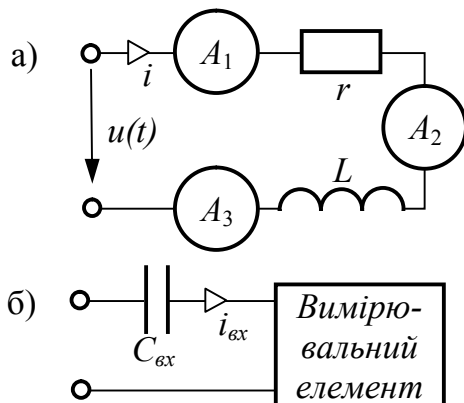
ЗАДАЧА 6.9. Коло рис. 6.9 налагоджено в резонанс напруги на основній гармоніці ($f_1 = 800 \text{ Гц}$) і не пропускає струму третьої гармоніки. Визначити ємності C_1 і C_2 , струми кола і напругу на індуктивності, якщо відомо:

$$u(t) = 20 \cdot \sin(\omega_1 t) + 10 \cdot \sin(3\omega_1 t) \text{ В}, \quad r = 50 \text{ Ом}, \quad L = 2 \text{ мГн}.$$

Відповіді: $C_1 = 17,6 \text{ мкФ}$; $C_2 = 2,2 \text{ мкФ}$;
 $i_1 = 0,4 \cdot \sin(\omega_1 t) \text{ А}$, $i_2 = 0,05 \cdot \sin(\omega_1 t + 180^\circ) \text{ А}$, $i_3 = 0,45 \cdot \sin(\omega_1 t) \text{ А}$,
 $u_L = 4,524 \cdot \sin(\omega_1 t + 90^\circ) + 10 \cdot \sin(3\omega_1 t) \text{ В}$.

ЗАДАЧА 6.10. У колі $r-L$ (рис. 6.10,а) тече несинусоїдний струм

$$i = 5 - 10 \sin \omega t + 7 \cos 2\omega t + 4 \sin 3\omega t \text{ А}.$$



A_1 – магнітоелектричної системи,
 A_2 – електродинамічної системи,
 A_3 – цифровий АВО-метр, який зібраний на інтегральній мікросхемі

Рис. 6.10

Визначити покази амперметрів (для A_3 знайти покази для двох положень перемикача роду струму).

Розв'язання

1) A_1 реагує на постійну складову струму, як і A_3 , якщо перемикач роду струму знаходиться в положенні «постійний струм» (=). В цьому випадку їх покази однакові: A_1 і $A_3 \rightarrow I_0 = 5 \text{ A}$.

2) A_2 вимірює діюче значення як синусоїдного, так і несинусоїдного струму і його показ

$$A_2 \rightarrow I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{I_{km}^2}{2}} = \sqrt{5^2 + \frac{10^2}{2} + \frac{7^2}{2} + \frac{4^2}{2}} = 10,34 \text{ A}.$$

3) A_3 при положенні перемикача роду струму «змінний струм \sim » за рахунок вхідного конденсатора (рис. 6.10,б) відсікає постійну складову струму, вхідний струм вимірювального елементу тепер має лише змінні складові

$$i_{ex} = -10\sin\omega t + 7\cos 2\omega t + 4\sin 3\omega t \text{ A}.$$

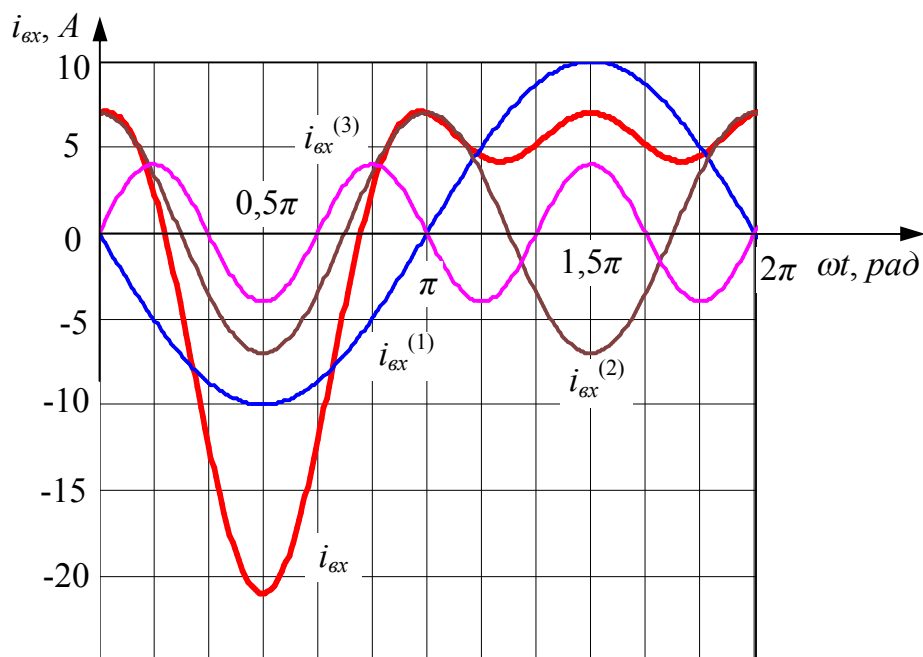


Рис. 6.11

Крива струму i_{ex} подана на рис. 6.11. Числовим методом визначені моменти зміни знаку струму $\omega t_1 = 36,2^\circ$, $\omega t_2 = 143,8^\circ$.

$$\text{Середнє за модулем значення струму } I_{сер} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |i_{ex}(\omega t)| d\omega t = 7,532 \text{ A}.$$

Показ амперметра в положенні роду струму (\sim):

$$A_3 \rightarrow I_{сер} \cdot k_\phi = 7,532 \cdot 1,11 = 8,36 \text{ A},$$

де $k_\phi = 1,11$ – коефіцієнт форми синусоїди.

ЗАДАЧА 6.11. Струм через індуктивність відомий:

$$i = 10 \cdot \sin(\omega t) + 5 \cdot \sin(3\omega t) + 2 \cdot \sin(5\omega t) \text{ A}.$$

У скільки разів індуктивність, яка визначена за показами приладів (амперметра і вольтметра, які показують діючі значення) в припущенні, що струм синусоїдний, більше дійсного значення індуктивності?

Відповідь: в 1,81 разів.

ЗАДАЧА 6.12. При подачі на ідеальну індуктивність L періодичної ($T=0,02$ с) несинусоїдної напруги, що складається з чотирьох гармонійних складових ($U^{(1)} = 30$ В; $U^{(2)} = 20$ В; $U^{(3)} = 9$ В; $U^{(4)} = 4$ В), її струм склав $I = 3,37$ А.

Знайти відсоток похибки при визначенні індуктивності як частки від ділення напруги на струм і кутову частоту. Визначити також потужність спотворення кола.

Відповідь: похибка $\approx 18\%$, $T \approx 39$ ВА.

ЗАДАЧА 6.13. На рис. 6.12,а зображено коло з джерелом негармонійної

напруги $u(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\omega t)}{k}$, графік якого подано на рис. 6.12,б.

Числові дані:

$$U_m = 20 \text{ В,}$$

$$\omega = 1000 \text{ рад/с,}$$

$$L_1 = 0,004 \text{ Гн,}$$

$$L_3 = 0,002 \text{ Гн,}$$

$$R_3 = 10 \text{ Ом,}$$

$$C_2 = 50 \text{ мкФ.}$$

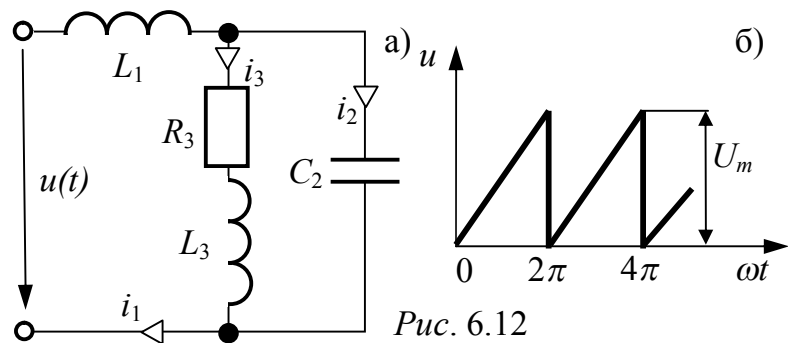


Рис. 6.12

Обмежившись п'ятьма складовими ряду Фур'є, виконати наступне:

1. Записати формулу миттєвого значення ЕРС в числах, підставивши значення U_m і ω , і визначити діюче значення ЕРС.

2. Розрахувати діючі значення струмів, записати миттєве значення струму i_1 , побудувати його графік.

3. Обчислити коефіцієнт потужності кола. Скласти баланс активних і реактивних потужностей.

Розв'язання

1. Миттєве значення напруги:

$$u(t) = \frac{20}{2} - \frac{20}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(1000t)}{1} + \frac{\sin(2000t)}{2} + \frac{\sin(3000t)}{3} + \dots \right) \approx$$

$$\approx 10 + 6,366 \cdot \sin(1000t + 180^\circ) + 3,183 \cdot \sin(2000t + 180^\circ) +$$

$$+ 2,122 \cdot \sin(3000t + 180^\circ) + 1,592 \cdot \sin(4000t + 180^\circ) \text{ В.}$$

2. Діюче значення напруги:

$$U = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(U_m^{(k)})^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 0,5 \cdot (6,366^2 + 3,183^2 + 2,122^2 + 1,592^2)} = 11,35 \text{ В.}$$

3. Розрахунок постійної складової ряду:

$$i_2^{(0)} = 0; \quad i_1^{(0)} = i_3^{(0)} = U^{(0)}/R_3 = 10/10 = 1 \text{ А; } P^{(0)} = U^{(0)} \cdot i_1^{(0)} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ Вт.}$$

4. Розрахунок гармонійних складових виконуємо за формулами:

- реактивні опори: $x_1^{(k)} = k \cdot \omega \cdot L_1$, $x_2^{(k)} = 1/(k \cdot \omega \cdot C_2)$, $x_3^{(k)} = k \cdot \omega \cdot L_3$;
- комплексні опори кола $Z_1^{(k)} = j \cdot x_1^{(k)}$; $Z_2^{(k)} = -j \cdot x_2^{(k)}$;
 $Z_3^{(k)} = R_3 + j \cdot x_3^{(k)}$; $Z_{23}^{(k)} = Z_2^{(k)} \cdot Z_3^{(k)} / (Z_2^{(k)} + Z_3^{(k)})$; $Z^{(k)} = Z_1^{(k)} + Z_{23}^{(k)}$.
- комплексні амплітуди напруги джерела: $U_m^{(1)} = 6,366 \cdot e^{j \cdot 180^\circ}$;
 $U_m^{(2)} = 3,183 \cdot e^{j \cdot 180^\circ}$; $U_m^{(3)} = 2,122 \cdot e^{j \cdot 180^\circ}$; $U_m^{(4)} = 1,592 \cdot e^{j \cdot 180^\circ}$;
- комплексні амплітуди струмів k -ої гармоніки:

$$I_{m1}^{(k)} = U_m^{(k)} / Z^{(k)}; \quad I_{m2}^{(k)} = I_{m1}^{(k)} \frac{Z_3^{(k)}}{Z_2^{(k)} + Z_3^{(k)}}; \quad I_{m3}^{(k)} = I_{m1}^{(k)} \frac{Z_2^{(k)}}{Z_2^{(k)} + Z_3^{(k)}}.$$

- комплексна потужність джерела для k -ої гармоніки: $S^{(k)} = 1/2 \cdot U_m^{(k)} \cdot I_{m1}^{(k)*}$.

Результати розрахунків по поданих формулах зведені у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

№ гармоніки	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$, Ом	4	8	12	16
$x_2^{(k)}$, Ом	20	10	6,67	5
$x_3^{(k)}$, Ом	2	4	6	8
$Z_1^{(k)}$, Ом	$j \cdot 4$	$j \cdot 8$	$j \cdot 12$	$j \cdot 16$
$Z_2^{(k)}$, Ом	$-j \cdot 20$	$-j \cdot 10$	$-j \cdot 6,67$	$-j \cdot 5$
$Z_3^{(k)}$, Ом	10,2 $\angle 11,3^\circ$	10,8 $\angle 21,8^\circ$	11,66 $\angle 31,0^\circ$	12,81 $\angle 38,7^\circ$
$Z_{23}^{(k)}$, Ом	9,91 $\angle -17,7^\circ$	9,24 $\angle -37,2^\circ$	7,76 $\angle -55,2^\circ$	6,13 $\angle 68,0^\circ$
$Z^{(k)}$, Ом	9,49 $\angle 5,9^\circ$	7,74 $\angle 18,2^\circ$	7,16 $\angle 51,8^\circ$	10,56 $\angle 77,5^\circ$
$U_m^{(k)}$, В	-6,366	-3,183	-2,122	-1,592
$I_{m1}^{(k)}$, А	0,671 $\angle 174,1^\circ$	0,411 $\angle 161,8^\circ$	0,296 $\angle 128,2^\circ$	0,151 $\angle 102,5^\circ$
$I_{m2}^{(k)}$, А	0,322 $\angle -114,7^\circ$	0,380 $\angle -145,4^\circ$	0,345 $\angle 163,0^\circ$	0,185 $\angle -124,5^\circ$
$I_{m3}^{(k)}$, А	0,652 $\angle 145,0^\circ$	0,353 $\angle 102,8^\circ$	0,197 $\angle 42,0^\circ$	0,072 $\angle 4,2^\circ$
$S^{(k)}$, ВА	2,125 + $j0,22$	0,62 + $j0,205$	0,195 + $j0,247$	0,026 + $j0,117$

5. Діючі значення струмів визначаємо за формулою:

$$I_q = \sqrt{(I_q^{(0)})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(I_{mq}^{(k)})^2}{2}};$$

потужності в окремих вітках кола: $P_q = R_q \cdot (I_q)^2$; $Q_q^{(k)} = \pm x_q^{(k)} \cdot (I_q^{(k)})^2$.

Результати розрахунків зведемо у табл. 6.3 та табл. 6.4.

Таблиця 6.3

I_1 , А	I_2 , А	I_3 , А	P_1 , Вт	P_2 , Вт	P_3 , Вт
1,17	0,45	1,14	0	0	13,0

Таблиця 6.4

№ гармоніки	1	2	3	4	Q_Σ
Q_1 , вар	0,9	0,676	0,526	0,182	2,284
Q_2 , вар	-1,102	-0,722	-0,397	-0,086	-2,307
Q_3 , вар	0,425	0,249	0,116	0,021	0,811

Перевіряємо баланс потужностей:

- активна, реактивна і повна потужності джерела:

$$P = \operatorname{Re}(\sum_k \underline{S}^{(k)}) = 12,966 \text{ Вт}; \quad Q = \operatorname{Im}(\sum_k \underline{S}^{(k)}) = 0,789 \text{ вар};$$

$$S = U \cdot I_1 = 11,35 \cdot 1,17 = 13,28 \text{ ВА}.$$

Увага: $S^2 = 176,4 > P^2 + Q^2 = 168,8 \text{ ВА}.$

- активна і реактивна потужності споживачів:

$$P_{\Pi} = P_1 + P_2 + P_3 = 0 + 0 + 13 = 13 \text{ Вт};$$

$$Q_{\Pi} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2,284 - 2,307 + 0,811 = 0,788 \text{ вар}.$$

Баланс потужностей $P = P_{\Pi}$ і $Q = Q_{\Pi}$ виконується.

6. Миттєве значення першого струму і його графік (рис. 6.13):

$$i_1(t) = 1 + 0,671 \cdot \sin(1000 \cdot t + 174,1^\circ) + 0,411 \cdot \sin(2000 \cdot t + 161,8^\circ) + \\ + 0,296 \cdot \sin(3000 \cdot t + 128,2^\circ) + 0,151 \cdot \sin(4000 \cdot t + 102,5^\circ) \text{ А}.$$

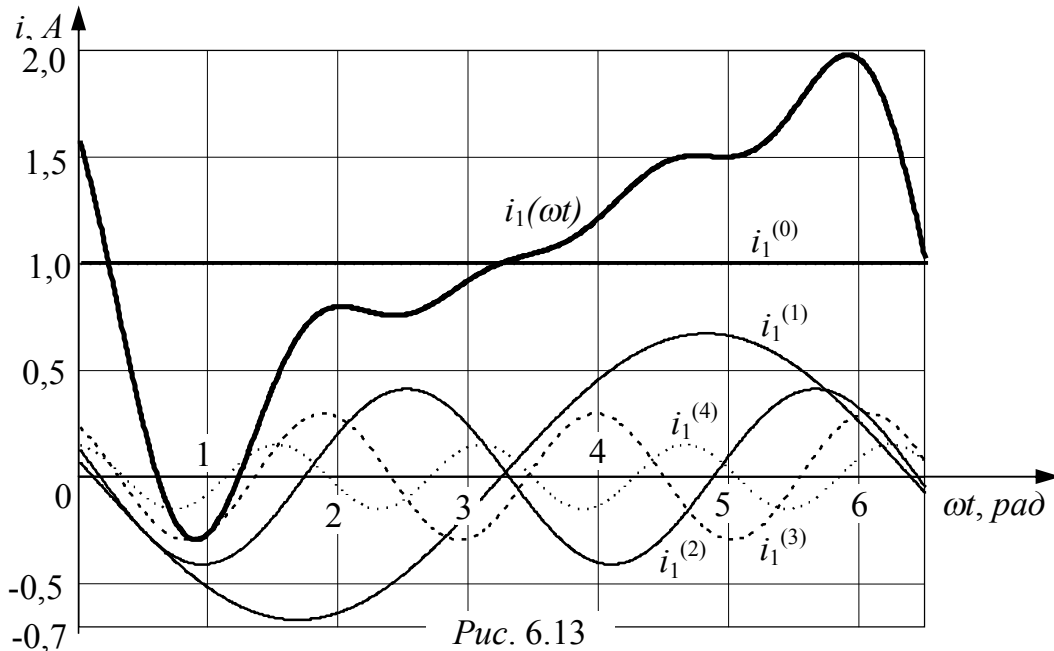


Рис. 6.13

ЗАДАЧА 6.14. Напругу $u = 50 + 200\sin(\omega t + 45^\circ) + 100\sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ В}$ подано на вхід кола рис. 6.14. Опори елементів кола струмам основної гармоніки становлять $r_1 = r_2 = r_3 = 8 \text{ Ом}$; $\frac{1}{\omega C_1} = 15 \text{ Ом}$; $\omega L_2 = 3 \text{ Ом}$; $\frac{1}{\omega C_3} = 15 \text{ Ом}$.

Визначити миттєві і діючі значення всіх струмів, а також напруг u_{12} і u_{23} . Розрахувати коефіцієнт потужності кола і побудувати графік струму $i_1(t)$, якщо основна частота $f = 50 \text{ Гц}$.

Розв'язання

Розрахунок проведемо методом накладання по окремих гармоніках.

1. Розрахунок нульової гармоніки (постійної складової). Оскільки для нульової гармоніки $\frac{1}{\omega C_1} = \infty$, то струми цієї гармоніки не можуть замикатися в колі, а вся напруга живлення буде прикладена до конденсатора C_1 :

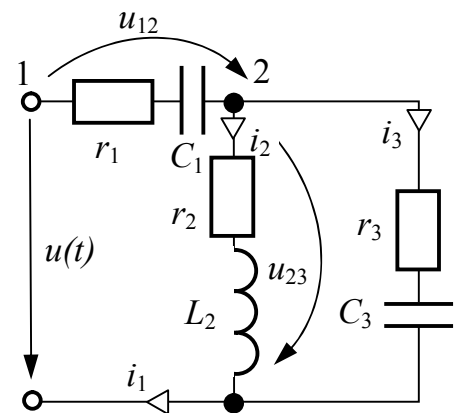


Рис. 6.14

$$I_1^{(0)} = 0, \quad I_2^{(0)} = 0, \quad I_3^{(0)} = 0, \quad U_{12}^{(0)} = 50 \text{ В}, \quad U_{23}^{(0)} = 0.$$

2. Розрахунок першої (основної) гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_1^{(1)} = r_1 - \frac{j}{\omega C_1} = 8 - j15 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3^{(1)} = r_3 - \frac{j}{\omega C_3} = 8 - j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(1)} = r_2 + j\omega L_2 = 8 + j3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}^{(1)} = \underline{Z}_1^{(1)} + \frac{\underline{Z}_2^{(1)} \cdot \underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 15,24 - j15,57 = 21,79e^{-j45,6^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\underline{I}_{1m}^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{200e^{j45}}{21,79e^{-j45,6}} = 9,18e^{j90,6} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{2m}^{(1)} = \underline{I}_{1m}^{(1)} \frac{\underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 7,8e^{j65,6} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{3m}^{(1)} = \underline{I}_{1m}^{(1)} \frac{\underline{Z}_2^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 3,92e^{j148} \text{ А},$$

$$\underline{U}_{12m}^{(1)} = \underline{I}_{1m}^{(1)} \cdot \underline{Z}_1^{(1)} = 156,1e^{j28,7} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{23m}^{(1)} = \underline{I}_{2m}^{(1)} \cdot \underline{Z}_2^{(1)} = 66,7e^{j86,1} \text{ В}.$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_1^{(3)} = r_1 - \frac{j}{3\omega C_1} = 8 - j5 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3^{(3)} = r_3 - \frac{j}{3\omega C_3} = 8 - j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(3)} = r_2 + j3\omega L_2 = 8 + j9 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}^{(3)} = \underline{Z}_1^{(3)} + \frac{\underline{Z}_2^{(3)} \cdot \underline{Z}_3^{(3)}}{\underline{Z}_2^{(3)} + \underline{Z}_3^{(3)}} = 14,9 - j4,72 = 15,61e^{-j17,6^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\underline{I}_{1m}^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{100e^{j60}}{15,61e^{-j17,6}} = 6,41e^{j77,6} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{2m}^{(3)} = \underline{I}_{1m}^{(3)} \frac{\underline{Z}_3^{(3)}}{\underline{Z}_2^{(3)} + \underline{Z}_3^{(3)}} = 3,66e^{j31,6} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{3m}^{(3)} = \underline{I}_{1m}^{(3)} \frac{\underline{Z}_2^{(3)}}{\underline{Z}_2^{(3)} + \underline{Z}_3^{(3)}} = 4,68e^{j111,9} \text{ А},$$

$$\underline{U}_{12m}^{(3)} = \underline{I}_{1m}^{(3)} \cdot \underline{Z}_1^{(3)} = 60,42e^{j45,6} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{23m}^{(3)} = \underline{I}_{2m}^{(3)} \cdot \underline{Z}_2^{(3)} = 44,12e^{j79,9} \text{ B.}$$

4. Розрахуємо діючі значення струмів і напруг

$$I_1 = \sqrt{\left(I_1^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(I_{1m}^{(1)}\right)^2 + \left(I_{1m}^{(3)}\right)^2}{2}} = 7,92 \text{ A,}$$

$$I_2 = \sqrt{\left(I_2^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(I_{2m}^{(1)}\right)^2 + \left(I_{2m}^{(3)}\right)^2}{2}} = 6,1 \text{ A,}$$

$$I_3 = \sqrt{\left(I_{3m}^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(I_{3m}^{(1)}\right)^2 + \left(I_{3m}^{(3)}\right)^2}{2}} = 4,32 \text{ A,}$$

$$U_{12} = \sqrt{\left(U_{12}^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(U_{12m}^{(1)}\right)^2 + \left(U_{12m}^{(3)}\right)^2}{2}} = 128,5 \text{ B,}$$

$$U_{23} = \sqrt{\left(U_{23}^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(U_{23m}^{(1)}\right)^2 + \left(U_{23m}^{(3)}\right)^2}{2}} = 56,5 \text{ B.}$$

Миттєві значення струмів і напруг

$$i_1(t) = i_1^{(0)} + i_1^{(1)} + i_1^{(3)} = 9,18\sin(314t+90,6^\circ) + 6,41\sin(942t+77,6^\circ) \text{ A,}$$

$$i_2(t) = i_2^{(0)} + i_2^{(1)} + i_2^{(3)} = 7,8\sin(314t+65,6^\circ) + 3,66\sin(942t+31,6^\circ) \text{ A,}$$

$$i_3(t) = i_3^{(0)} + i_3^{(1)} + i_3^{(3)} = 3,92\sin(314t+148^\circ) + 4,68\sin(942t+111,9^\circ) \text{ A,}$$

$$u_{12}(t) = u_{12}^{(0)} + u_{12}^{(1)} + u_{12}^{(3)} = 50 + 156,1\sin(314t+28,7^\circ) + 60,42\sin(942t+45,6^\circ) \text{ B,}$$

$$u_{23}(t) = u_{23}^{(0)} + u_{23}^{(1)} + u_{23}^{(3)} = 66,7\sin(314t+86,1^\circ) + 44,12\sin(942t+79,9^\circ) \text{ B.}$$

5. Визначимо коефіцієнт потужності кола, для чого розрахуємо його активну і повну потужності:

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} =$$

$$= U^{(0)} I_1^{(0)} + \operatorname{Re} [\underline{U}^{(1)} \underline{I}_1^{*(1)}] + \operatorname{Re} [\underline{U}^{(3)} \underline{I}_1^{*(3)}] = 0 + 642,1 + 305,3 = 947,4 \text{ Bm,}$$

$$S = UI_1 = \sqrt{\left(U^{(0)}\right)^2 + \frac{\left(U_m^{(1)}\right)^2 + \left(U_m^{(3)}\right)^2}{2}} \cdot I_1 = 1313 \text{ VA,}$$

$$\cos \theta = \frac{P}{S} = 0,722.$$

6. Графік струму $i_1(t)$ побудований на рис. 6.15.

6.4 ТРИФАЗНІ КОЛА НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Фазні ЕРС та напруги у трифазних колах можуть містити різні гармоніки за виключенням постійної складової. Кут зсуву фаз між фазами A , B , C для k -ої гармоніки дорівнює $\varphi = 120^\circ \cdot k$. Тому усі гармоніки від $k=1$ до $k=\infty$ можна поділити на три характерні групи:

$$1, 4, 7 \dots (3N+1); \quad 2, 5, 8 \dots (3N+2); \quad \text{і} \quad 3, 6, 9 \dots (3N+3),$$

де N – натуральне число або 0. У трифазних колах вони формують системи прямої, зворотної та нульової послідовностей фаз.

Гармоніки прямої та зворотної послідовностей аналізуються у традиційний спосіб. Гармоніки нульової послідовності відсутні у лінійних напру-

гах генератора. У зв'язку з цим при з'єднанні в зірку

$$U_L = \sqrt{(U_L^{(1)})^2 + (U_L^{(2)})^2 + (U_L^{(4)})^2 + (U_L^{(5)})^2 + (U_L^{(7)})^2 + \dots} < \sqrt{3} U_\phi,$$

де $U_\phi = \sqrt{(U_\phi^{(1)})^2 + (U_\phi^{(2)})^2 + (U_\phi^{(3)})^2 + (U_\phi^{(4)})^2 + (U_\phi^{(5)})^2 + \dots}$

За умови з'єднання приймачів зіркою навіть під час симетричного навантаження в нейтральному проводі протікає струм, причому він дорівнює потроєному струму нульової послідовності.

За умови з'єднання зіркою без нейтралі струми нульової послідовності не протікають, а напруга зміщення нейтралі під час симетричного навантаження:

$$u_{O1O} = U_{3m} \cdot \sin(3\omega t + \psi_3) + U_{6m} \cdot \sin(6\omega t + \psi_6) + \dots,$$

його діюче значення $U_{O1O} = \sqrt{\frac{U_{3m}^2}{2} + \frac{U_{6m}^2}{2} + \dots}$

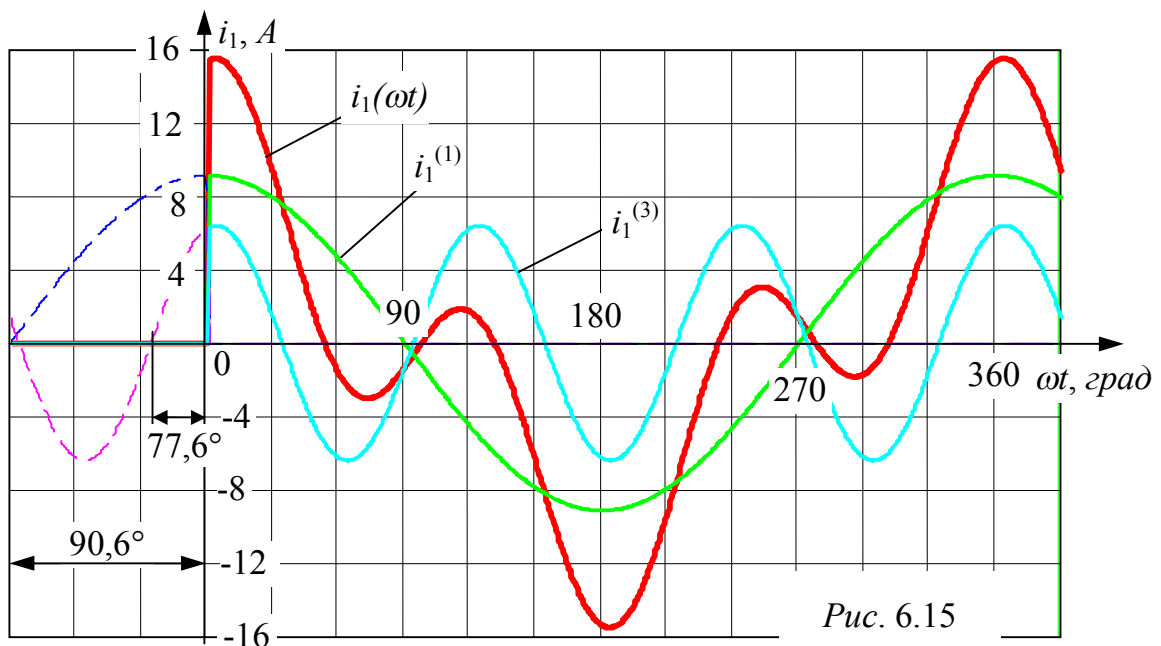


Рис. 6.15

ЗАДАЧА 6.15. Фазна напруга генератора, обмотки якого з'єднані зіркою, у режимі неробочого ходу містить першу U_1 і третю U_3 гармоніки.

1. Знайти діючі значення напруг цих гармонік за відомими показами вольтметрів фазної $U_\phi = 125 \text{ В}$ та лінійної напруг $U_L = 210 \text{ В}$.

2. Яка похибка розрахунку, якщо у напрузі міститься ще й п'ята гармоніка, яка складає не більше 10% основної?

Розв'язання

1. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення двох гармонійних складових, визначаються рівняннями:

$$\sqrt{U_1^2 + U_3^2} = U_\phi, \quad \sqrt{3} \cdot U_1 = U_L,$$

розв'язавши які, отримаємо $U_1 = 121,2 \text{ В}$, $U_3 = 30,4 \text{ В}$.

2. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення трьох гармонійних складових:

$$\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + 0,1^2 \cdot U_1^2} = U_\phi, \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + 0,1^2 \cdot U_1^2} = U_L,$$

розв'язавши які, отримаємо $U_1 = 120,6 \text{ В}$, $U_3 = 30,4 \text{ В}$.

З порівняння цього результату з попереднім визначаємо, що похибка виміру першої гармоніки не перевищує 0,5 % (по третій гармоніці похибка виміру взагалі відсутня).

ЗАДАЧА 6.16. Симетричний генератор з фазною напругою

$$u_A(\omega t) = 310 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) + 93 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ В}$$

живить з'єднане зіркою несиметричне навантаження з опором фаз для струмів основної гармоніки $\underline{Z}_A^{(1)} = 15 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_B^{(1)} = j15 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_C^{(1)} = -j15 \text{ Ом}$ (рис. 6.16); опір нейтралі $\underline{Z}_N^{(1)} = 2 + j2 \text{ Ом}$. Визначити покази приладів електромагнітної системи для випадків:

- рубильники S_1 і S_2 увімкнені;
- S_1 вимкнений, а S_2 увімкнений;
- обидва рубильники вимкнені.

Розв'язання

а) Рубильники увімкнені.

1. Виконаємо розрахунок струмів і напруг першої гармоніки.

Діючі значення комплексів фазних напруг генератора

$$\underline{U}_A^{(1)} = \frac{U_{Am}^{(1)} \cdot e^{j\psi_1}}{\sqrt{2}} = 220e^{-j30^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_B^{(1)} = \underline{U}_A^{(1)} \cdot e^{-j120^\circ} = 220e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_C^{(1)} = \underline{U}_A^{(1)} \cdot e^{j120^\circ} = 220e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

При увімкненому нульовому проводі напруга зміщення нейтралі \underline{U}_{O1O} відсутня, тому фазні напруги споживача дорівнюють фазним напругам джерела живлення; струми у проводах лінії визначаємо згідно із законом Ома:

$$\underline{I}_A^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)}}{\underline{Z}_A^{(1)}} = 12,7 - j7,33 = 14,67e^{-j30^\circ} \text{ А},$$

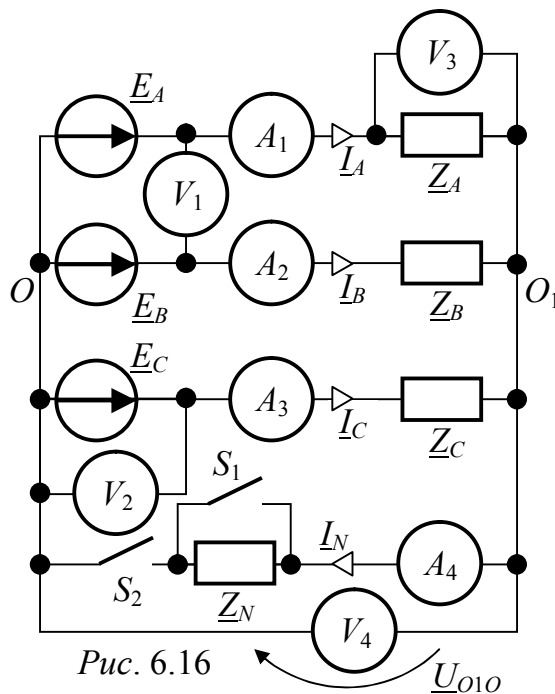
$$\underline{I}_B^{(1)} = \frac{\underline{U}_B^{(1)}}{\underline{Z}_B^{(1)}} = -7,33 + j12,7 = 14,67e^{j120^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C^{(1)} = \frac{\underline{U}_C^{(1)}}{\underline{Z}_C^{(1)}} = -14,67 \text{ А}.$$

Струм основної гармоніки в нульовому проводі

$$\underline{I}_N^{(1)} = \underline{I}_A^{(1)} + \underline{I}_B^{(1)} + \underline{I}_C^{(1)} = -9,3 + j5,37 = 10,74e^{j150^\circ} \text{ А}.$$

2. Виконуємо розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки. Комплекси фазних напруг генератора з урахуванням того, що третя гармоніка утворює систему нульової послідовності



$$\underline{U}_A^{(3)} = \underline{U}_B^{(3)} = \underline{U}_C^{(3)} = \frac{U_{Am}^{(3)} \cdot e^{j\psi_3}}{\sqrt{2}} = \frac{93e^{j45}}{\sqrt{2}} = 65,76e^{j45} \text{ B.}$$

Напряга зміщення нейтралі відсутня. Струми визначаємо за законом Ома:

$$\underline{I}_A^{(3)} = \frac{\underline{U}_A^{(3)}}{\underline{Z}_A^{(3)}} = \frac{56,76e^{j45}}{15} = 3,2 - j3,1 = 4,38e^{j45} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_B^{(3)} = \frac{\underline{U}_B^{(3)}}{\underline{Z}_B^{(3)}} = \frac{56,76e^{j45}}{j3 \cdot 15} = 1,03 - j1,03 = 1,46e^{-j45} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_C^{(3)} = \frac{\underline{U}_C^{(3)}}{\underline{Z}_C^{(3)}} = \frac{56,76e^{j45}}{-j15/3} = -9,3 + j9,3 = 13,15e^{j135} \text{ A.}$$

Струм третьої гармоніки в нульовому проводі

$$\underline{I}_N^{(3)} = \underline{I}_A^{(3)} + \underline{I}_B^{(3)} + \underline{I}_C^{(3)} = -5,17 + j11,37 = 12,49e^{j114,4} \text{ A.}$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна напруга генератора (показ вольтметра V_1) дорівнює (у лінійній напрузі відсутні складові гармонік, кратних трьом):

$$U_{AB} = U_{AB}^{(1)} = \sqrt{3}U_A^{(1)} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380 \text{ B.}$$

Фазна напруга U_C генератора (показ вольтметра V_2) містить всі наявні гармоніки

$$U_C = \sqrt{(U_C^{(1)})^2 + (U_C^{(3)})^2} = 229,6 \text{ B.}$$

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = \sqrt{(I_A^{(1)}Z_A^{(1)})^2 + (I_A^{(3)}Z_A^{(3)})^2} = 229,6 \text{ B.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4) $\underline{U}_{O_1O} = 0$.

Діючі значення струмів в проводах

$$I_A = \sqrt{(I_A^{(1)})^2 + (I_A^{(3)})^2} = 15,31 \text{ A (показ амперметра } A_1);$$

$$I_B = \sqrt{(I_B^{(1)})^2 + (I_B^{(3)})^2} = 14,74 \text{ A (показ амперметра } A_2);$$

$$I_C = \sqrt{(I_C^{(1)})^2 + (I_C^{(3)})^2} = 19,7 \text{ A (показ амперметра } A_3);$$

$$I_N = \sqrt{(I_N^{(1)})^2 + (I_N^{(3)})^2} = 16,47 \text{ A (показ амперметра } A_4).$$

б) У нульовому проводі знаходиться опір \underline{Z}_N .

1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O}^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_A^{(1)}} + \underline{U}_B^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_B^{(1)}} + \underline{U}_C^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_C^{(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A^{(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_B^{(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_C^{(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_N^{(1)}}} = 26,15 \cdot e^{-j171,71^\circ} = -26,24 - j3,82 \text{ B.}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\underline{I}_A^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_A^{(1)}} = \frac{240,6 \cdot e^{-j26,08}}{15} = 16,04 \cdot e^{-j26,08^\circ} = 14,41 - j7,05 \text{ A},$$

$$\underline{I}_B^{(1)} = \frac{\underline{U}_B^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_B^{(1)}} = \frac{194,8 \cdot e^{-j147,11}}{j15} = 12,99 \cdot e^{-j237,11^\circ} = -7,05 + j10,91 \text{ A},$$

$$\underline{I}_C^{(1)} = \frac{\underline{U}_C^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_C^{(1)}} = \frac{224,6 \cdot e^{j83,29}}{-j15} = 14,97 \cdot e^{j173,29^\circ} = -14,87 + j1,75 \text{ A},$$

$$\underline{I}_N^{(1)} = \frac{\underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_N^{(1)}} = \frac{26,52 \cdot e^{-j171,71}}{2,828 \cdot e^{j45}} = 9,38 \cdot e^{-j216,71^\circ} = -7,52 + j5,60 \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\underline{I}_A^{(1)} + \underline{I}_B^{(1)} + \underline{I}_C^{(1)} = 14,41 - j7,05 - 7,05 + j10,91 - 14,87 + j1,75 = -7,51 + j5,61 = \underline{I}_N^{(1)}.$$

2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O}^{(3)} = \frac{\underline{U}_A^{(3)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_A^{(1)}} + \underline{U}_B^{(3)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_B^{(1)}} + \underline{U}_C^{(3)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_C^{(3)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A^{(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_B^{(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_C^{(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_N^{(3)}}} = 104,1 \cdot e^{j101,05^\circ} = -19,96 + j102,2 \text{ B}.$$

Струми в провадах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\underline{I}_A^{(3)} = \frac{\underline{U}_A^{(3)} - \underline{U}_{O_1O}^{(3)}}{\underline{Z}_A^{(3)}} = \frac{86,7 \cdot e^{-j39,96}}{15} = 5,78 \cdot e^{-j39,96^\circ} = 4,43 - j3,71 \text{ A},$$

$$\underline{I}_B^{(3)} = \frac{\underline{U}_B^{(3)} - \underline{U}_{O_1O}^{(3)}}{\underline{Z}_B^{(3)}} = \frac{86,7 \cdot e^{-j39,96}}{j45} = 1,93 \cdot e^{-j129,96^\circ} = -1,24 - j1,48 \text{ A},$$

$$\underline{I}_C^{(3)} = \frac{\underline{U}_C^{(3)} - \underline{U}_{O_1O}^{(3)}}{\underline{Z}_C^{(1)}} = \frac{86,7 \cdot e^{-j39,96}}{-j5} = 17,34 \cdot e^{j50,04^\circ} = 11,14 + j13,29 \text{ A},$$

$$\underline{I}_N^{(3)} = \frac{\underline{U}_{O_1O}^{(3)}}{\underline{Z}_N^{(3)}} = \frac{104,1 \cdot e^{j101,05}}{2 + j6} = 16,46 \cdot e^{j29,49^\circ} = 14,33 + j8,10 \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\underline{I}_A^{(3)} + \underline{I}_B^{(3)} + \underline{I}_C^{(3)} = 4,43 - j3,71 - 1,24 - j1,48 + 11,14 + j13,29 = 14,33 + j8,10 = \underline{I}_N^{(3)}.$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів V_1 і V_2 , відповідно) залишаються такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = \sqrt{(U_A^{(1)})^2 + (U_A^{(3)})^2} = \sqrt{240,6^2 + 86,7^2} = 255,7 \text{ B}.$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4)

$$U_{O_1O} = \sqrt{(U_{O_1O}^{(1)})^2 + (U_{O_1O}^{(3)})^2} = \sqrt{26,15^2 + 104,1^2} = 107,4 \text{ В.}$$

Діючи значення струмів в проводах

$$I_A = \sqrt{(I_A^{(1)})^2 + (I_A^{(3)})^2} = 17,05 \text{ А (показ амперметра } A_1);$$

$$I_B = \sqrt{(I_B^{(1)})^2 + (I_B^{(3)})^2} = 13,13 \text{ А (показ амперметра } A_2);$$

$$I_C = \sqrt{(I_C^{(1)})^2 + (I_C^{(3)})^2} = 22,91 \text{ А (показ амперметра } A_3);$$

$$I_N = \sqrt{(I_N^{(1)})^2 + (I_N^{(3)})^2} = 18,94 \text{ А (показ амперметра } A_4).$$

в) Нульовий провід вимкнений.

1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O}^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_A^{(1)}} + \underline{U}_B^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_B^{(1)}} + \underline{U}_C^{(1)} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_C^{(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A^{(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_B^{(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_C^{(1)}}} = 161e^{j150^\circ} = -139,5 + j80,5 \text{ В.}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\underline{I}_A^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_A^{(1)}} = 22 - j12,7 = 25,4e^{-j30^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B^{(1)} = \frac{\underline{U}_B^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_B^{(1)}} = -12,7 + j3,4 = 13,15e^{j165^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C^{(1)} = \frac{\underline{U}_C^{(1)} - \underline{U}_{O_1O}^{(1)}}{\underline{Z}_C^{(1)}} = -9,3 + j9,3 = 13,1e^{j135^\circ} \text{ А.}$$

Перевірка: $\underline{I}_A^{(1)} + \underline{I}_B^{(1)} + \underline{I}_C^{(1)} = 0$.

2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Струми в лінійних проводах відсутні, оскільки для замикання струмів нульової послідовності (струмів гармонік, кратних трьом) необхідний

нульовий провід: $\underline{I}_A^{(3)} = \underline{I}_B^{(3)} = \underline{I}_C^{(3)} = 0$.

Напруга зміщення нейтралі дорівнює фазній напрузі генератора

$$\underline{U}_{O_1O}^{(3)} = \underline{U}_A^{(3)} = 65,76e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів V_1 і V_2 , відповідно) залишаться такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = I_A^{(1)} Z_A^{(1)} = 380 \text{ В.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4)

$$U_{O_1O} = \sqrt{(U_{O_1O}^{(1)})^2 + (U_{O_1O}^{(3)})^2} = 174 \text{ В.}$$

Діючи значення струмів в проводах

$$I_A = I_A^{(1)} = 25,4 \text{ A} \quad (\text{показ амперметра } A_1),$$

$$I_B = I_B^{(1)} = 13,15 \text{ A} \quad (\text{показ амперметра } A_2),$$

$$I_C = I_C^{(1)} = 13,1 \text{ A} \quad (\text{показ амперметра } A_3),$$

Струм в нульовому проводі відсутній $I_N = 0$ (показ амперметра A_4).

ЗАДАЧА 6.17. Розв'язати задачу 6.16 за умови, що опори фаз однакові: $\underline{Z}^{(1)} = 15 + j10 \text{ Ом}$. Напруга генератора і опір в нейтральному проводі ті ж самі.

Розв'язання

Оскільки навантаження симетричне, то розрахунок можна виконати лише для однієї фази. Напруги і струми першої гармоніки утворюють симетричну систему з прямим порядком чергування фаз, тому напруга зміщення нейтралі по першій гармоніці відсутня при будь-якому стані нульового проводу, тобто при будь-якому положенні рубильників струми і напруги першої гармоніки залишаються незмінними. Розрахункова однолінійна схема подана на рис. 6.17,а. Напруги і струми третьої гармоніки також утворюють симетричну систему, але з нульовим порядком чергування фаз. В цьому випадку в однолінійній схемі враховується потрійний опір нейтрального проводу (див. «Трифазні кола. Метод симетричних складових»). Схема представлена на рис. 6.17,б.

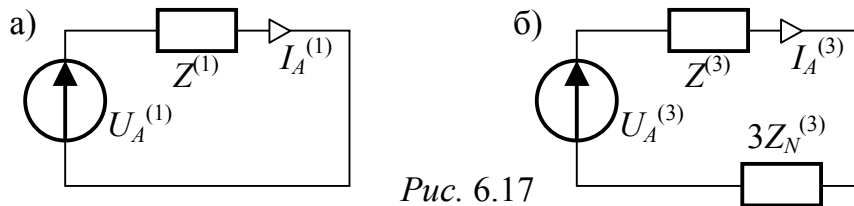


Рис. 6.17

Виконаємо **розрахунок першої гармоніки**.

Комплекс фазної напруги джерела

$$\underline{U}_A^{(1)} = \frac{U_{Am}^{(1)} \cdot e^{j\psi^1}}{\sqrt{2}} = 220e^{-j30} \text{ В.}$$

Комплекс струму в лінійному проводі

$$\underline{I}_A^{(1)} = \frac{\underline{U}_A^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{220e^{-j30}}{15 + j10} = 12,16 \cdot e^{-j63,69^\circ} \text{ А.}$$

Струм першої гармоніки в нейтральному проводі відсутній.

Виконаємо **розрахунок третьої гармоніки** для різних випадків.

Комплекс фазної напруги джерела

$$\underline{U}_A^{(3)} = \frac{U_{Am}^{(3)} \cdot e^{j\psi^3}}{\sqrt{2}} = \frac{93e^{j45}}{\sqrt{2}} = 65,76e^{j45} \text{ В.}$$

Опір фази навантаження струмам третьої гармоніки

$$\underline{Z}^{(3)} = 15 + j3 \cdot 10 = 15 + j30 = 33,54 \cdot e^{j63,44^\circ} \text{ Ом.}$$

а) Нульовий провід увімкнений.

Опір нейтралі дорівнює нулю, напруга зміщення нейтралі відсутня, тому напруги на фазах навантаження збігаються з напругами джерела. У цьому випадку струм фази A за законом Ома:

$$\underline{I}_A^{(3)} = \frac{U_A^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{65,8e^{j45}}{33,54e^{j63,44}} = 1,96 \cdot e^{-j18,44^\circ} \text{ A.}$$

Струм в нейтралі дорівнює сумі трьох однакових лінійних струмів:

$$\underline{I}_N^{(3)} = 3 \underline{I}_A^{(3)} = 5,88 \cdot e^{-j18,44^\circ} \text{ A.}$$

Знаходимо покази приладів.

Покази вольтметрів V_1 і V_2 будуть ті ж самі, що і в задачі 6.16:

$$V_1 \rightarrow U_{AB} = U_{AB}^{(1)} = \sqrt{3}U_A^{(1)} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380 \text{ B;}$$

$$V_2 \rightarrow U_C = U_A = \sqrt{(U_A^{(1)})^2 + (U_A^{(3)})^2} = 229,6 \text{ B.}$$

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3) за наявності нульового проводу збігається з фазною напругою джерела, тому

$$U'_A = U_A = 229,6 \text{ B.}$$

Показ четвертого вольтметра V_4 (напруга зміщення нейтралі) становить нуль.

Діючі значення струмів в лінійних проводах однакові (покази амперметрів $A_1 \div A_3$):

$$I_A = \sqrt{(I_A^{(1)})^2 + (I_A^{(3)})^2} = \sqrt{12,16^2 + 1,96^2} = 12,32 \text{ A.}$$

У нейтральному проводі (показ амперметра A_4) протікає лише струм третьої гармоніки: $I_N = I_N^{(3)} = 5,88 \text{ A.}$

б) У нульовому проводі знаходиться опір Z_N .

$$\underline{I}_A^{(3)} = \frac{U_A^{(3)}}{Z^{(3)} + 3Z_N^{(3)}} = \frac{65,8e^{j45}}{33,54e^{j63,44} + 6 + j18} = 1,26 \cdot e^{-j21,37^\circ} = 1,17 - j0,46 \text{ A;}$$

$$\underline{I}_N^{(3)} = 3 \underline{I}_A^{(3)} = 3,77 \cdot e^{-j21,37^\circ} = 3,51 - j1,37 \text{ A.}$$

Відзначимо, що розрахунок третьої гармоніки можна виконати і за традиційною методикою:

- напруга зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O}^{(3)} = \frac{\frac{U_A^{(3)} \cdot 3}{Z^{(3)}}}{\frac{3}{Z^{(3)}} + \frac{1}{Z_N^{(3)}}} = \frac{23,82 \cdot e^{j50,19^\circ}}{1} = 23,82 \cdot e^{j50,19^\circ} = 15,25 + j18,30 \text{ B.}$$

- струми в проводі A лінії і в нейтралі за законом Ома:

$$\underline{I}_A^{(3)} = \frac{U_A^{(3)} - U_{O_1O}^{(3)}}{Z_A^{(3)}} = \frac{42,1 \cdot e^{j42,06}}{15 + j30} = 1,26 \cdot e^{-j21,37^\circ} = 1,17 - j0,46 \text{ A;}$$

$$\underline{I}_N^{(3)} = \frac{U_{O_1O}^{(3)}}{Z_N^{(3)}} = \frac{23,82 \cdot e^{j50,19}}{2 + j6} = 3,77 \cdot e^{-j21,37^\circ} = 3,51 - j1,37 \text{ A.}$$

Перевірка: $\underline{I}_A^{(3)} + \underline{I}_B^{(3)} + \underline{I}_C^{(3)} = 3 \cdot \underline{I}_A^{(3)} = 3,51 - j1,38 = \underline{I}_N^{(3)}$.

Покази приладів: $V_1 \rightarrow U_A = 380 \text{ B; } V_2 \rightarrow U_C = 229,6 \text{ B;}$

$$V_3 \rightarrow U_{A'} = \sqrt{(U_A^{(1)})^2 + (U_A^{(3)})^2} = \sqrt{220^2 + 42,1^2} = 223,2 \text{ В};$$

$$V_4 \rightarrow U_{O_1O} = U_{O_1O}^{(3)} = 23,82 \text{ В};$$

$$A_1, A_2, A_3 \rightarrow I_A = \sqrt{(I_A^{(1)})^2 + (I_A^{(3)})^2} = \sqrt{12,16^2 + 1,26^2} = 12,22 \text{ А};$$

$$A_4 \rightarrow I_N = I_N^{(3)} = 3,77 \text{ А}.$$

в) Нульовий провід вимкнений.

Струми в лінійних проводах відсутні, оскільки для замикання струмів нульової послідовності (струмів гармонік, кратних трьом) необхідний нульовий провід: $\underline{I}_A^{(3)} = \underline{I}_B^{(3)} = \underline{I}_C^{(3)} = 0$.

Напряга зміщення нейтралі дорівнює фазній напрузі генератора

$$\underline{U}_{O_1O}^{(3)} = \underline{U}_A^{(3)} = 65,76e^{j45} \text{ В}.$$

Покази приладів: $V_1 \rightarrow U_{AB} = 380 \text{ В}; V_2 \rightarrow U_C = 229,6 \text{ В};$

$V_3 \rightarrow U_{A'} = U_{A'}^{(1)} = 220 \text{ В}; V_4 \rightarrow U_{O_1O} = U_{O_1O}^{(3)} = 65,76 \text{ В}.$

$$A_1, A_2, A_3 \rightarrow I_A = I_A^{(1)} = 12,16 \text{ А}.$$

Струм в нульовому проводі відсутній $I_N = 0$ (показ амперметра A_4).

ЗАДАЧА 6.18. ЕРС однієї фази симетричного трифазного генератора, з'єднаного зіркою, $e = 20 \cdot \sin(\omega t) + 5 \cdot \sin(3\omega t - 20^\circ) \text{ В}.$

Навантаження з'єднане також зіркою: у фазі A – опір r , у фазі B – індуктивність L і у фазі C – ємність C , причому $r = \omega L = 1/\omega C = 2 \text{ Ом}.$

Визначити струм у фазі A і напругу між нейтралями навантаження і генератора.

Відповідь: $17,3 \cdot \sin(\omega t) \text{ А}; 14,6 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ) + 5 \cdot \sin(3\omega t - 20^\circ) \text{ В}.$

ЗАДАЧА 6.19. Симетричний трифазний генератор з'єднаний трикутником і живить симетричне навантаження, що з'єднане зіркою. Струм в одній з фаз генератора (від B до A)

$$i_{BA} = 100 \cdot \sin(\omega t) + 20 \cdot \sin(3\omega t) + 10 \cdot \sin(5\omega t) \text{ А}.$$

Визначити миттєве значення струму у фазі C навантаження.

Рекомендація. Враховуючи симетрію генератора і навантаження, задача легко розв'язується за допомогою ВД (окремо для першої і п'ятої гармонік). Третя гармоніка струму (і напруги) у навантаженні відсутня. Останнє твердження обґрунтуйте самостійно.

Відповідь: $i_C = 173 \cdot \sin(\omega t + \pi/2) + 17,3 \cdot \sin(5\omega t - \pi/2), \text{ А}.$

ЗАДАЧА 6.20. У симетричному трифазному колі (рис. 6.18)

$$e_A = 34 \sin(\omega t) + 16 \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ В}.$$

Параметри кола: $\omega L = 2 \text{ Ом}, 1/(\omega C) = 24 \text{ Ом}, r_1 = 12 \text{ Ом}, r_2 = 4 \text{ Ом}.$

Визначити струми $i_{A0}, i_{A1}, i_{A2}, i_N$ і показ ватметра.

Відповіді: $i_{A0} = 12 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 4 \cdot \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ А}; i_{A1} = 6 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А};$
 $i_{A2} = 6 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 4 \cdot \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ А}; i_N = 12 \cdot \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ А}; P_W = 352 \text{ Вт}.$

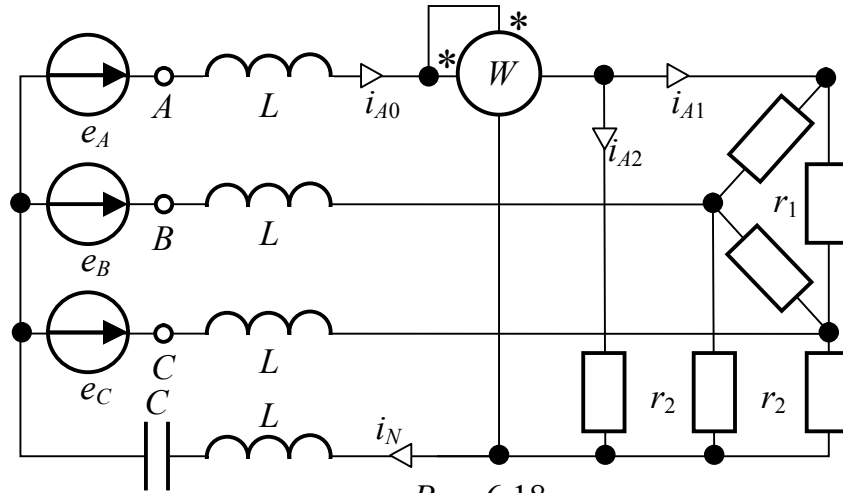


Рис. 6.18

ЗАДАЧА 6.21. Визначити покази приладів електродинамічної системи у трифазному симетричному колі рис. 6.19, якщо обмотки трифазного трансформатора з'єднані в трикутник, внутрішній опір його фази для струмів прямої і зворотної послідовностей $\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_{2T} = j8 \text{ Ом}$, для струму нульової послідовності $\underline{Z}_{0T} = j3 \text{ Ом}$.

Фази симетричного приймача також з'єднані в трикутник, опір фази $\underline{Z} = 24 - j48 \text{ Ом}$. Фазна ЕРС трансформатора

$$e_{AB} = 400\sqrt{2} \sin \omega t + 200\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ) + 100\sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ В.}$$

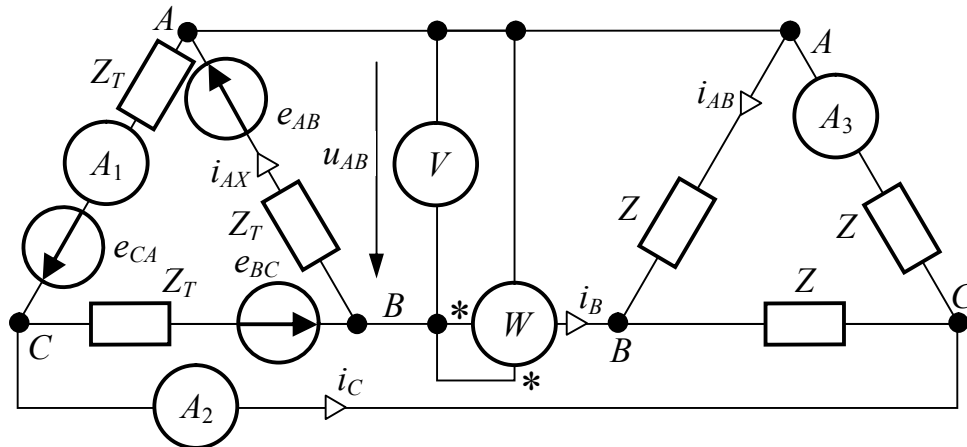


Рис. 6.19

Розв'язання

1) Розрахунок першої гармоніки $k = 1$.

Комплекси фазних ЕРС для $k = 1$ є величинами, які визначаються за прямим порядком чергування фаз:

$$\underline{E}_{AB}^{(1)} = 400 \text{ В}, \quad \underline{E}_{BC}^{(1)} = 400e^{-j120^\circ} \text{ В}, \quad \underline{E}_{CA}^{(1)} = 400e^{j120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{Z}_T^{(1)} = \underline{Z}_{1T}^{(1)} = j8 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}^{(1)} = 24 - j48 \text{ Ом}$$

при з'єднанні обмоток і трансформатора, і навантаження у трикутник.

Розрахунок симетричного кола можна виконати за будь-якою з двох поданих схем заміщення для однієї фази: рис. 6.20, коли фаза трикутника трансформатора працює на

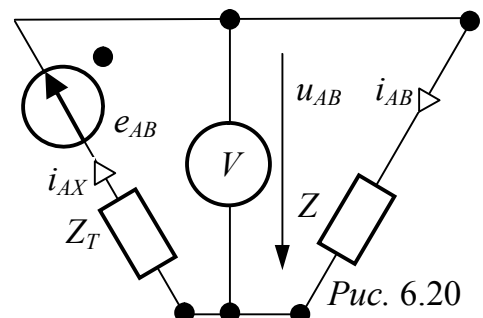


Рис. 6.20

фазу трикутника навантаження; рис. 6.21, коли фаза еквівалентної зірки активного триполюсника трансформатора працює на фазу еквівалентної зірки навантаження.

У схемі рис. 6.20 зберігаються фазні струми трикутників трансформатора і на-вантаження, лінійна напруга U_{AB} , проте в ній не враховані лінійні струми вихідної схеми:

$$\underline{I}_{AX}^{(1)} = \underline{I}_{AB}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{AB}^{(1)}}{\underline{Z}_T^{(1)} + \underline{Z}^{(1)}} = \frac{400}{j8 + 24 - j48} = \frac{400}{46,65e^{-j59,04^\circ}} = 8,57e^{j59,04^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{U}_{AB}^{(1)} = \underline{E}_{AB}^{(1)} - \underline{I}_{AX}^{(1)} \underline{Z}_T^{(1)} = \underline{I}_{AB}^{(1)} \cdot \underline{Z}^{(1)} = 8,57e^{j59,04^\circ} \cdot (24 - j48) = 460e^{-j4,39^\circ} \text{ B}.$$

Із векторної діаграми струмів симетричного режиму визначимо лінійні струми для прямого порядку чергування фаз

$$\underline{I}_A^{(1)} = \sqrt{3} \underline{I}_{AB}^{(1)} e^{-j30^\circ} = 8,57 \sqrt{3} e^{j59,04^\circ} e^{-j30^\circ} = 14,84e^{j29,04^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_B^{(1)} = \underline{I}_W^{(1)} = \underline{I}_A^{(1)} e^{-j120^\circ} = 14,84e^{-j90,96^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C^{(1)} = \underline{I}_A^{(1)} e^{j120^\circ} = 14,84e^{j149,04^\circ} \text{ A},$$

складова показу ватметра по першій гармоніці

$$P_W^{(1)} = \text{Re}(\underline{U}_{BA}^{(1)} \cdot \underline{I}_B^{*(1)}) = \text{Re}(-460e^{-j4,39^\circ} \cdot 14,84e^{j90,96^\circ}) = -408,4 \text{ Вт}.$$

У схемі рис. 6.21 у порівнянні з вихідною рис. 6.19 зберігається лише лінійний струм \underline{I}_A , опори фаз еквівалентних з'єднань у зірку визначаються співвідношеннями для пасивних триполюсників:

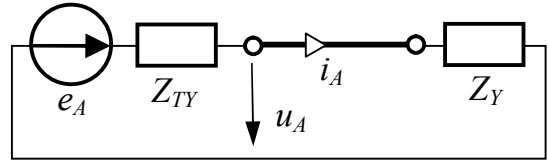


Рис. 6.21

$$\underline{Z}_{TY}^{(1)} = \frac{\underline{Z}_T^{(1)}}{3} = j8/3 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_Y^{(1)} = \frac{\underline{Z}^{(1)}}{3} = \frac{24 - j48}{3} = 8 - j16 \text{ Ом},$$

$\underline{E}_A^{(1)}$ визначається як фазна напруга при лінійному $\underline{E}_{AB}^{(1)}$. Для прямого порядку чергування фаз з векторної діаграми напруг (ЕРС) отримуємо

$$\underline{E}_A^{(1)} = \frac{\underline{E}_{AB}^{(1)}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{400}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \text{ B}.$$

За схемою рис. 6.21 отримуємо

$$\underline{I}_A^{(1)} = \frac{\underline{E}_A^{(1)}}{\underline{Z}_{TY}^{(1)} + \underline{Z}_Y^{(1)}} = \frac{230e^{-j30^\circ}}{j2,67 + 8 - j16} = 14,84e^{j29,04^\circ} \text{ A},$$

фазна напруга $\underline{U}_A^{(1)} = \underline{I}_A^{(1)} \cdot \underline{Z}_Y^{(1)} = 14,84e^{j29,04^\circ} \cdot 17,89e^{-j63,43^\circ} = 265,5e^{-j34,39^\circ} \text{ B}$, а лінійна напруга для прямого порядку чергування фаз

$$\underline{U}_{AB}^{(1)} = \sqrt{3} \underline{U}_A^{(1)} e^{j30^\circ} = 460e^{-j4,39^\circ} \text{ B},$$

що збігається з раніше отриманими результатами (для схеми рис. 6.20).

2) Розрахунок другої гармоніки $k = 2$.

Скорегуємо опори для подвійної частоти:

$$\underline{Z}_T^{(2)} = \underline{Z}_{2T}^{(2)} = j8 \cdot 2 = j16 \text{ Ом} = \underline{Z}_{2T\Delta}^{(2)}, \quad \underline{Z}^{(2)} = 24 - j48/2 = 24 - j24 = 39,94e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Гармоніки порядку $k = 2$ утворюють систему зворотної послідовності.

При $\underline{E}_{AB}^{(2)} = 200e^{j90^\circ} \text{ B}$ отримуємо

$$\underline{E}_{BC}^{(2)} = \underline{E}_{AB}^{(2)} e^{j120^\circ} = 200e^{j210^\circ} \text{ B}, \quad \underline{E}_{CA}^{(2)} = \underline{E}_{AB}^{(2)} e^{-j120^\circ} = 200e^{-j30^\circ} \text{ B}.$$

За схемою заміщення рис. 6.20

$$\underline{I}_{AX}^{(2)} = \underline{I}_{AB}^{(2)} = \frac{\underline{E}_{AB}^{(2)}}{\underline{Z}_T^{(2)} + \underline{Z}^{(2)}} = \frac{200e^{j90}}{j16 + 24 - j24} = 7,9e^{j108,43^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{U}_{AB}^{(2)} = \underline{I}_{AB}^{(2)} \cdot \underline{Z}^{(2)} = 7,9e^{j108,43^\circ} \cdot 39,94e^{-j45^\circ} = 315,5e^{j63,43^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{I}_A^{(2)} = \sqrt{3} \underline{I}_{AB}^{(2)} e^{j30^\circ} = 7,9\sqrt{3} e^{j108,43^\circ} e^{j30^\circ} = 13,69e^{j138,43^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_B^{(2)} = \underline{I}_W^{(2)} = \underline{I}_A^{(2)} e^{j120^\circ} = 13,69e^{j258,43^\circ} \text{ A}.$$

Складова показу ватметра

$$P_W^{(2)} = \text{Re}(-\underline{U}_{AB}^{(2)} \cdot \underline{I}_B^{*(2)}) = \text{Re}(-315,5e^{j63,43^\circ} \cdot 13,69e^{-j258,48^\circ}) = 4171 \text{ Вт}.$$

3) Для третьої гармоніки $k = 3$ система ЕРС є системою нульової послідовності, для якої доданки за межами трикутника трансформатора відсутні: $I_{AB}^{(3)} = 0$, $U_{AB}^{(3)} = 0$, $I_C^{(3)} = 0$, $P_W^{(3)} = 0$, опір фази трансформатора для струму нульової послідовності потрібної частоти ($k = 3$) $\underline{Z}_T^{(3)} = k \cdot \underline{Z}_{0T} = 3 \cdot j3 = j9 \text{ Ом}$, струм в контурі трикутника трансформатора

$$\underline{I}_{AX}^{(3)} = \underline{I}_{BY}^{(3)} = \underline{I}_{CZ}^{(3)} = \frac{\underline{E}_{AB}^{(3)}}{\underline{Z}_T^{(3)}} = \frac{100}{j9} = -j11,1 \text{ A}.$$

Підсумовування результатів виконаємо відповідно до типу вимірювальних приладів.

Діюче значення фазного струму трансформатора:

$$I_{AX} = \sqrt{(I_{AX}^{(1)})^2 + (I_{AX}^{(2)})^2 + (I_{AX}^{(3)})^2} = \sqrt{8,57^2 + 7,9^2 + 11,1^2} = 16,1 \text{ A} \rightarrow A_1.$$

Фазний струм навантаження

$$I_{AB} = \sqrt{(I_{AB}^{(1)})^2 + (I_{AB}^{(2)})^2} = \sqrt{8,57^2 + 7,9^2} = 11,66 \text{ A} \rightarrow A_3.$$

Лінійний струм

$$I_C = \sqrt{(I_C^{(1)})^2 + (I_C^{(2)})^2} = \sqrt{14,84^2 + 13,69^2} = 20,19 \text{ A} \rightarrow A_2.$$

Лінійна напруга

$$U_{AB} = \sqrt{(U_{AB}^{(1)})^2 + (U_{AB}^{(2)})^2} = \sqrt{460^2 + 315,5^2} = 558,8 \text{ В} \rightarrow V.$$

Показ ватметра $P_W = P_W^{(1)} + P_W^{(2)} = -408,4 + 4171 = 3763 \text{ Вт}.$