

## Компьютерный анализ свойств решений ряда задач

Андрюхин А.И.

Донецкий национальный технический университет  
alexandruckin@ramber.ru

*Андрюхин А.И. «Компьютерный анализ свойств решений ряда задач». В данной работе рассматриваются свойства решений ряда известных задач с варьируемыми параметрами. Выполнен анализ устойчивости конкретной системы управления. Построены оценки параметров ее областей устойчивости. Показано сложное строение областей значений полинома при вариации его коэффициентов. Это негативно влияет на определение его кратных корней и обуславливает необоснованные решения об устойчивости соответствующей системы управления. Выполнена оценка параметрической устойчивости и чувствительности решений краевой задачи и задачи Коши. Визуальный компьютерный анализ их корректности показал необходимость тщательного анализа каждой конкретной проблемы. Рассмотрена известная методика идентификации квазипериодической последовательности и показаны ее недостатки. Приведены численные расчеты для анализируемых задач.*

**Ключевые слова:** устойчивость, компьютерный анализ, система, управление, идентификация, квазипериодические

### Введение

В статье рассматривается известная проблема определения устойчивости и корректности решений задач с варьируемыми параметрами и начальными значениями. Отметим, что для таких задач, основными математическими моделями которых являются обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений и т.п., известны результаты в [1 – 5].

Так, современные сложные компьютерные системы управления представляются математическими моделями, которые используют многие дифференциальные уравнения разных порядков. При их решении мы предварительно приводим их к канонической форме уравнений первого порядка (пространство состояний). Используя эквивалентные преобразования (при которых решения исходной системы совпадают с решениями конечной преобразованной системы), мы при вариации параметров не можем гарантировать совпадения окрестностей этих решений. Поэтому происходит потеря устойчивости решений при малых вариациях параметров, что наиболее ярко отражается в задачах теории оптимального управления.

При анализе различных приложений, одной из наиболее часто встречающихся задач является вычисление корней полинома  $n$ -степени:

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Эта задача является давно решенной в вычислительной математике, однако на практике коэффициенты полинома обычно известны с некоторой погрешностью:  $|a_i - a_{0i}| < \varepsilon_i$ ,  $i = 1, n$ , где  $a_{0i}$ ,  $(\varepsilon_i)$  – истинные значения коэффициентов (погрешности их измерения) соответственно.

В приложениях чрезвычайно важно оценивать ситуации, когда малые вариации коэф-

фициентов полинома влекут большие изменения в значениях корней.

Так, для определения устойчивости решения системы дифференциальных уравнений, которая является математической моделью для многих поставленных задач, необходимо рассматривать корни характеристического полинома.

Известно, что если среди этих корней есть пара весьма близких действительных корней, либо комплексные корни, у которых мнимая часть мала по отношению к действительной части, то это есть признак некорректности или плохой обусловленности решаемой проблемы.

Целью исследования является оценка параметрической устойчивости решений задач, которые требуют анализа свойств характеристического полинома матрицы коэффициентов системы уравнений различного типа. Это позволит более точно оценивать проектное решение по отношению к реальным возмущениям.

Задачами исследования является анализ свойств решений известных задач, таких как устойчивость решений задач управления, устойчивость и корректность решений краевых задач и связанная с предыдущими задачами проблема вычисления кратных корней характеристического полинома. Отдельно рассматривается задача идентификации квазипериодических последовательностей.

### Анализ параметрической устойчивости систем управления

Для линейных систем управления, которые описаны матричной моделью  $x' = Ax + Bu$  оптимальным по минимуму квадратичного критерия является линейный регулятор  $u = kx$  (здесь  $x$  и  $u$  – векторы состояния и управления) [1].

В реальности некоторые скалярные переменные вектора состояния  $x$  являются неизмеримыми.

Пример.

Рассмотрим двумерную замкнутую линейную систему управления с линейным регулятором  $u=kx$  и тогда мы сможем получить для устойчивого состояния следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u &= 0 \\ k_1x_1 + k_2x_2 + u &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с уже заданным управлением:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + u = 0.$$

Зафиксируем коэффициенты  $b_1, b_2, k_1, k_2$ , установив их равными 1, 2, 1, 2 соответственно.

Определим устойчивость системы (1), вычислив значения собственных чисел матрицы коэффициентов системы. Мы можем упростить визуализацию областей устойчивости, предположив  $a_{11}=0$ .

Тогда единственное в этом случае собственное число  $\lambda$  определяется выражением  $\lambda = -2a_{12} - 2a_{21} + a_{12}a_{21} + a_{22}$ . При  $\lambda < 0$  мы имеем область устойчивости, вид которой представлен на рисунках 1 и 2.

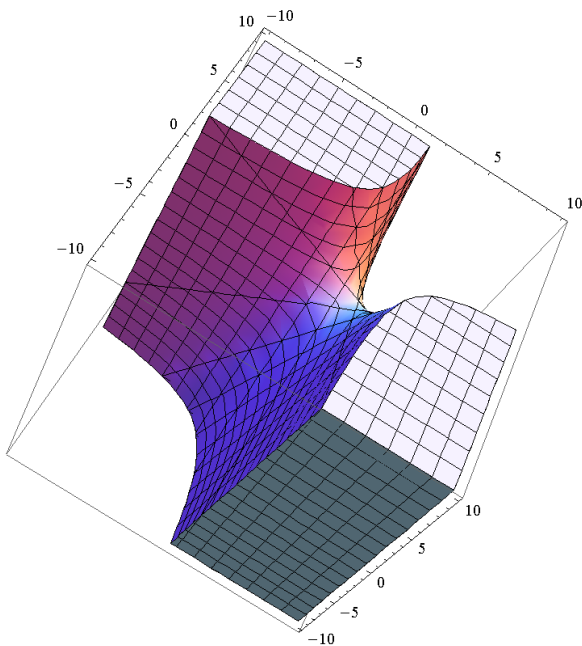


Рисунок 1. – Область устойчивости  $\lambda < 0$

Использование компьютера при расчетах всегда подразумевает огрубление идеальных математических представлений, которые мы используем при описании и исследовании определенных моделей. В нашем случае мы попытаемся наложить определенную сетку погрешности расчета на исследуемые области устойчивости полиномов.

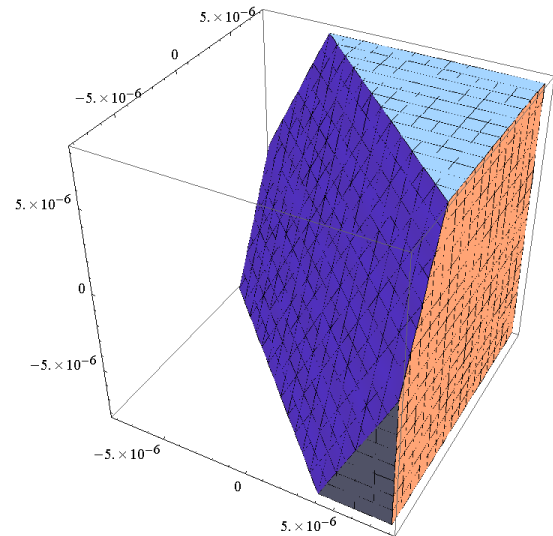


Рисунок 2. – Область устойчивости  $\lambda < 0$

Задав малое  $\varepsilon > 0$ , мы можем исследовать «подозрительную» область  $|\lambda| < \varepsilon$ , представленную на рисунке 3 (здесь и далее необходимо обращать внимание на масштаб области).

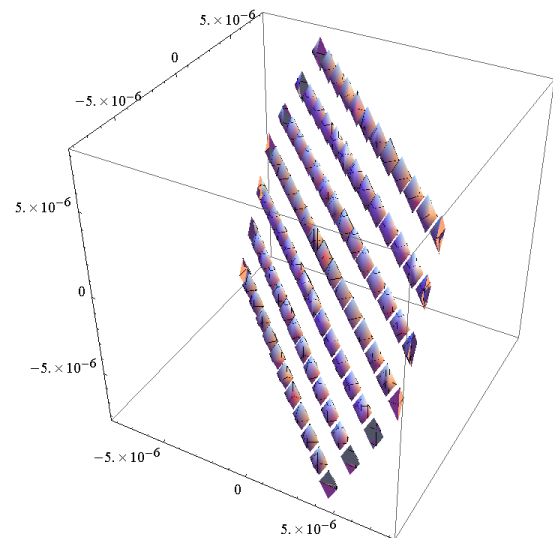


Рисунок 3. – Область  $|\lambda| < \varepsilon$

Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$-\varepsilon + 2a_{12} + 2a_{21} - a_{12}a_{21} < a_{22},$$

$$a_{22} < \varepsilon + 2a_{12} + 2a_{21} - a_{12}a_{21}.$$

Условие  $\lambda = -2a_{12} - 2a_{21} + a_{12}a_{21} + a_{22} < 0$  определяет область устойчивости  $\lambda < 0$ , представленную на рисунке 4.

Приведенные рассуждения показывают сложную структуру областей устойчивости даже для полиномов небольшой степени при простых упрощающих предположениях относительно вариации коэффициентов рассматриваемых многочленов.

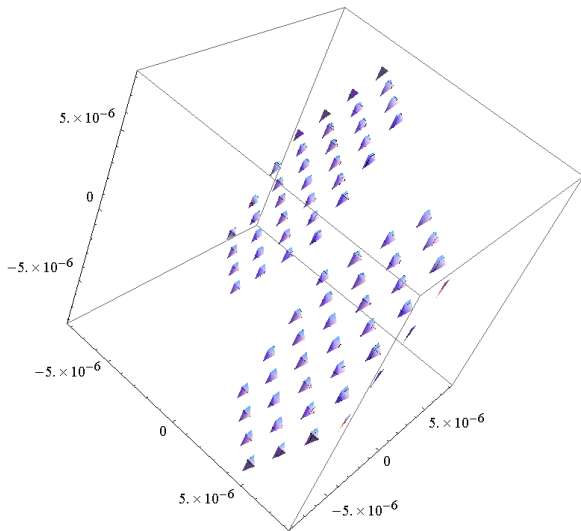


Рисунок 4. – Область устойчивости  $\lambda < 0$  и  $|\lambda| < \varepsilon$

**Проблемы вычисления корней полинома**

Если полином имеет кратные вещественные корни, то задача их определения является некорректной [1].

При вычислении корней полинома  $F(x)$  на компьютере мы в силу дискретности выполняемых операций задаем  $\delta$ -точность вычисляемого корня  $x_i$  и тем самым  $\varepsilon$ -погрешность вычисления  $|F(x_i)| < \varepsilon$ . В сущности для  $\delta$  и  $\varepsilon$  можно записать  $\varepsilon \approx M\delta$ , где  $M = a_{n-1}$  – коэффициент в  $F(x)$ .

На рисунках 5 – 8 представлены области решений при вычислении кратных корней полиномов  $L(x)$  при одинаковом условии. Эти полиномы  $L(x)$  имеют по два кратных корня, равных  $1,1$  и  $1$ , и рисунки показывают строение областей значений этих полиномов при различных вариациях их представления.

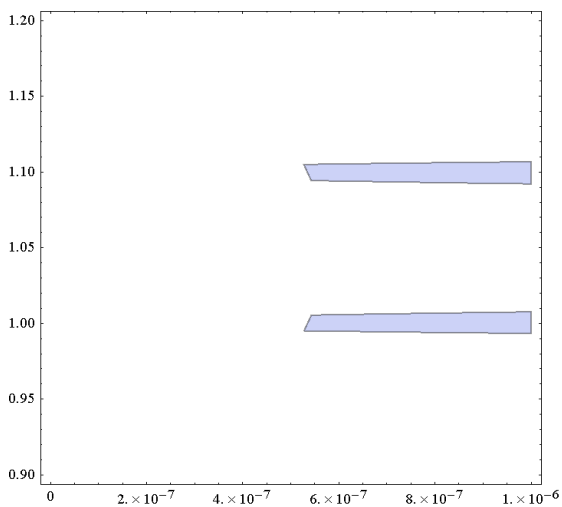


Рисунок 5. – Область  $|L(x)| < \varepsilon$

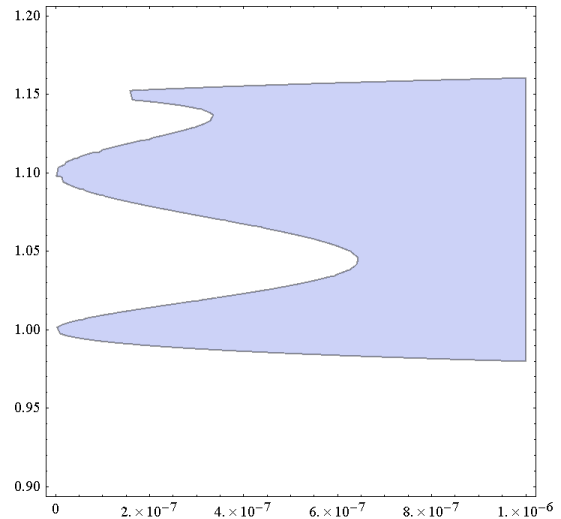


Рисунок 6. – Область  $|L(x)(x-1.15)| < \varepsilon$

Рисунки 7, 8 иллюстрируют строение областей полинома при вариации его коэффициентов.

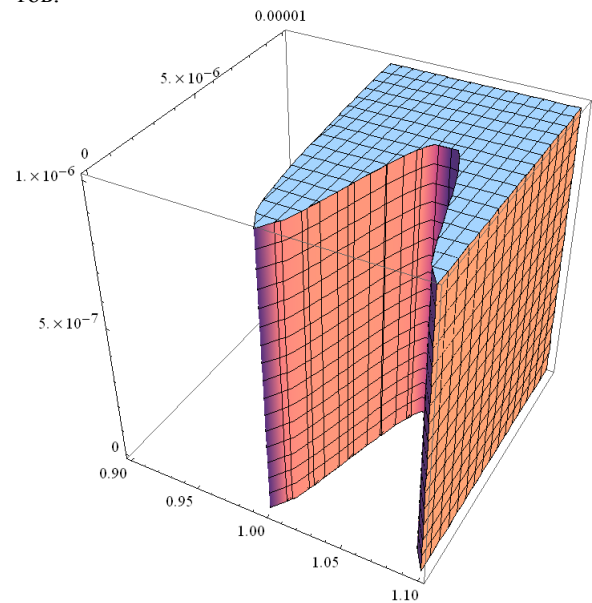


Рисунок 7. – Область  $|L(x)| < \varepsilon$

Основная проблема вычисления кратных корней уравнения  $F(x)=0$  состоит в том, что вычислив с определенной точностью  $x_1$ , мы должны вычислять второй кратный корень из уравнения  $F(x)/(x-x_1)=0$  либо  $F'(x)=0$ .

Но его вычисление выполняется в другом окружении и ясно, что нет абсолютной уверенности в том, что корни кратные, так как коэффициенты  $F(x)$  в реальности известны с какой-то точностью.

Для рисунка 9 мы видим достаточно сложное соотношение областей значений полинома  $G(x)=x^2-0,02x+0,0001-10^{-6}$ .

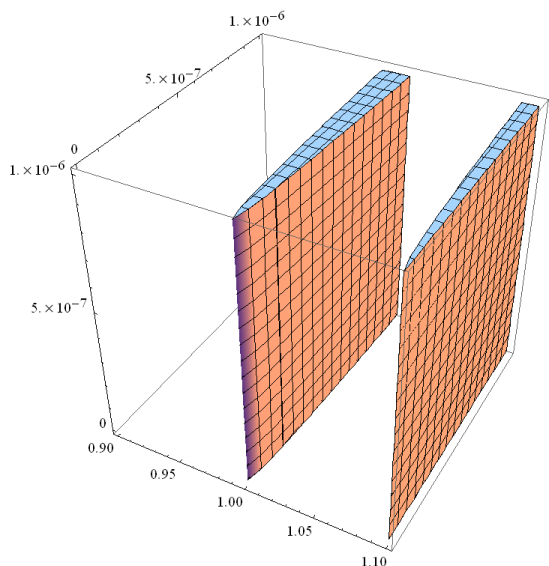


Рисунок 8. – Область  $|L(x)| < \varepsilon/10$

Так  $|G(x)| < \varepsilon$  при  $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-6}$  и нескольких диапазонах изменения  $x$  ( $-0.02 < x < 0.01 - 0.001(1+10^6\varepsilon)^{1,2}$ ,  $0.01 < x < 0.01 - 0.001(1-10^6\varepsilon)^{1,2}$ ,  $0.02 > x > 0.01 + 0.001(1+10^6\varepsilon)^{1,2}$ ).

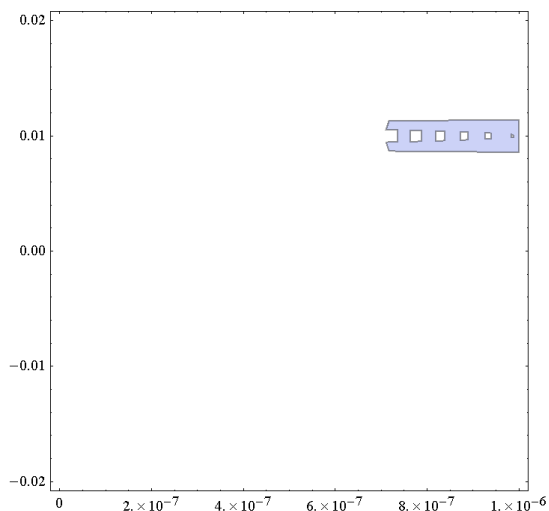


Рисунок 9. – Области значений  $|G(x)| < \varepsilon$

**Устойчивость решений краевых задач**

Известно, что решения краевых задач, в отличие от решений задачи Коши (для которых выполняется условие Липшица), могут не иметь непрерывной зависимости от краевых условий. Краевая задача может быть некорректной или плохо обусловленной в зависимости от значений краевых условий. Это старая теоретическая проблема, но при выполнении компьютерных расчетов она по-прежнему интересна и актуальна.

На практике проверка корректности сводится к повторению расчетов при модифицированных начальных краевых условиях.

Пример. Рассмотрим ОДУ следующего вида  $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$  с краевыми условиями  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ , а более конкретно выполним анализ задачи:

$$y''(x) + (1 + \varepsilon p)y(x) = 0 \text{ с краевыми условиями } y(0) = 0.001 + \varepsilon, y(\pi) = 0.1 + \varepsilon.$$

Здесь  $\varepsilon, \varepsilon p$  – вариации параметров.

Аналитическое решение представляется следующей формулой:

$$y(x) = -\varepsilon \operatorname{Ctg}((1 + \varepsilon p)^{1/2} \pi) + (1 + \varepsilon) \operatorname{Cosec}((1 + \varepsilon p)^{1/2} \pi) \operatorname{Sin}((1 + \varepsilon p)^{1/2} x) + \operatorname{Cos}((1 + \varepsilon p)^{1/2} x) \varepsilon.$$

На рисунке 10 показаны графики решений: с максимальной амплитудой ( $d = 0.1, \varepsilon p = 0.01$ ), с минимальной амплитудой ( $d = 0.1, \varepsilon p = 0.0$ ) и со средней по величине амплитудой ( $d = 0.0, \varepsilon p = 0.01$ ).

На рисунках 11, 12 представлены значения решений большие, чем  $d^{-1}$  и  $d^{-2,9}$  при  $x$  на интервале  $(-4, 4)$ ,  $d \in (10^{-9}, 10^{-5})$ ,  $\varepsilon \in (-10^{-5}, 10^{-5})$ . Получаем, что малые изменения параметров для простой краевой задачи влекут большие изменения в ее решении.

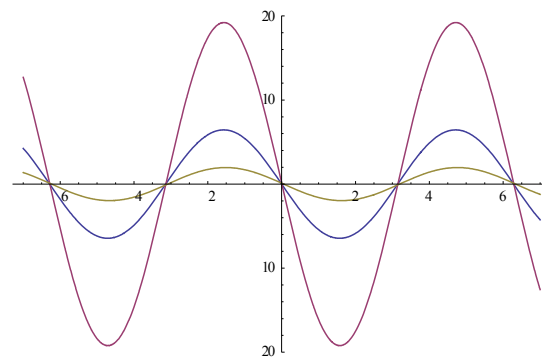


Рисунок 10. – Сравнение решений

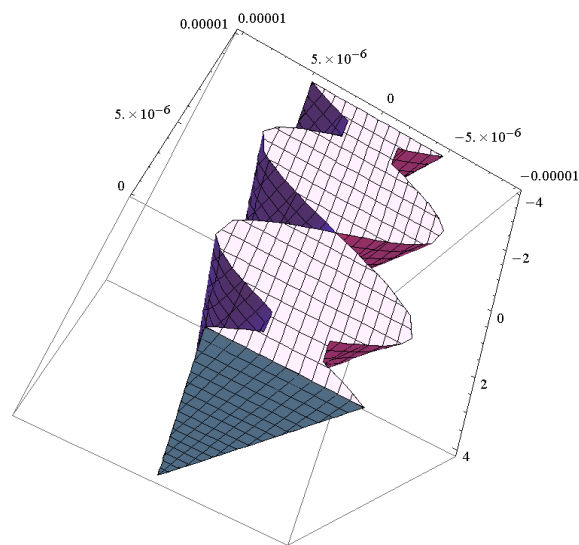


Рисунок 11. – Строение области значений решений большие, чем  $d^{-1}$

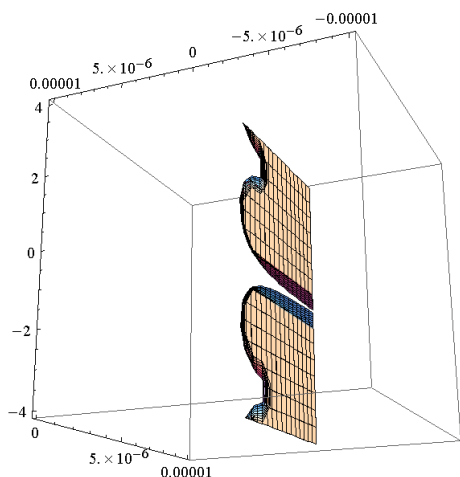


Рисунок 12. – Строение области значений решений большие, чем  $d^{-2.9}$

### Устойчивость решений задач Коши

Ранее упоминалось, что решения задачи Коши (для которых выполняется условие Липшица) имеют непрерывную зависимость от начальных условий. Однако изменение коэффициентов уравнения могут обуславливать резкое изменение вида решений. Это относится к задачам Коши, у которых характеристический полином при вариациях коэффициентов имеет кратные нулевые корни.

Пример. Рассмотрим группы задачи Коши с вариациями коэффициентов. Начальные условия одинаковы для всех задач  $x[0]=x'[0]=x''[0]=x'''[0]=1$  и  $\varepsilon=0.01$ .

Группа I. а) исходная задача  $x^{(4)}+2x^{(3)}+x^{(2)}=0$  с 4 корнями характеристического полинома  $(-1, -1, 0, 0)$ .

б) задача  $x^{(4)}+(2+\varepsilon)x^{(3)}+(1+\varepsilon)x^{(2)}=0$  с 4 корнями характеристического полинома  $(-1.01, -1, 0, 0)$ . Решения этой группы задач имеют вид согласно рисунка 13.

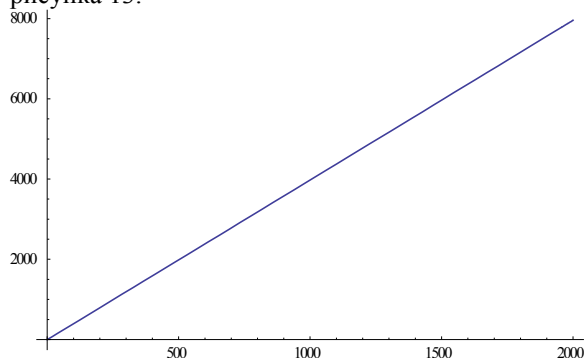


Рисунок 13. – Типичный вид решений I

Группа II. а) задача  $x^{(4)}+(2+\varepsilon)x^{(3)}+(1+\varepsilon)x^{(2)}+\varepsilon x^{(1)}=0$  с корнями характеристического полинома  $(-1.10046, -0.899439, -0.0101031, 0)$ .

б) задача  $x^{(4)}+2x^{(3)}+x^{(2)}+\varepsilon x^{(1)}=0$  с корнями характеристического полинома  $(-1.09554,$

$-0.894253, -0.0102073, 0)$ . Решения этой группы задач имеют вид, представленный на рисунке 14.

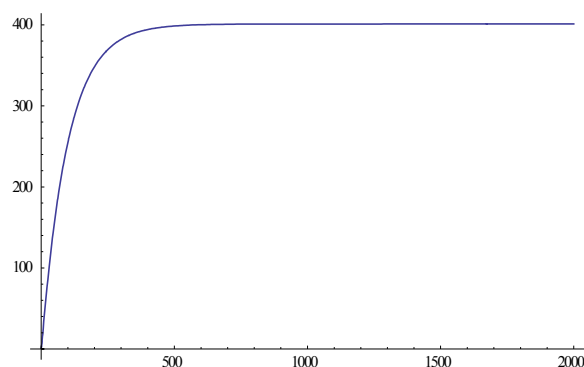


Рисунок 14. – Типичный вид решений II

Группа III. а) задача  $x^{(4)}+2x^{(3)}+x^{(2)}+\varepsilon x^{(1)}+\varepsilon x+\varepsilon=0$  с корнями характеристического полинома  $(-1.00981, -1, 0.00490336-0.0993924i, 0.00490336+0.0993924i)$ ;

б) задача  $x^{(4)}+(2+\varepsilon)x^{(3)}+(1+\varepsilon)x^{(2)}+\varepsilon x^{(1)}+\varepsilon x+\varepsilon=0$  с корнями характеристического полинома  $(-1.01962, -1.0, 0.00480944-0.0989164i, 0.00480944+0.0989164i)$ . Решения этой группы задач имеют вид согласно рисунка 15.

Как и в предыдущем случае, получаем неприятный для практики результат, заключающийся в том, что малые изменения параметров для простой задачи Коши влекут большие изменения в ее решении.

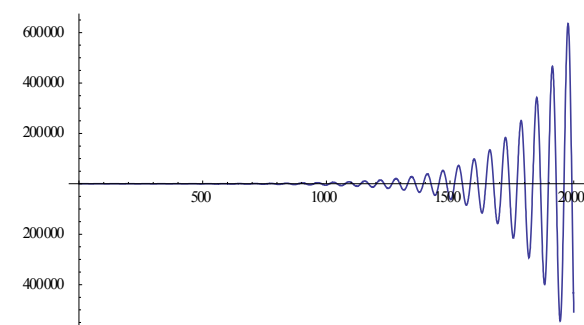


Рисунок 15. – Типичный вид решений III

Согласно приведенным графикам, соответствующие решения совершенно различны (конечность или неограниченность значений, монотонность или имеют осцилляции).

### Идентификация квазипериодических последовательностей

Задача идентификации квазипериодических последовательностей требует тщательного анализа и хорошего понимания проблемной области, в которой мы пытаемся построить модель для наблюдаемых квазипериодических данных (финансовые индексы, числа Вольфа и т.п.). Так, с помощью метода наименьших квадратов зачастую выделяют основную периодическую

компоненту и далее последовательно определяют характеристики следующих по важности периодических составляющих, для которых исходными данными является временной ряд, получаемый из исходной последовательности путем вычитания найденных ранее компонент.

Однако простой пример показывает недостатки использования этого подхода. Так, рассматривая сумму двух периодических последовательностей  $\sin(x)+\sin(x/\sqrt{3})$  на рисунке 16, мы можем сказать, что она является квазипериодической, но не периодической [5, с. 219].

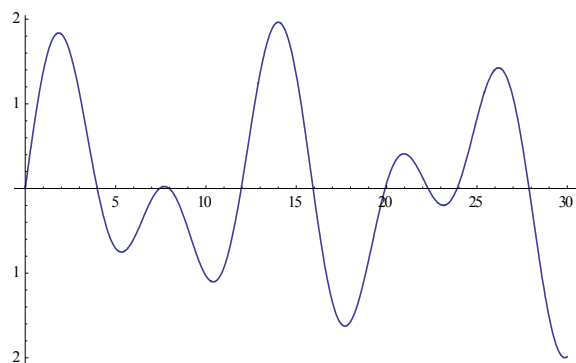


Рисунок 16. –  $Y(x)=\sin(x)+\sin(x/\sqrt{3})$

Если мы попытаемся определить ряд значений функции  $Y(x)=\sin(x)+\sin(x/\sqrt{3})$  при  $x=1,30$  моделью  $Y1(x)=A+B\cos(wx)+C\sin(wx)$ , получим следующие результаты  $A=0.0416901$ ,  $B=1.0068$ ,  $C=-0.37931$ ,  $w=1.02416$  и дисперсия равна 14.5888. Находим далее для ряда значений последовательности  $Y(x)-Y1(x)$  параметры ее модели  $Y2(x)=A2+B2\cos(w2x)+C2\sin(w2x)$ . Имеем следующие результаты  $A2=0.000368494$ ,  $B2=0.174093$ ,  $C2=-0.022069$ ,  $w2=1.2198$  и дисперсия равна 14.1123. График ошибки идентификации  $Y(x)-Y1(x)-Y2(x)$  представлен на рисунке 17.

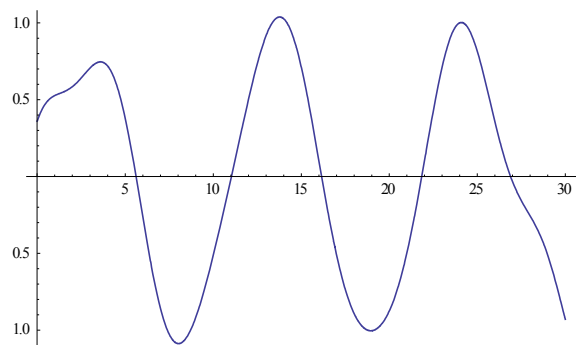


Рисунок 17. – Ошибка  $Y(x)-Y1(x)-Y2(x)$

Заметим, что частоты исходной последовательности равны 1 и 0.57735, а следуя последовательной методике, мы получили 1.02416 и 1.2198. Основной вывод анализа этого примера

заключается в том, что, следуя указанному выше подходу, мы не получим точных значений частот для подобного рода последовательностей (это возможно только для подобранных специальным образом данных).

Если мы сразу находим с дополнительным ограничением  $w>w_2$  параметры модели  $A+B\cos(wx)+C\sin(wx)+B2\cos(w2x)+C2\sin(w2x)$ , то получаем почти идеальные значения  $A=-3.25763\cdot 10^{-11}$ ,  $B=1.0$ ,  $C=5.2498\cdot 10^{-10}$ ,  $w=1.0$ ,  $B2=1.0$ ,  $C2=-5.31027\cdot 10^{-9}$ ,  $w2=0.57735$  и дисперсия равна  $1.74939\cdot 10^{-16}$ . График ошибки идентификации представлен на рисунке 18.

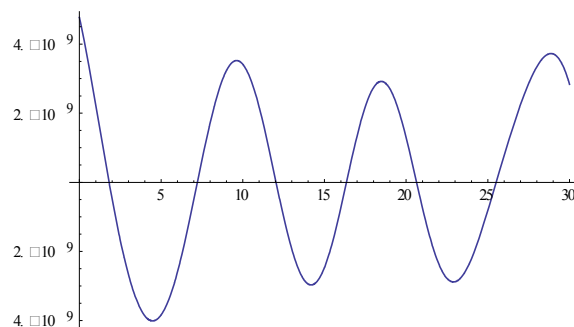


Рисунок 18. – Ошибка идентификации

В случае, когда для различения компонент с частотами  $w, w_2$  используем ограничение по амплитудам  $B^2+C^2>B1^2+C1^2$  для определения параметров модели  $A+B\cos(wx)+C\sin(wx)+B2\cos(w2x)+C2\sin(w2x)$ , сразу приведем сравнение ошибок идентификации на рисунке 19, согласно которому различие результатов не так существенно.

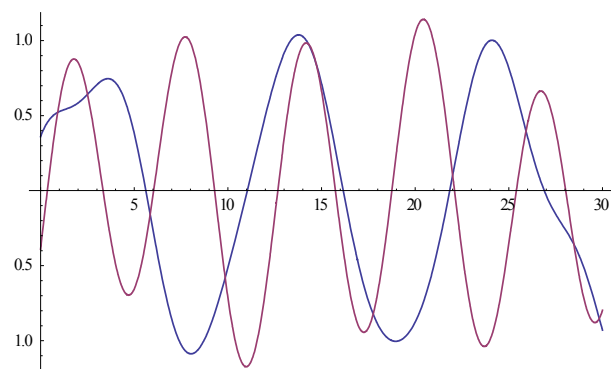


Рисунок 19. – Сравнение ошибок

Вышеизложенное указывает на то, что использование методики последовательного выделения периодических составляющих возможно при хорошем знании специфики проблемной области.

## Результаты

Основной вывод работы заключается в необходимости тщательного анализа каждой

конкретной проблемы с целью оценки параметрической устойчивости и чувствительности ее решения.

К примеру, понижение степени характеристического полинома может быть причиной потери устойчивости решений системы дифференциальных уравнений при вариации ее коэффициентов.

Этот факт чрезвычайно важен при проектировании и анализе устойчивости систем управления.

Аналогичные компьютерные эксперименты с вариацией проблемных параметров показывают резкое изменение свойств решений краевой задачи и задачи Коши.

Анализ примера использования методики последовательного выделения периодических составляющих также подтверждает основной

вывод статьи. Расчеты производились в среде Математика 9.

### Литература

1. Петров Ю.П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. – С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. – С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2005.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 276 с.
4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ, 2013. – 613 с. – Электр. ресурс, URL: <http://www.nsc.ru/interval> (20.11.2013).
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир. – 1967.

**Андрюхін О.І. “Комп'ютерний аналіз властивостей рішень ряду завдань”.** У даній роботі розглядаються властивості рішень низки відомих задач зі змінними параметрами. Виконано аналіз стійкості конкретної системи управління та побудовано оцінки параметрів її областей стійкості. Показано складну будову областей значень полінома, що негативно відбивається при знаходженні його кратних коренів при варіації його коефіцієнтів. Це тягне необґрунтовані рішення щодо стійкості відповідної системи управління. Візуальний комп'ютерний аналіз класичних проблем коректності крайових задач та задачі Коші показав необхідність ретельного аналізу кожної конкретної проблеми з метою оцінки параметричної стійкості та чутливості їхніх рішень. Розглянута відома методика ідентифікації квазіперіодичної послідовності та показано її недоліки. Наведено чисельні розрахунки для розглянутих завдань.

**Ключові слова:** стійкість, комп'ютерний аналіз, система, управління, квазіперіодичні, ідентифікація.

**Andruckin A.I. “Computer analysis of the properties of solutions of some problems”.** The well-known problem of determining the stability and correctness of the solutions of tasks with variable parameters and initial values considered in the article. The objectives of the study was to analyze the properties of solutions of known problems, such as stability control solutions, stability and accuracy of the solution. These problems are connected with the problem of the calculation of multiple roots of the characteristic polynomial. Option with characteristic polynomial coefficients of variation at a multiple zero roots is especially important. Computer experiments with variation of problem parameters showed a strong change in the properties of solutions of boundary value problem and the Cauchy problem. Analysis of the stability control system is produced. Estimates of the parameters of its stability regions are constructed. Complex structure of the ranges of the polynomial in the variation of the coefficients is shown. It has a negative effect on the determination of its multiple roots and causes unreasonable decisions on the stability of the respective control system. Parametric estimation of stability and sensitivity of solutions of the boundary value problem and the Cauchy problem has been performed. Visual computer analysis of their correctness showed the need for careful analysis of each specific problem. The known method of identification of quasi-periodic sequence is considered. Her advantages and disadvantages were shown. The main conclusion of this study is the need for a thorough analysis of each specific problem to assess the parametric stability and sensitivity of the solution. This conclusion is extremely important in the design and analysis of the stability control systems. Numerical calculations are presented for the analyzed problems.

**Keywords:** stability, computer analysis, system management, quasi-periodic, identification.

Статья поступила в редакцию 25.12.2013  
Рекомендована к публикации канд. техн. наук А.В. Григорьевым