

Лекция № 1

Тема: «Перемещение при изгибе. Понятие о жёсткости. Параметры перемещения».

Жесткость балки при изгибе – это способность оказывать сопротивление искривлению (деформации)

Напряжение и деформация образуются одновременно и взаимно обуславливают друг друга. Деформации балок не должны превышать тех величин, при которых нормальная эксплуатация конструкции становится невозможной. Обеспечение необходимых жёсткостей является целью расчётов, о которых будет идти речь ниже.

Параметры перемещения:

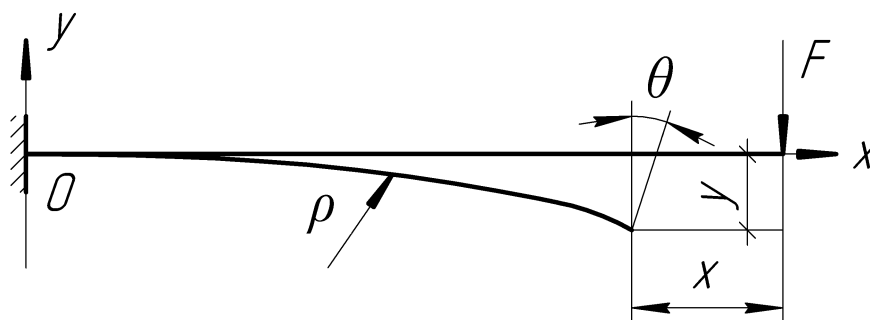


Рис.1.1- к определению параметров перемещений при изгибе.

где - y – прогиб балки в сечении,

ρ – радиус кривизны балки,

θ – угол поворота поперечного сечения балки.

Изогнутая ось балки называется упругой линией. В связи с малыми углами деформации, угол поворота поперечного сечения равен:

$$\operatorname{tg} \theta = \theta = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx},$$

Дифференциальные уравнения изогнутой оси балки

При поперечном изгибе, в соответствии с закон Гука, кривизна балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (1.1)$$

Математическое выражение кривизны:
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''(x)}{\left[1 + (y'_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.2)$$

Приравняем правые части (1.1) и (1.2), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

$$\frac{M_x}{EI_z} = \pm \frac{y''(x)}{\left[1 + (y'_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.3)$$

Так при $\theta = 2^\circ$; $\text{tg } \theta = 0.017 = y'_x$; $(y'_x)^2 = 0.0002 \ll [1]$

тогда $(1 + y'_x{}^2) \approx 1$, то есть уравнение (1.3) упрощается

$$EI_z y''_x = \pm M_x - \text{приближённое уравнение изогнутой оси балки,} \quad (1.4)$$

интегрирование которого не представляет затруднения.

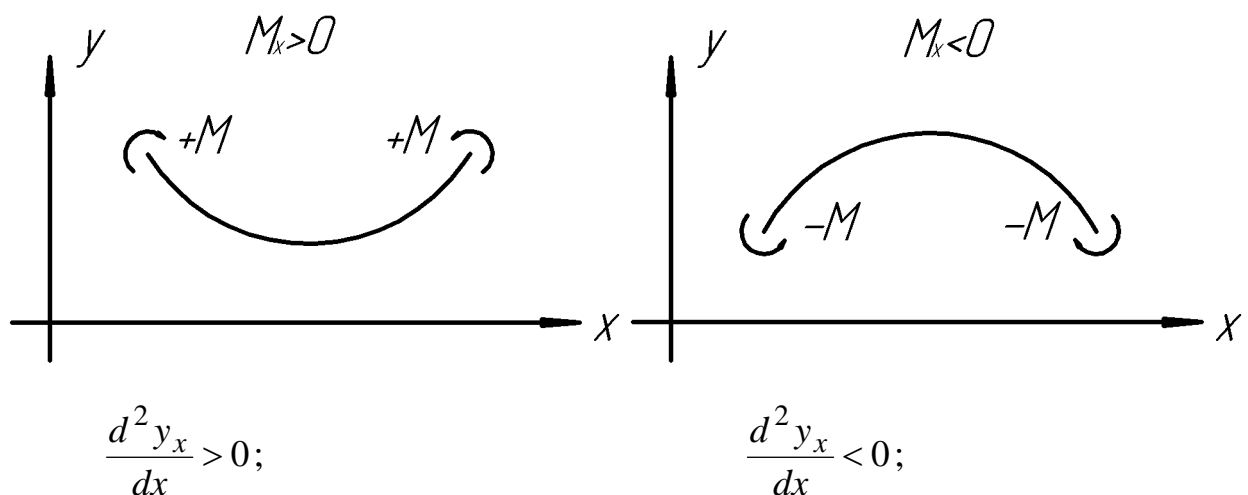


Рис.1.2 - к определению знака уравнения (1.4)

Выбор знака определяется принятой системой координат (Рис. 1.2)

Если положительное направление y всегда принимать вверх, то в уравнении упругой линии левая и правая часть будут одного знака:

$$EI \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} = M_x \quad (1.5)$$

Непосредственное интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$EI_z y''_x = M_x \quad (1.6)$$

Первое интегрирование дает выражение для получения угла поворота балки.

$$EI_z y'_x = \int_0^l M_x dx = M_x + C \quad (1.7)$$

Интегрируя второй раз, имеем:

$$EI_z y(x) \int_0^l (M_x + C) dx = \frac{M_x^2}{2} + Cx + D \quad (1.8)$$

где C и D - постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий, так для балки на рис. 1.3

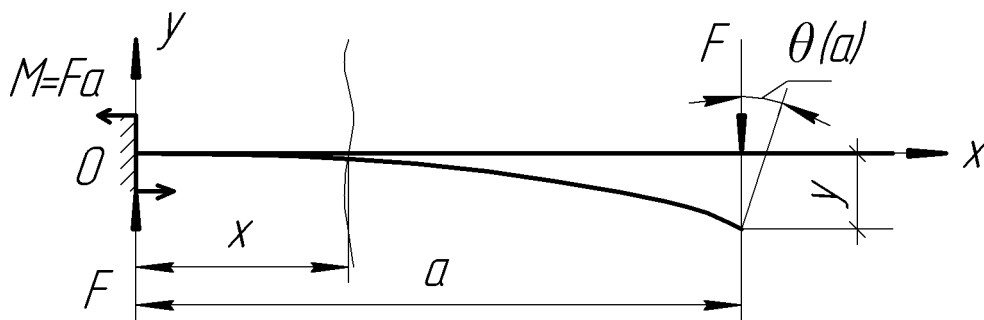


Рис. 1.3

$$EIy''(x) = M(x);$$

$$M(x) = -Fa + Fx = -F(a - x);$$

$$EIy'_x = -F \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) + C;$$

$$EIy_x = -F \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Cx + D;$$

В начале координат при $x=0$:

$$y(0) = 0, \Rightarrow D = 0;$$

$$\theta(0) = 0, \Rightarrow C = 0.$$

Из дифференциальных зависимостей известно, что интенсивность распределенной нагрузки - это первая производная от силы по длине балки.

Эти зависимости, после некоторого преобразования, можно расположить последовательно.

$$q_x = \frac{dQ_x}{dx};$$

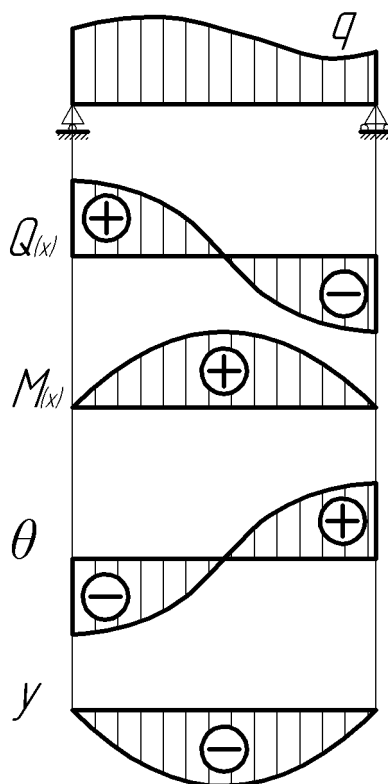
$$\frac{d}{dx} EIy = EI\theta;$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (EIy) = M_{(x)}; \quad (1.9)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} (EIy) = Q_{(x)}; \quad (1.10)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} (EIy) = \frac{d^3}{dx^3} (EI\theta) = \frac{d^2}{dx^2} M_{(x)} = \frac{d}{dx} Q_{(x)} = q_x \quad (1.11)$$

Из этих зависимостей видно, что зная нагрузку q_x и устройство опор балки, можно последовательным интегрированием получить величины $Q_{(x)}$, $M_{(x)}$, $EI\theta_{(x)}$ и $EIy_{(x)}$, обратнo зная уравнение изогнутой оси, продифференцировав по x из функции EIy получим $EI\theta$, $M_{(x)}$, $Q_{(x)}$ и q_x : в качестве примера показаны графики изменения всех величин, характеризующих изгиб балки.



Выражение (1.11) - является дифференциальным уравнением упругой оси балки при изгибе. Недостатком метода интегрирования дифференциального уравнения упругой линии - является то, что на каждом участке появляются две константы, задача становится трудоемкой, когда участков становится (например) три. В данном случае нужно шесть уравнений. Чтобы исключить

это и свести число констант к двум, при любом количестве участков, необходимо пользоваться методом начальных параметров.

Метод начальных параметров

Основные допущения метода:

- начало координат необходимо разместить только на конце балки;
- в выражение изгибающих моментов вносится скобочный множитель $(x-a_n)^0$ и в дальнейшем интегрирование или дифференцирование ведем без раскрытия скобочного множителя;
- если распределенная нагрузка не доходит до искомого сечения X , а обрывается раньше, ее следует продолжить и на основании аксиом статики вводим нагрузку противоположного знака.

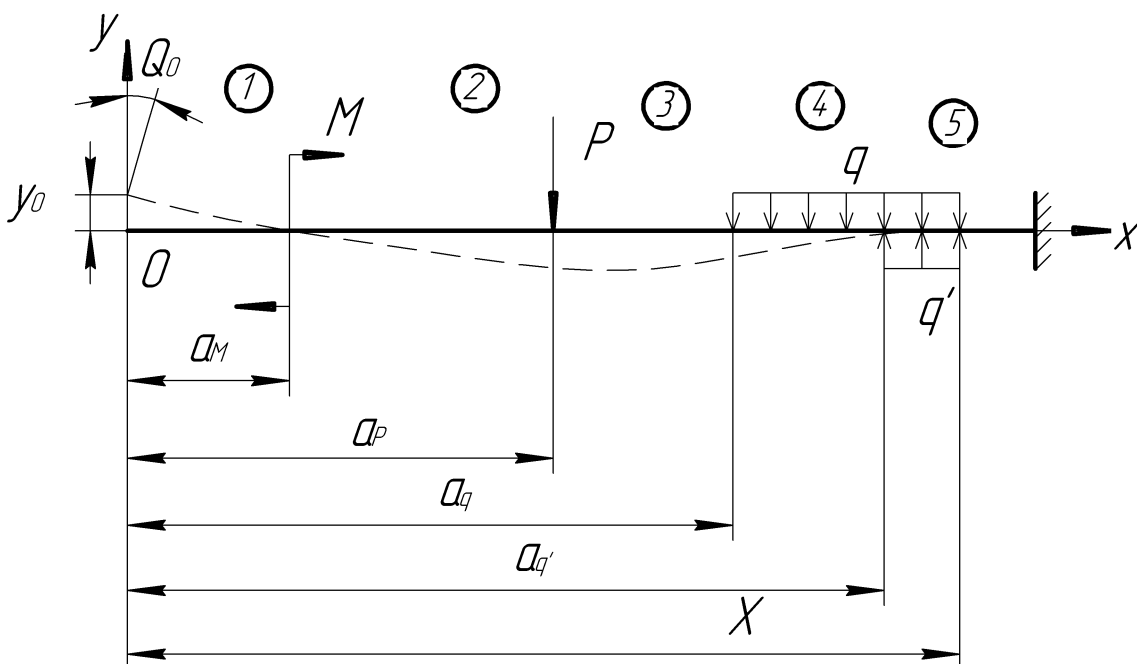


Рис.1.4 - к определению универсального уравнения

Рассмотрим участки

$$1) EI_z y''_{x_1} = 0$$

$$EI_z y'_{x_1} = C_1$$

$$EI_z y_{x_1} = C_1 x + D_1$$

$$2) EI_z y''_2(x) = M(x - a_m)^0$$

$$EI_z y'_2(x) = M(x - a_m) + C_2$$

$$EI_z y_2(x) = \frac{M(x - a_m)^2}{2} + C_2 x + D_2$$

Рассмотрим пограничное сечение участков (1) и (2)

$$x_1 = a_m$$

$$x_2 = a_m$$

$y'_1(x) = y'_2(x)$ - углы поворотов равны;

$y_1(x) = y_2(x)$ - прогибы тоже равны.

Т.к. никаких опор нет, то эти условия действительны, тогда

$$C_1 = M(a_m - a_m)' + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = C$$

$$C_1 a_m + D_1 = \frac{M(a_m - a_m)^2}{2} + C_2 a_m + D_2 \Rightarrow D_1 = D_2 = D$$

Физический смысл постоянных С и D

$$C = EIy'(0) \quad D = EIy(0) \quad (1.12)$$

C, D – const, равные произведению угла поворота или прогиба в начале координат на жёсткость балки соответственно.

Запишем выражение изгибающего момента для 5-го участка:

$$M_x = M(x - a_m)^0 - P(x - a_p) + \left(-\frac{q(x - a_q)^2}{2} \right) + \frac{q'(x - a_{q'})^2}{2} \quad (1.13)$$

Подставим его значение в дифференциальное уравнение и проинтегрируем дважды:

$$EIy''(x) = M_x$$

$$EIy'(x) = M(x - a_m) + \frac{P(x - a_p)^2}{2} - \frac{q(x - a_q)^2}{6} + \frac{q'(x - a_{q'})^3}{6} + C$$

$$EIy(x) = M \frac{(x - a_m)^2}{2} + \frac{P(x - a_p)^3}{6} - \frac{q(x - a_q)^4}{24} + \frac{q'(x - a_{q'})^4}{24} + Cx + D$$

С учётом const C и D получим универсальное уравнение изогнутой оси балки

$$EI_{yx} = EI_{y(0)} + EI\theta_0 x + \frac{\sum M(x - a_m)^2}{2} + \frac{\sum P(x - a_p)^3}{6} + \frac{\sum q(x - a_q)^4}{24} \quad (1.14)$$

Продифференцируем (1.14), получим уравнения углов поворота

$$EIy'(x) = EI_z \theta_0 + \sum M(x - a_m) + \frac{\sum P(x - a_p)^2}{2} + \frac{\sum q(x - a_q)^3}{6} \quad (1.15)$$

где - y_0 и θ_0 – прогиб и угол поворота в начале координат, м.

EI – жёсткость балки при изгибе, кНм².

$\Sigma +$ или $-$ берется по балочному правилу «дождика – зонтика» (рис. 1.5)

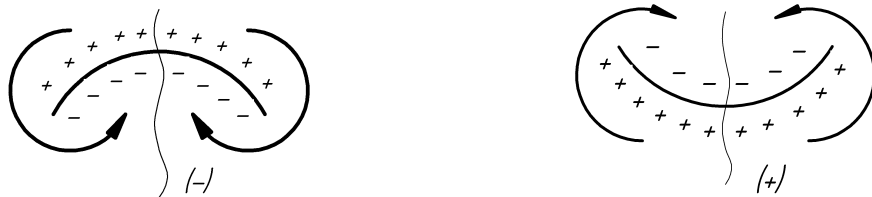


Рис. 1.5

M, P, q – внешние нагрузка;

x – произвольное сечение;

a_m, a_p, a_q – расстояние от начала координат до начала приложения нагрузки.

Такой метод составления перемещений называется методом начальных параметров, а сами уравнения этого метода – общими уравнениями метода начальных параметров.

Этот метод впервые упоминается в работе академика Крылова А.Н.

Применение этого метода показано на примерах в следующей лекции.

Лекция № 2

Тема: «Определение перемещений по методу начальных параметров»

а) определение начальных параметров y_0 и θ_0 для расчётной схеме балки.
(Рис. 2.1)

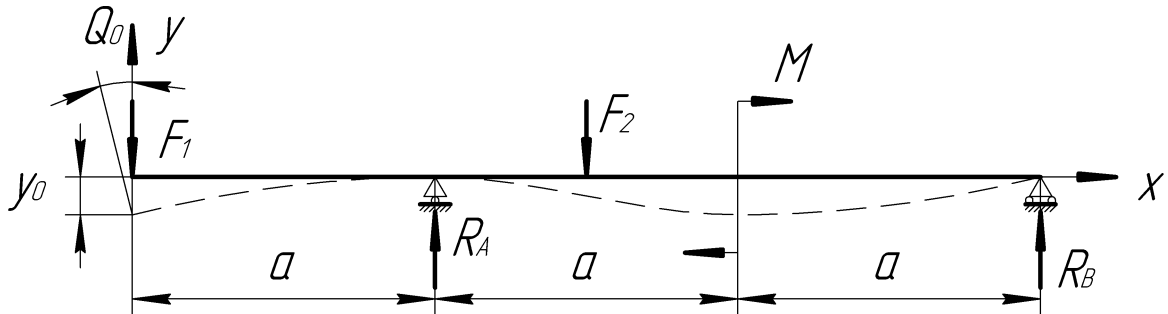


Рис. 2.1- Расчетная схема балки

Граничные условия:

$$x = 0: \quad y_0 \neq 0 \quad \theta_0 \neq 0$$

Начальные параметры ($y_0; \theta_0$) находятся из граничных условий по схеме (2.1)

При $\begin{cases} x = a \\ x = 3a \end{cases}; \quad \begin{cases} y(a) = 0 \\ y(3a) = 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} E \theta_0 + EI \theta_0 a y - \frac{F_1(a-0)^3}{6} = 0 \\ E \theta_0 + EI \theta_0 3a - \frac{F_1(3a-a)^3}{6} + \frac{R_A(3a-a)^3}{6} + \frac{M(3a-2a)^3}{2} - \frac{F_2(3a-1.5a)^3}{6} = 0 \end{cases}$$

б) определение начальных параметров для расчётной схемы балки (рис. 2.2)

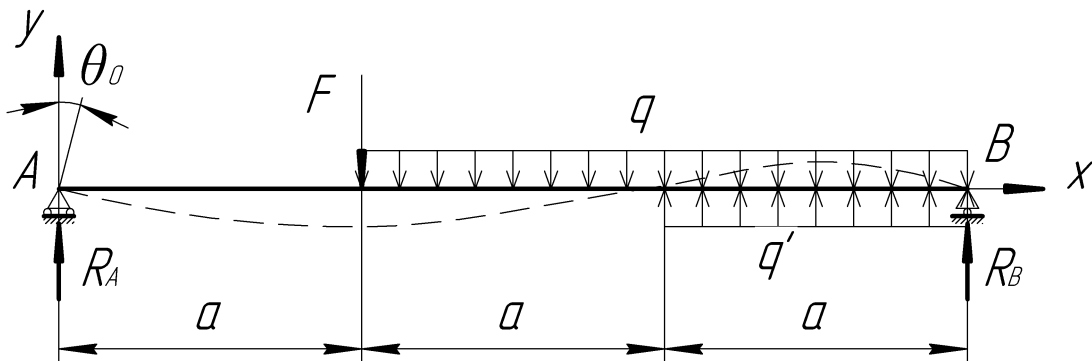


Рис. 2.2

Граничные условия:

$$x = 0; \quad y_0 = 0; \quad \theta_0 \neq 0;$$

$$x = 3a; \quad y_B = 0$$

$$E I_{y(b)} = 0; \quad E \theta_0 3a + \frac{R_a (3a - 0)^3}{6} - \frac{F (3a - a)^3}{6} + \frac{q (3a - a)^4}{2} - \frac{q' (3a - 2a)^4}{4 \cdot 2} = 0;$$

$$E \theta_0 = \frac{1}{3a} \left(\frac{-R_a 2 a^3}{6} + \frac{7F 8a^3}{6} - \frac{q 1 a^4}{2} + \frac{6q' a^4}{4} \right);$$

$$\theta_0 = \frac{1}{E} \left[-1.5 \frac{R_a^2}{I} - \frac{4}{9} \frac{F^2}{a} - \frac{5q^3}{2} \right].$$

Пример. Определить прогиб на конце консоли. (y_A)

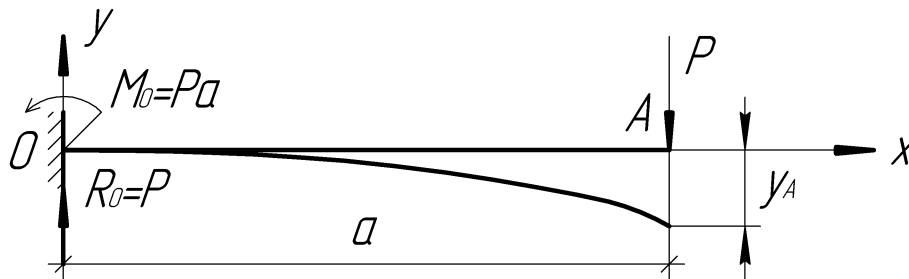


Рис 2.3

при $x = 0$

$$y_0 = 0; \quad \theta_0 = 0;$$

$$E y_A = \frac{P(a-0)^3}{6} - \frac{P(a-0)^2 a}{2} + \frac{P(a-a)^3}{6};$$

$$y_A = \frac{1}{E} \left[\frac{P(a-0)^3}{6I} - \frac{P(a-0)^2 a}{6} \right] = \frac{P^3 (1-3)a}{6E} = -\frac{P^3}{3E};$$

$$y_A = -\frac{P a^3}{3E I}.$$

Энергетические методы определения перемещений

Более общим методом по сравнению с двумя предыдущими методами определения перемещений, является метод, который получен на основе закона сохранения потенциальной энергии упругой деформации системы.

Известно, что при действии на тело внешней нагрузки внутри тела появляются противодействующие силы, и тело меняет объём и форму.

Пренебрегая тепловыми, электрическими и магнитными явлениями в теле, а так же, невзирая на перемещения, будем считать, что система находится в равновесии. Из этого можно сделать вывод, что потенциальная энергия, накапливаемая в теле, равна работе внешних сил, то есть равна:

$$U_p = A_p + K;$$

$K = 0$ - кинетическая энергия системы при медленном нагружении, тогда $U_p = A_p$ - накопленная потенциальная энергия U равна работе A , потраченной на деформирование балки.

Потенциальная энергия упругой деформации системы

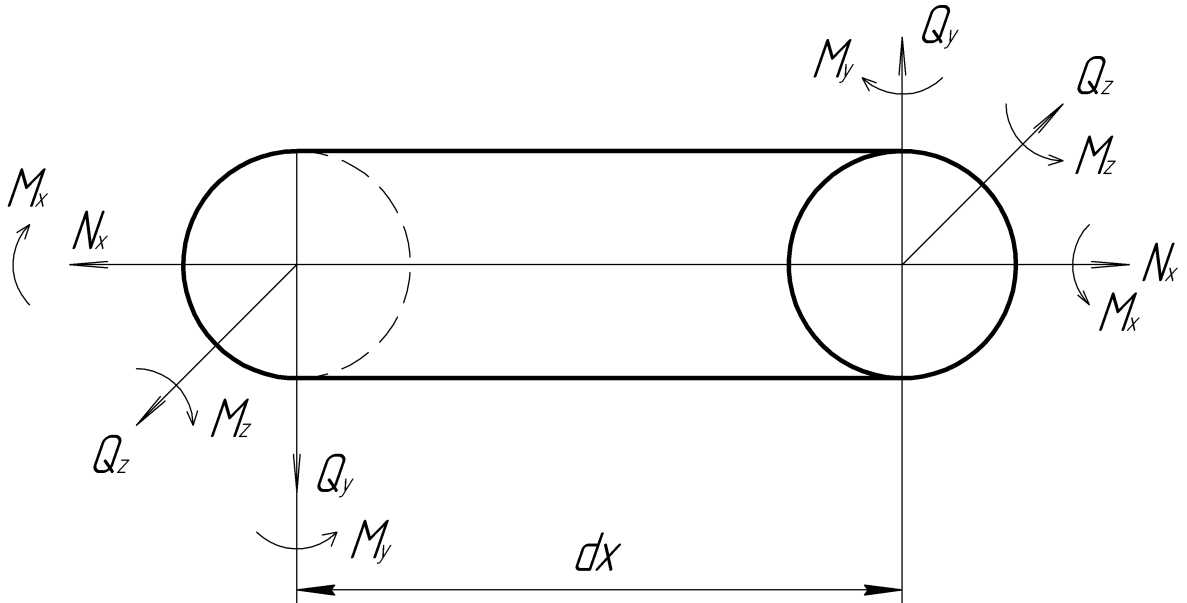


Рис.2.4- Внутренние силы в сечении стержня при произвольной нагрузке.

Используя принцип независимости действия сил и пренебрегая изменением нагрузок на бесконечно малой длине dx , рассмотрим действие каждого силового фактора отдельно:

- 1) 1) Энергия растяжения (сжатия) – U_N от продольных сил

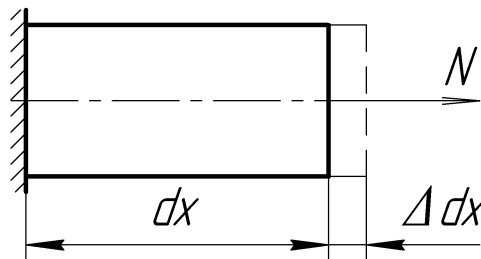


Рис.2.5 – к определению U_N

$$d U_N = d N A = \frac{N \Delta d}{2};$$

По закону Гука:

$$\Delta d x = \frac{N d}{E A};$$

$$U_N = \int_0^x \frac{N^2 d \lambda}{2 E A}.$$

2) Энергия сдвига, U_Q

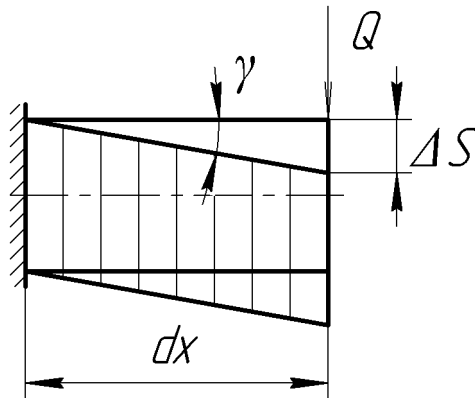


Рис.2.6 – к определению U_Q

$$d U_Q = d Q \Delta S = \frac{Q \Delta S}{2} = \frac{Q^2 d}{2G}; \quad \Delta S = \frac{Q d}{G A}; \quad U_Q = A_Q = \int_0^x \frac{Q^2 d}{2G};$$

G – модуль упругости при сдвиге

A – площадь сечения

GA – жесткость при сдвиге

3) Энергия кручения, U_M

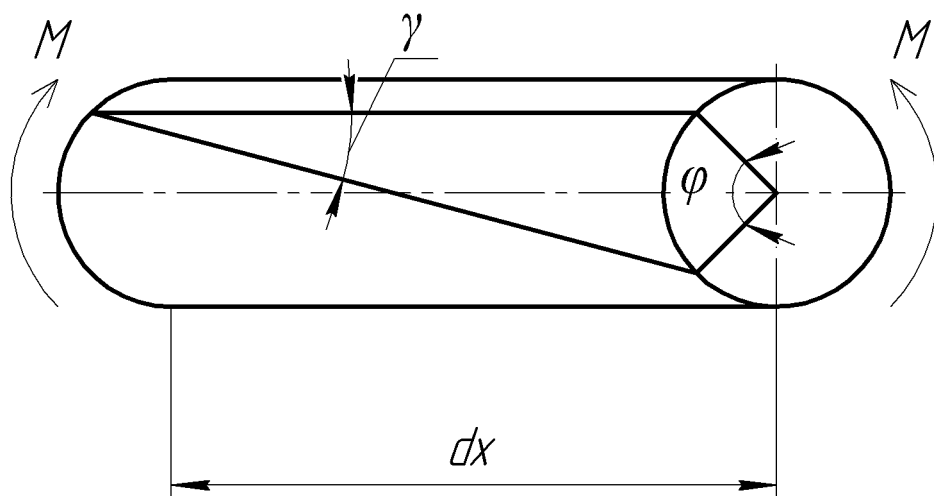


Рис.2.7 – к определению U_M

$$dU = dA = \frac{M\varphi}{2}; \quad \varphi = \int \frac{M_x dx}{GI_p}; \quad U_M = A = \int_0^x \frac{M_x^2 dx}{2GI_p}$$

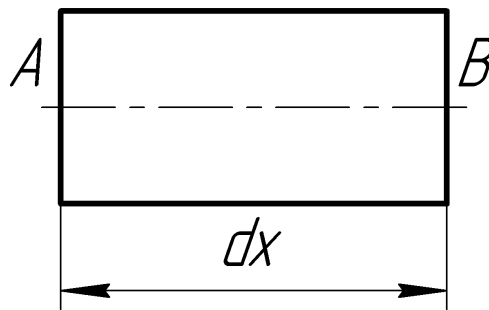
M_x – крутящий момент;

GI_p – жёсткость при кручении.

Если I_p и M_x изменяются по длине стержня, то $U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{GI_p} dx$

4) Энергия изгиба

До деформации



После деформации

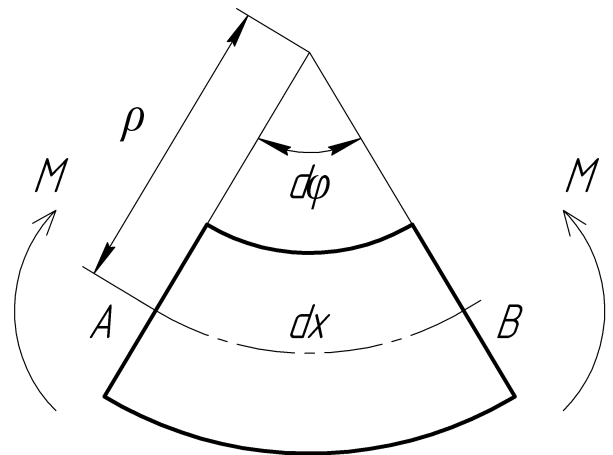


Рис. 2.8

$$dU = dA = \frac{M \varphi}{2};$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \text{ (Закон Гука);}$$

$$dx = \rho d\varphi;$$

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{x dx}{\rho^2} = \frac{M}{E_z} dx;$$

$$U_M = A_M = \int_0^x \frac{M^2 dx}{2E_z I}$$

В общем случае при действии сил на брус, потенциальная энергия упругой деформации равна:

$$U = \sum \int_0^x \frac{N_x^2 dx}{2E} + \sum \int_0^x \frac{k x_z^2 dx}{2GA} + \sum \int_0^x \frac{k x_y^2 dx}{2GA} + \sum \int_0^x \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \sum \int_0^x \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \sum \int_0^x \frac{M_y^2 dx}{2EI_y},$$

где k — коэффициент неравномерности распределения напряжений.

Теоремы о взаимной работе и взаимном перемещении

1. 1. Теорема о взаимной работе (теорема Бетти)

Работа сил первого состояния на перемещение, вызванное силами второго состояния, равняется работе сил второго состояния на перемещение, вызванное силами первого состояния, то есть:

$$P_1 y_1 = P_2 y_2$$

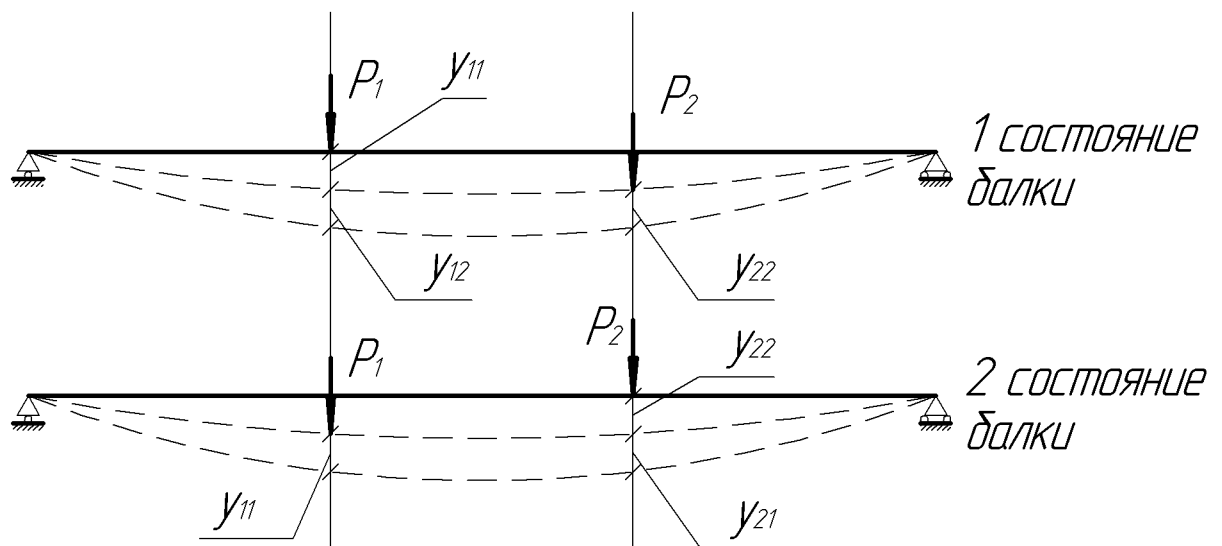


Рис. 2.9

y_{11}, y_{22} – перемещения в направлении приложенной силы;

Не снимая силу первого состояния P_1 , приложим силу второго состояния P_2 .

Определим полную работу от внешних сил при первом способе.

$$A_1 = \frac{P_1 y_1}{2} + \frac{P_2 y_2}{2} + P_1 y_1$$

Меняем очередь приложения сил (состояние 2).

$$A_2 = \frac{P_1 y_1}{2} + \frac{P_2 y_2}{2} + P_2 y_2$$

Последние слагаемые не содержат $1/2$, поскольку сила P_1 на перемещении y_{12} совершает работу, оставаясь постоянной.

Очевидно, работа не зависит от порядка приложенной нагрузки.

То есть $A_1 = A_2$, тогда $P_1 y_{12} = P_2 y_{21}$, что и требовалось доказать (Теорема Бетти)

При приложении единичной нагрузки $P_1 = P_2 = 1$, $y_{12} = y_{21}$ - это теорема о взаимности перемещений (Теорема Максвелла)

Перемещение от сил первого состояния в направлении сил второго состояния равно перемещению сил от второго состояния в направлении сил первого состояния.

Метод Мора для определения перемещений.

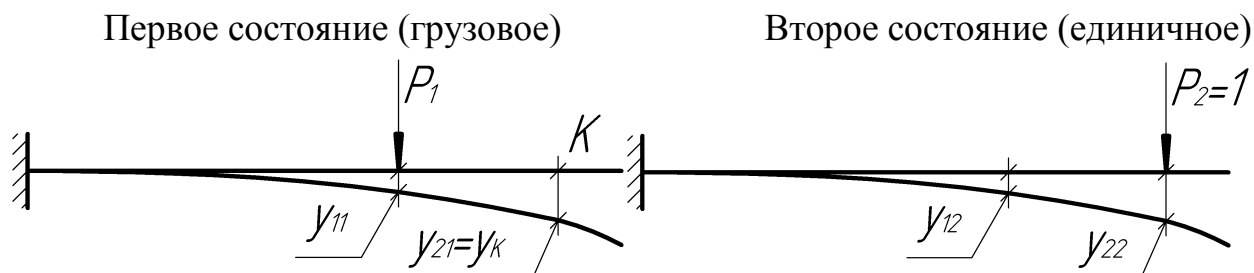


Рис. 2.10

Определить прогиб в точке К (y_K - ?)

Для этого в точку К приложим единичную силу $\overline{P}_2 = 1$. Используем теорему о взаимности работ для первого и второго состояния балки:

$$P_1 y_1 = \overline{P}_2 y_2 ; \quad \overline{P}_2 = 1, \text{ тогда } P_1 y_1 = y_2 = y_K ;$$

Полная работа от первого и второго состояний:

$$U = A = \frac{P_1 y_1}{2} + \frac{\overline{P}_2 y_2}{2} + P_1 y_1 ;$$

$$P_1 y_1 = y_2 = y_K \Rightarrow y_K = A - \frac{P_1 y_1}{2} - \frac{\overline{P}_2 y_2}{2} ;$$

Используя формулу потенциальной энергии деформации, выразим каждую работу через изгибающий момент:

$$A = \sum \int \frac{M_x^2 dx}{2EI} ;$$

$$y_K = \sum \int_0^x \frac{(M_x + \overline{M}_x)^2 dx}{2EI} - \sum \int_0^x \frac{M_x^2 dx}{2EI} - \sum \int_0^x \frac{\overline{M}_x^2 dx}{2EI} , \text{ или}$$

$$y_K = \sum \int \frac{(M_x^2 + 2M_x \overline{M}_x + \overline{M}_x^2) dx}{2EI} - \sum \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EI} - \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_x^2 dx}{2EI} = \sum \int_0^l \frac{M_x \overline{M}_x dx}{EI} ;$$

$$\delta(y; \theta) = \sum \int_0^l \frac{M_x \overline{M}_x dx}{EI} - \text{это интеграл Мора.}$$

где: M_x – выражение изгибающих моментов, составленное по грузовой схеме

\overline{M}_x – выражение изгибающих моментов, составленное по грузовой схеме

EI_z – жесткость балки при изгибе

Порядок вычисления с помощью интеграла Мора

1. Составляется схема грузового состояния (заданная схема)
2. Составляется схема единичного состояния, для этого в направлении искомого перемещения прикладывается единичная нагрузка (при определении линейного перемещения - единичная сила, при определении углового перемещения - единичная пара).
3. Составляем выражение изгибающих моментов по грузовой схеме, M_x
4. Составляем выражение изгибающих моментов по единичной схеме, \overline{M}_x
5. Выражения изгибающих моментов вносим под интеграл и производим вычисление интеграла.
6. Знак (-) в результате вычислений показывает, что перемещение происходит в направлении противоположном единичной нагрузке.
7. Пределы X на грузовой и единичной схемах должны быть одинаковы.

Пример

Определить перемещение в точке А (y_A - ?) для балки (Рис. 2.11), нагруженной по схеме, балка двутавровая №24, $I_z = 3460 \text{ см}^4$.

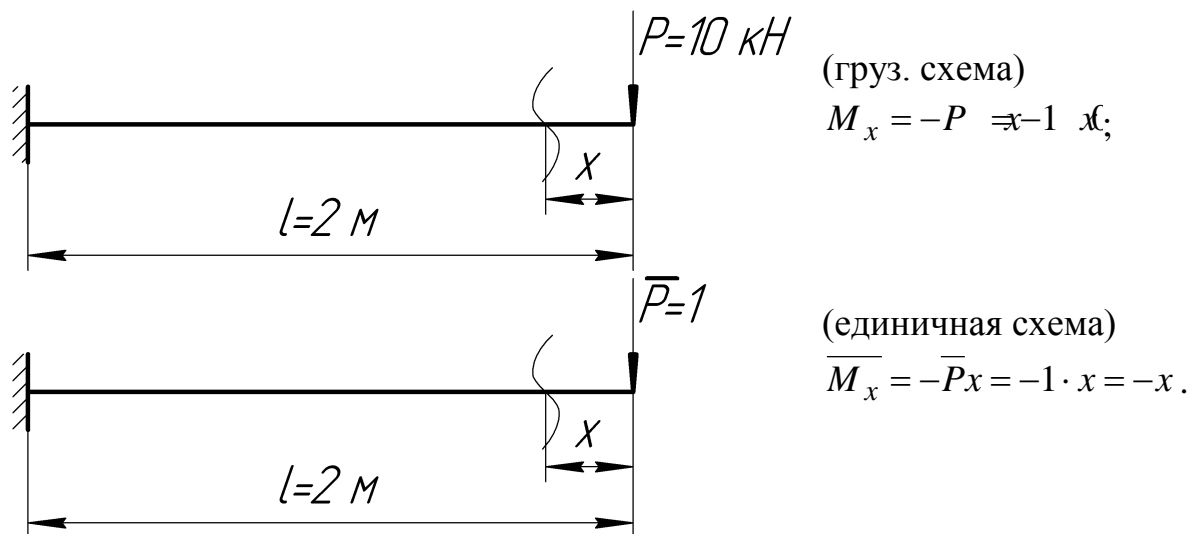


Рис. 2.11

$$\begin{aligned}
 y_A &= \int_0^l \frac{M_x \overline{M}_x}{E_z} dx = \int_0^2 \frac{-10x \cdot (-x)}{E_z} dx = \frac{10}{E_z} \int_0^2 x^2 dx = \frac{10}{E_z} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10 \cdot 2^3}{3E_z} = \frac{80}{3E_z} \\
 &= \frac{80}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 30} = \frac{80}{6 \cdot 10^{10}} = 1.33 \cdot 10^{-9} \text{ м} \\
 y_A &= 1.33 \text{ нм} = 0.00133 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

Лекция № 3

Тема: «Вычисления интеграла Мора с помощью способа Верещагина»

Полное перемещение упругой системы

$$\Delta_i = \sum \int_0^l \frac{N_x \overline{N_x}}{E} d + \sum \int_0^l \frac{K_{x^x} Q_x}{AG} d + \sum \int_0^l \frac{K_{x^y} Q_y}{AG} d + \sum \int_0^l \frac{M_k \overline{M_k}}{AG_p} d +$$

$$+ \sum \int_0^l \frac{M_z \overline{M_z}}{E_z I} d + \sum \int_0^l \frac{M_y \overline{M_y}}{E_y I} d ; \quad (3.1)$$

где k – коэф. неравномерного распределения напряжений в сечении.

Рассмотрим вычисление интеграла Мора только от изгибающего момента, потому что перемещение от изгиба значительно превышает перемещение от других факторов

$$\Delta_i p = \sum \int_0^l \frac{M_x \overline{M_x}}{E I} d$$

Вычисление интеграла Мора значительно упрощается, если использовать графоаналитический метод.

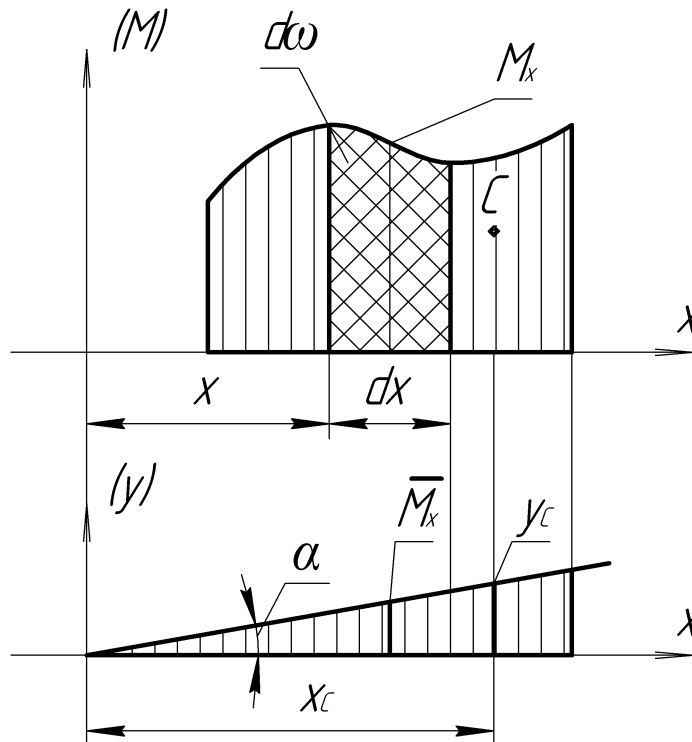


Рис.3.1

Пусть одна из эпюр (y) имеет линейное очертание, а вторая (M) произвольное очертание. (Рис. 3.1)

Площадь эпюры заштрихованного участка ($d\omega$) эпюры M равна:

$$d\omega = M_x d x \quad \overline{M_x} = x t \alpha$$

$$\Delta_{i p} = \sum \frac{t \alpha}{E} \int_0^x d\omega \cdot x$$

$$\int_{\omega} d\omega x = S_y = \omega x_C \quad - \text{статический момент площади;}$$

$$\Delta_{i p} = \sum \frac{\omega x_C t \alpha}{E} = \sum \frac{\omega y_C}{E}; \quad (3.2)$$

где ω – площадь грузовой эпюры

y_C – ордината единичной эпюры под центром тяжести грузовой

Определение перемещений по способу Верещагина производится методом перемножения эпюр. Перемножить эпюры – это значит, площадь грузовой эпюры умножить на координату единичной взятой под центром тяжести грузовой.

Особенности перемножения эпюр:

1. Если обе эпюры находятся по одну сторону от оси, то при перемножении будет знак (+), в противном случае (-);
2. Если одна из эпюр криволинейна (грузовая), то необходимо брать площадь грузовой и умножать на ординату единичной;
3. Если обе эпюры линейны, то они обладают свойствами коммутативности (безразлично площадь какой эпюры брать);
4. Если единичная эпюра имеет изломы, то каждая из эпюр разбиваются по точкам излома единичной; результаты перемножаются по участкам и складываются.

Примечание:

1. Знак минус (-) полученный в результате вычисления по способу Верещагина свидетельствует о том, что единичная сила приложена в направлении противоположном искомому перемещению;
2. Границы участков на единичной и грузовой эпюрах должны быть одинаковы.

Порядок определения перемещений по способу Верещагина

1. Составляется схема грузового состояния и строится эпюра изгибающих моментов по грузовой схеме;
2. Составляется схема единичного состояния (для этого в направлении искомого перемещения прикладывается единичная нагрузка; при определении линейного перемещения – единичная сила, при определении углового перемещения – единичная пара)
3. Полученные эпюры перемножаются по одноимённым участкам и результаты складываются.

При перемножении эпюр и нахождении их площадей и центров тяжести пользуются следующими схемами

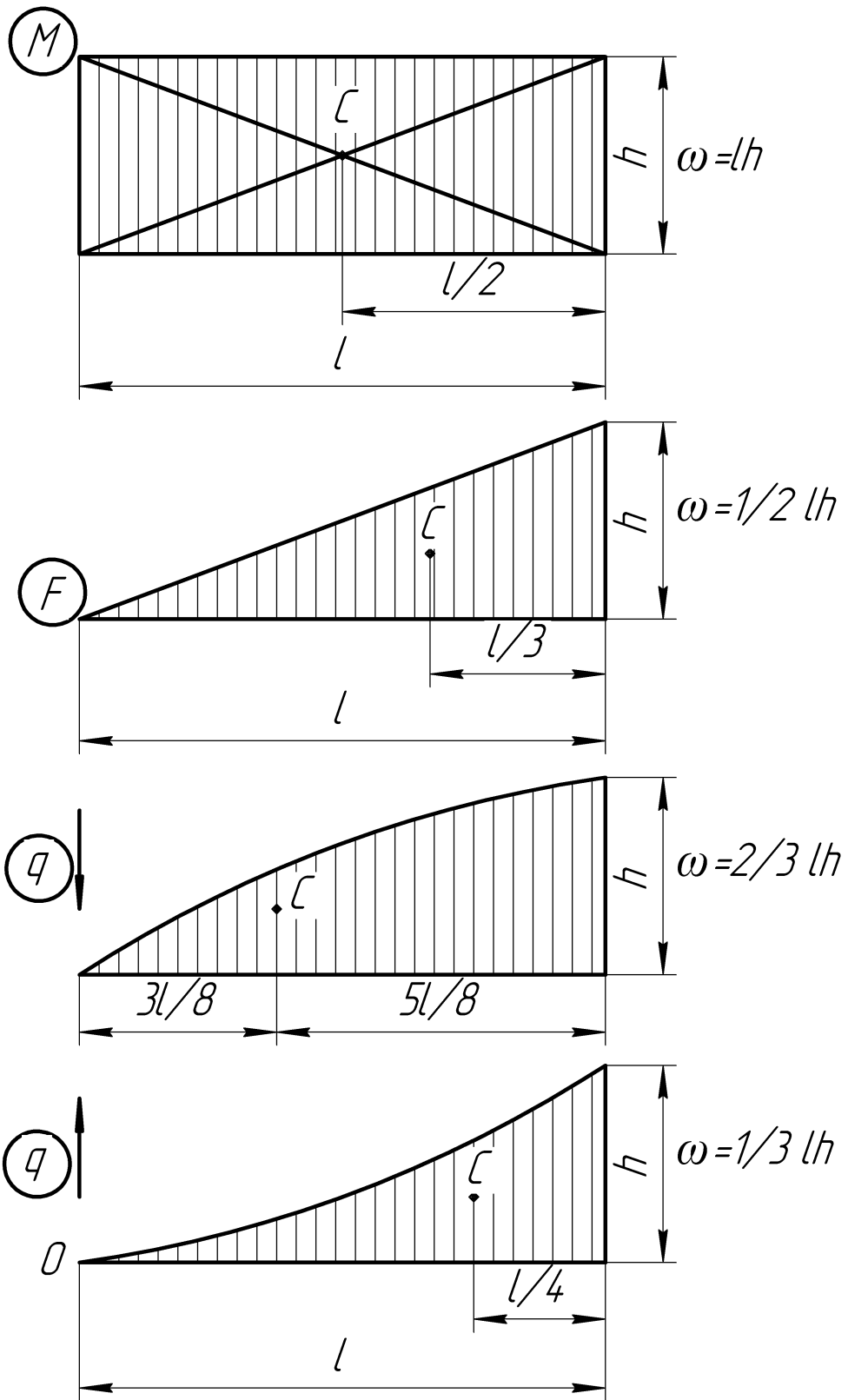


Рис. 3.2

где - O - вершина параболы

При перемножении перевернутых трапеций

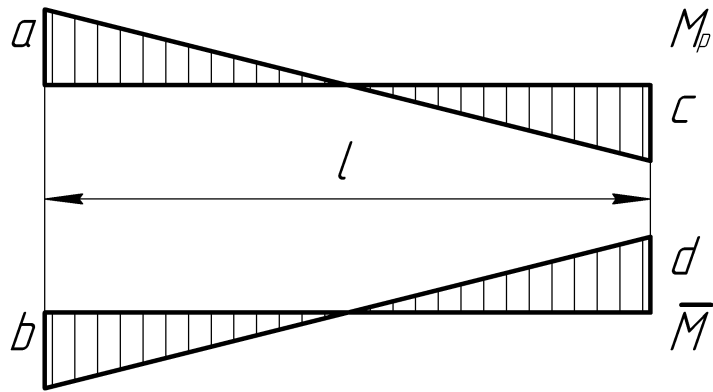


Рис. 3.3

Используем формулу Симпсона-Карноухова

$$\sum \omega y_C = \frac{1}{6}(2a + 2b + ad + bd)$$

При перемножении перекрученных трапеций

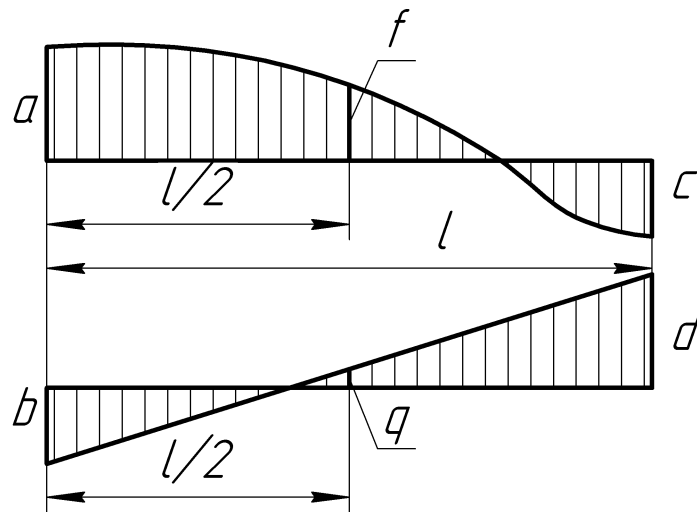


Рис. 3.4

$$\sum \omega y_C = \frac{l}{6}(a + 4f + c).$$

Формула Мюллера-Бреслау

где – a, b, c, d, f, q – координаты эпюр со своими значениями

Тема: Расчёты на жёсткость упругих систем

Для проверки системы на жёсткость необходимо задать допустимый угол поворота $[\theta]$ и допустимый прогиб $[f]$ исходя из назначения и соответствия конструкции.

Пример № 1. Определить перемещение методом Верещагина и проверить его результат с допустимым значением для балки загруженной по схеме рис.3.5.

$[Y] = 1/400$ (м), двутавр №24 $I_z = 3460 \text{ см}^4$.

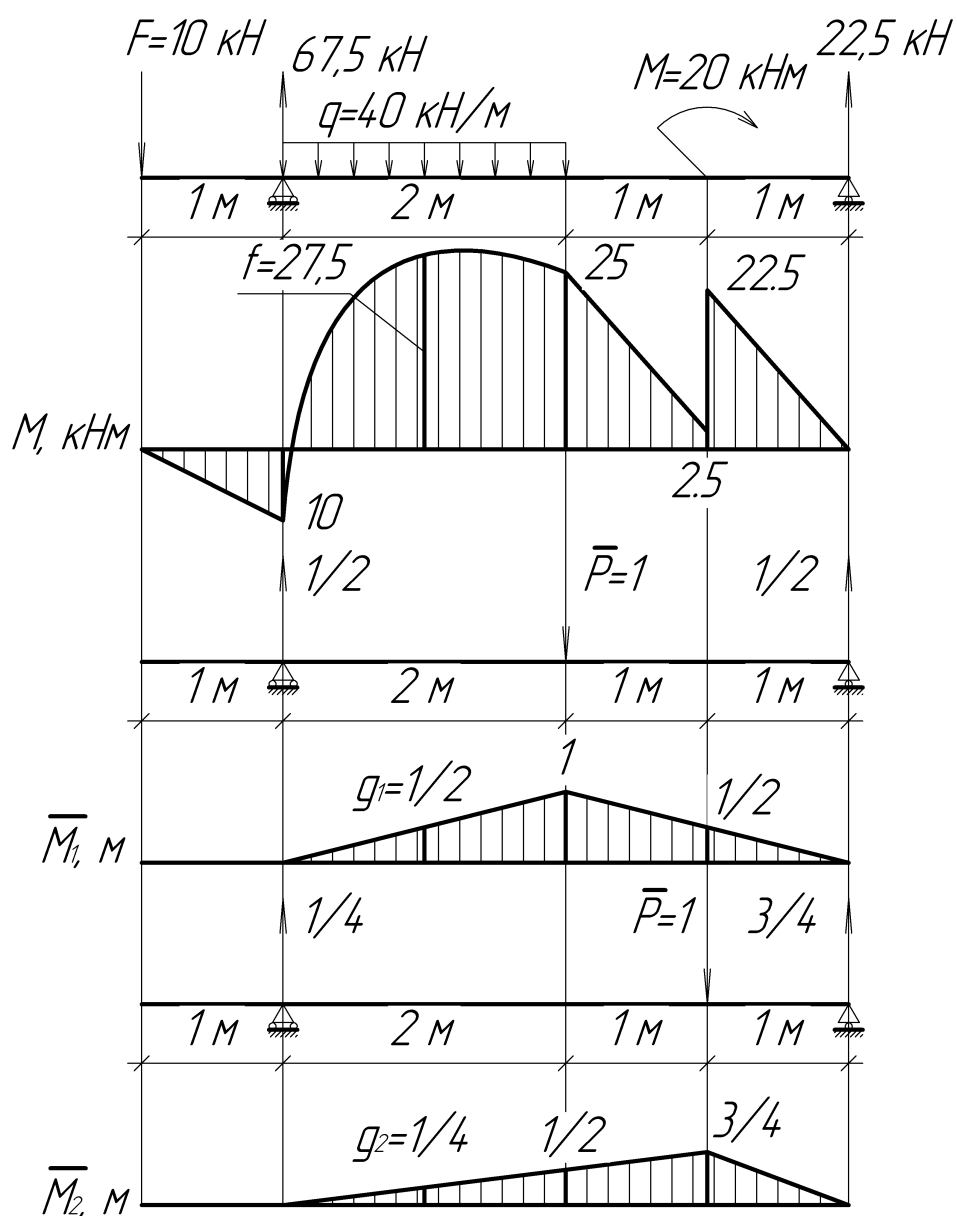


Рис. 3.5 – к расчёту балки на жёсткость.

Расчёт

$$\begin{aligned}
 y_1 &= M \cdot \bar{M} = \frac{1}{E} \sum I \omega y_C = \\
 &= \frac{1}{E} \left[\left(1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{1}{2} + 2.5 \cdot 1 \right) + \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5) \right] = \\
 &= \frac{4 \cdot 8 \cdot 0 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 10^8 \cdot 0.4 \cdot 10^{-8} \cdot 0} = 0.0 \text{ м} < [0.01] \text{ м}
 \end{aligned}$$

$$f = M_{x_2=f} = -1 \cdot 2 + 60.5 \cdot 1 - \frac{4 \cdot 1^2}{2} = 2.5 \text{ кНм}$$

$$[y] = \frac{l}{4} = \frac{4}{0.4 \cdot 10^0} = 0.0 \text{ м};$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= M_p \cdot \bar{M}_x = \frac{1}{E} \sum I \omega y_C = \\
 &= \frac{1}{E} \left[\frac{2}{6} \left(1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{3}{4} + 2.5 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \right) \right] = \\
 \frac{2}{E} &= \frac{7 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 10^8 \cdot 0.4 \cdot 10^{-8} \cdot 0} = 0.0 \text{ м}
 \end{aligned}$$

так как $y_1 > y_2$, то $y_2 = y_{\max}$;

$y_{\max} = [y]$ – жёсткость балки обеспечена.