МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

Кафедра «Прикладна математика та інформатика»

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ "МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ" (ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ "ЕКОЛОГІЯ І ОХОРОНА НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА")

Горлівка – 2014

Практическая работа №1
Тема: «Основы работы с пакетом математических вичислений Mathcad»

Задания

а) Найти корни, экстремумы и асимптоты функции $f(x)$. Построить её график и анимированный график касательной.

| № | $f(x)$ | № | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{4x^2+5}{4x+8}$ | 8 | $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ |
| 2 | $\frac{4-3x^2}{4x-19}$ | 9 | $\sqrt{\frac{x^3}{2x-3}}$ |
| 3 | $\frac{1+2x^2}{x+5}$ | 10 | $\frac{(x+2)^3}{(x-4)^2}$ |
| 4 | $\frac{2-x^3+5x}{2x^2}$ | 11 | $\frac{(3x+1)^3}{(x-1)^2}$ |
| 5 | $\frac{2+x^3-5x}{1+3x^2+x}$ | 12 | $\frac{8(x-3)(x+3)^2}{(x+1)^3}$ |
| 6 | $\frac{5x^2-2-4x}{3+x^2-2x}$ | 13 | $\frac{(x-3)^3}{(x-1)^2+2}$ |
| 7 | $\frac{5x^2-6x}{1+3x^2+x}$ | 14 | $\frac{(x-3)^2(x^2+2x+3)}{(x^2-2x+3)^2}$ |

б) Изобразить график и линии уровня функции $z(x,y)$ в указанной области.

Для вариантов с 1 по 7 $z(x,y)=x^k y^m exp\left(-\frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}\right), x\in[-a;a], y\in[-a;a]$

Для вариантов с 8 по 14 $z(x,y)=x^k exp\left(-\frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}\right), x\in[-a;a], y\in[-b;b]$

| № | $k$ | $m$ | $A$ | $B$ | $a$ | № | $k$ | $A$ | $B$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 9 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 10 | 3 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 11 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 12 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 13 | 1 | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 7 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 14 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 |

## Пример выполнения

$$f(x) := \frac{9\cdot x^2 - 5\cdot x^3 + 27\cdot x - 27}{x^2 - 2\cdot x + 3}$$

$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to -5 \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - k\cdot x) \to -1$$

$$f(x) \text{ solve } \to \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3\cdot\sqrt{6}}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{3\cdot\sqrt{6}}{5} - \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

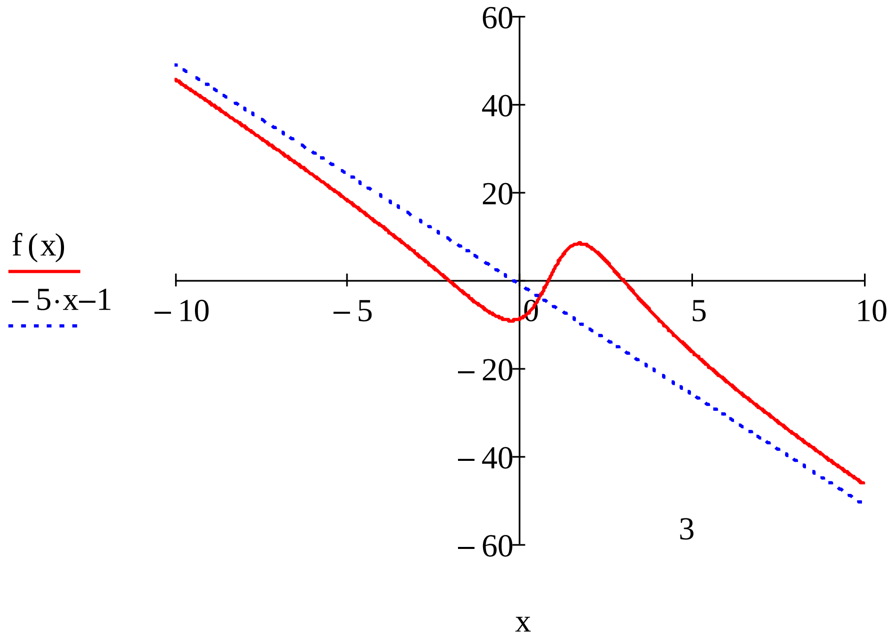
$$d(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$d(x) \text{ solve}, \text{float}, 3 \to \begin{pmatrix} 1.23 + 3.62i \\ 1.76 \\ 1.23 - 3.62i \\ -0.211 \end{pmatrix}$$

$$dd(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

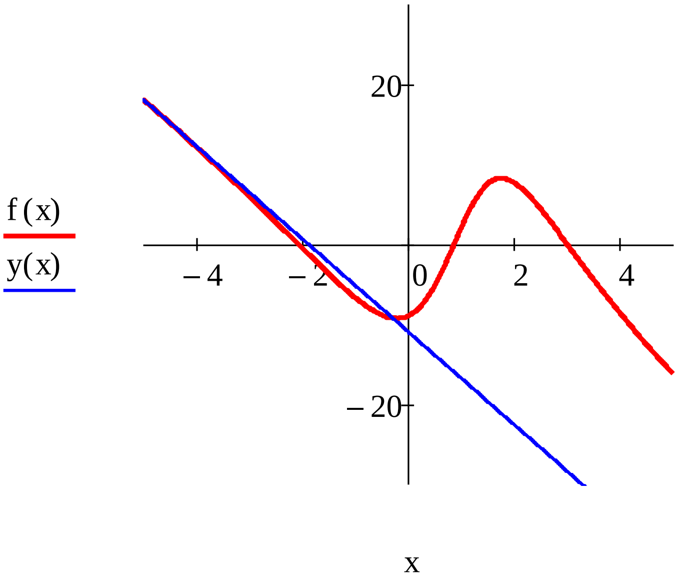
$dd(-0.211) = 12.387$ точка $x$=-0.211 - минимум

$dd(1.76) = -19.75$ точка $x$=1.76 - максимум



$$k := \frac{FRAME}{10} - 5$$

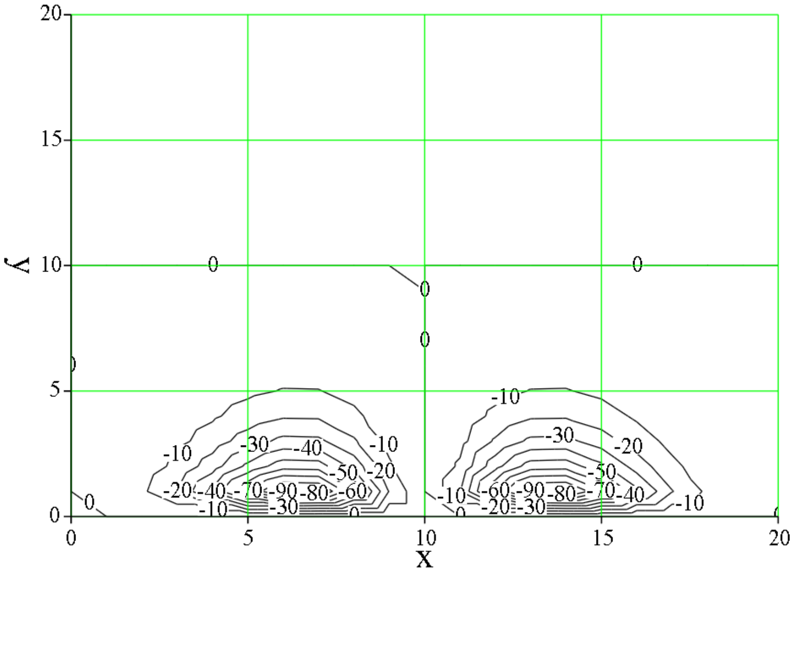
$$y(x) := d(k)\cdot(x - k) + f(k)$$




$i := 1, 2 .. 20$ $\quad j := 1, 2 .. 20$ $\quad A := 3$ $\quad B := 4$ $\quad k := 3$

$$x_i := -4 + \frac{8}{20}\cdot i \qquad y_j := -4 + \frac{8}{20}\cdot j$$

$$z_{i,j} := (x_i)^2 y_j \cdot \exp\left[\frac{-(x_i)^2}{2} - y_j\right]$$



Практическая работа №2
Тема «Модели динамики изолированной популяции»

Задания

а) Построить приближённое решение уравнения Мальтуса используя указанные способы разбиения интервала моделирования. Получить предельную зависимость численности популяции.

Таблица 2.1

| № | *T* | промежутки | | | *k* | $N_0$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 года | квартал | месяц | день | 1/3 в год | 2 | 0.05 |
| 2 | сутки | часы | часы | минуты | 1 в неделю | 3 | 0.2 |
| 3 | полгода | месяц | неделя | час | 2 в год | 5 | 0.15 |
| 4 | столетие | 10 лет | 1 год | месяц | 1 в 20 лет | 1 | 0.07 |
| 5 | неделя | день | час | минута | 3 в день | 1.5 | 0.3 |
| 6 | квартал | 10 дней | сутки | 3 часа | 0.1 в час | 3.5 | 0.002 |
| 7 | год | месяц | неделя | день | 0.5 в год | 2 | 0.001 |
| 8 | месяц | 2 дня | 8 часов | час | 2 в неделю | 5 | 0.25 |
| 9 | 100 дней | 10 дней | день | 3 часа | 1 в 100 дней | 3.5 | 0.08 |
| 10 | 3 месяца | неделя | день | час | 0.5 в месяц | 10 | 0.002 |

$T$ – интервал моделирования;
$k$ – скорость прироста;
$N_0$ – начальная численность популяции;
$\alpha$ – удельное падение рождаемости;

б) Получить решение модели Ферхюльста с заданной начальной численностью популяции. Определить наибольшую интенсивность промысла популяции.
в) Найти равновесные численности в модели с нижней критической численностью

$$\frac{dN}{dt} = \left( \beta \frac{N}{1 + N/s} - \alpha N - \delta \right) N$$
$$\beta = k; \quad \delta = 1.05k; \quad s = 10$$

Построить численное решение.

Пример выполнения

$n := 1 \qquad k := \frac{1}{2}$ прирост за месяц на одну единицу биомассы

$i := 1, 2 .. n \cdot 12 \qquad N0 := 1$

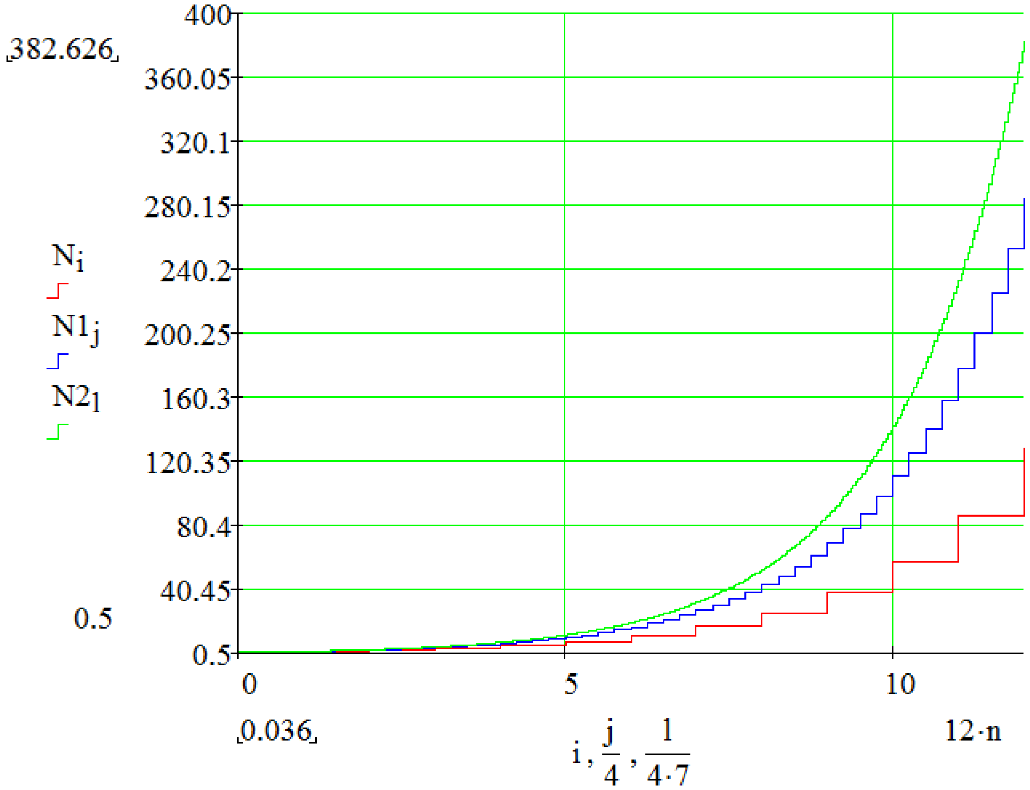
$$N_i := N0 \cdot (1 + k)^i$$

$j := 1, 2 .. n \cdot 12 \cdot 4$

$$N1_j := N0 \cdot \left(1 + \frac{k}{4}\right)^j$$

$l := 1, 2 .. n \cdot 12 \cdot 4 \cdot 7$

$$N2_l := N0 \cdot \left(1 + \frac{k}{4 \cdot 7}\right)^l$$




$k := k$

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \left(1 + k \cdot \frac{t}{n}\right)^n \right] \to e^{k \cdot t}$$

$$e^{\frac{1}{2}\cdot 12} = 403.428793$$

$$k := \frac{1}{2} \qquad \alpha := 0.1 \qquad N := N$$

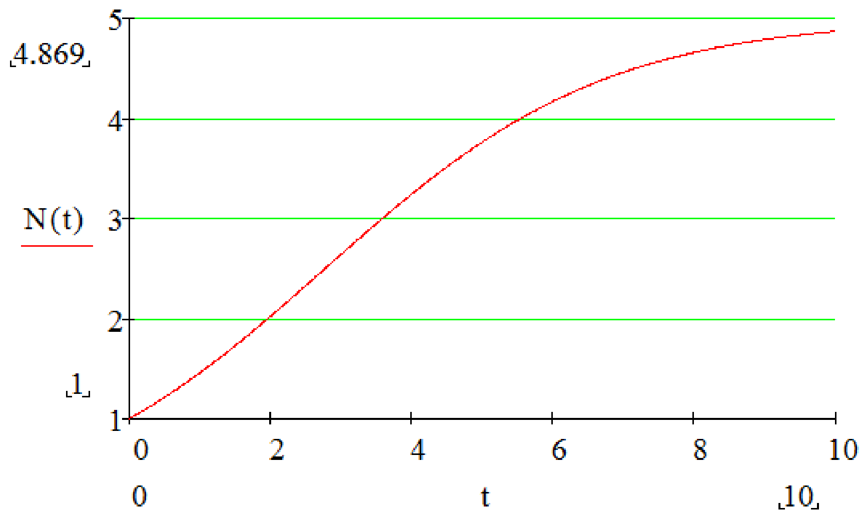
$$\int \frac{1}{N\cdot(k-\alpha\cdot N)}\,dN \rightarrow -2\cdot\ln\left(\frac{0.5}{N} - 0.1\right)$$

$$-2\cdot\ln\left(\frac{0.5}{N} - 0.1\right) = t + C \text{ solve}, N \rightarrow \frac{5.0}{10.0\cdot e^{-0.5\cdot C - 0.5\cdot t} + 1.0}$$

$$N0 = \frac{5.0}{10.0\cdot e^{-0.5\cdot C - 0.5\cdot 0} + 1.0} \text{ solve}, C \rightarrow 1.8325814637483101304$$

$$C := 1.8325814637483101304$$

$$N(t) := \frac{5.0}{10.0\cdot e^{-0.5\cdot C - 0.5\cdot t} + 1.0}$$




$$\beta := \frac{3}{4} \qquad \delta := \frac{2.5}{4} \qquad N := N \qquad \alpha := 0.45$$

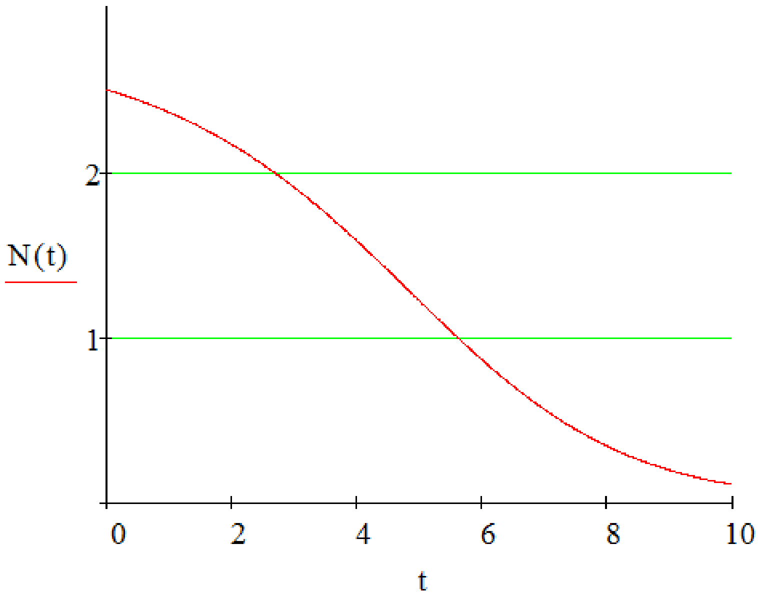
$$\beta\cdot\frac{N}{1+\frac{N}{25}} - \alpha\cdot N - \delta \text{ solve}, N \rightarrow \begin{pmatrix} 2.7777777777777777778 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

Given

$$N'(t) = N(t)\cdot\left(\beta\cdot\frac{N(t)}{1+\frac{N(t)}{25}} - \alpha\cdot N(t) - \delta\right)$$

$$N(0) = 2.5$$

$$N := \mathrm{Odesolve}(t, 100)$$



Практична робота №3
Тема: Аналіз динаміки двох популяцій

План:
**1**. Модель Лотка-Вольтерра. Численное решение системы Лотка-Вольтерра.
**2**. Обобщённая модель Лотка-Вольтерра.

## Краткие теоретические сведения

**1**. Модель Вольтерра-Лотка основана на предположениях:

- При отсутствии хищников численность жертв растёт по экспоненциальному закону;
- При отсутствии жертв хищники вымирают по экспоненциальному закону;
- При встрече хищников и жертв популяция жертв уменьшается, а хищников – увеличивается со скоростью пропорциональной частоте встреч.

$$\dot{x} = ax - bxy$$
$$\dot{y} = -cy + dxy$$

где $x(t)$ – численность первой популяции (жертв) в момент времени *t;*
$y(t)$ – численность второй популяции (хищников) в момент времени *t;*
*a* – коэффициент рождаемости жертв;
*b* – скорость выедания одной жертвы одним хищником;
*c* – коэффициент смертности хищников;
*d* – скорость увеличения биомассы одного хищника на одну жертву.

## Завдання

1. Побудувати фазовий портрет та графіки зміни чисельності популяцій, динаміка якої описується моделлю Лотка-Вольтерра.

| Варіант | Параметри моделі |
|---|---|
| 1 | *a=0.58, b=0.04, c=0.61, d=0.024* |
| 2 | *a=0.43, b=0.05, c=0.41, d=0.026* |
| 3 | *a=0.56, b=0.03, c=0.38, d=0.02* |
| 4 | *a=0.52, b=0.05, c=0.56, d=0.028* |
| 5 | *a=0.47, b=0.06, c=0.44, d=0.026* |
| 6 | *a=0.42, b=0.05, c=0.37, d=0.019* |
| 7 | *a=0.58, b=0.06, c=0.47, d=0.026* |
| 8 | *a=0.43, b=0.05, c=0.34, d=0.016* |
| 9 | *a=0.51, b=0.06, c=0.37, d=0.02* |

| | |
|---|---|
| 10 | *a=0.57, b=0.04, c=0.37, d=0.027* |
| 11 | *a=0.41, b=0.06, c=0.6, d=0.017* |
| 12 | *a=0.42, b=0.04, c=0.38, d=0.023* |
| 13 | *a=0.47, b=0.05, c=0.46, d=0.02* |

2. Побудувати фазовий портрет узагальненої моделі Лотка-Вольтера та описати динаміку популяцій в залежності від початкових умов

| Варіант | Параметри моделі |
|---|---|
| 1 | *a=3, b=1/2, c=-1, d=-1,e=1/5, f=0* |
| 2 | *a=30, b=1, c=-3, d=60,e=4, f=-3* |
| 3 | *a=30, b=-1, c=-2, d=80,e=2, f=-4* |
| 4 | *a=30, b=-1, c=-2, d=20,e=2, f=-4* |
| 5 | *a=3, b=-1/2, c=-1, d=4,e=-2, f=0* |
| 6 | *a=3, b=-1/4, c=-1, d=-2,e=1, f=0* |
| 7 | *a=7, b=-1, c=-1, d=-5,e=1, f=0* |
| 8 | *a=-2, b=-1, c=1, d=-4,e=1, f=1* |
| 9 | *a=-3, b=-1, c=1, d=-5,e=1, f=2* |
| 10 | *a=14, b=-1, c=-2, d=16,e=-1, f=-2* |
| 11 | *a=14, b=-1, c=-1/2, d=16,e=-1, f=-1/2* |
| 12 | *a=7, b=-2, c=-1, d=8,e=-2, f=-1* |
| 13 | *a=20, b=-1, c=-4, d=40,e=5, f=-4* |

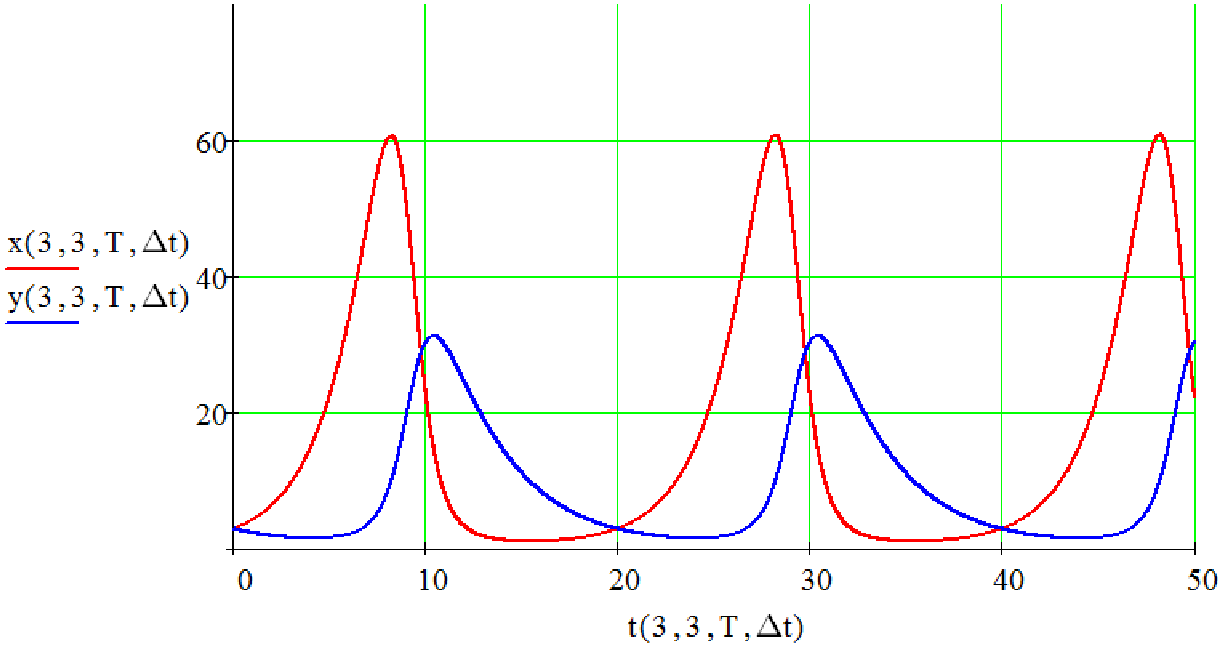
Приклад виконання

$$
s(x0, y0, T, \Delta t) := \left|
\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow x0 \\
y_0 \leftarrow y0 \\
t_0 \leftarrow 0 \\
n \leftarrow \dfrac{T}{\Delta t} \\
\text{for } i \in 1, 2 .. n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x_i \leftarrow x_{i-1} + \left(0.5x_{i-1} - 0.05 \cdot y_{i-1} \cdot x_{i-1}\right) \cdot \Delta t \\
y_i \leftarrow y_{i-1} + \left(-0.3y_{i-1} + 0.02 \cdot y_{i-1} \cdot x_{i-1}\right) \cdot \Delta t \\
t_i \leftarrow \Delta t \cdot i
\end{array}
\right. \\
(t \;\; x \;\; y)
\end{array}
\right.
$$

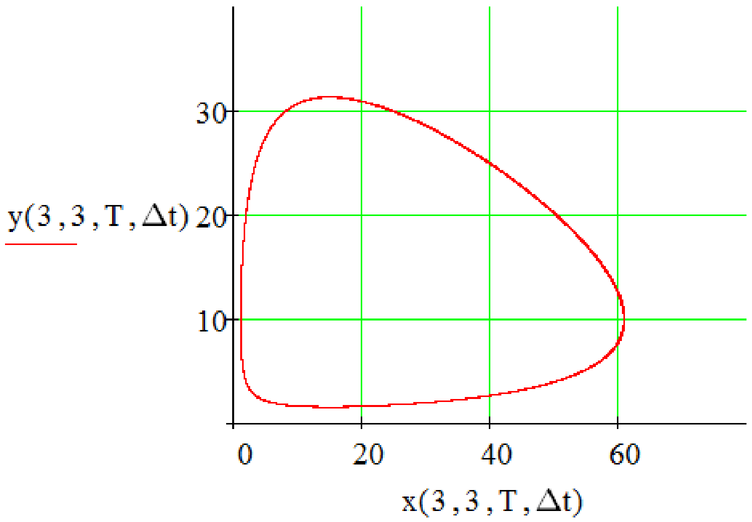
$$x(x0,y0,T,\Delta t) := s(x0,y0,T,\Delta t)_{0,1} \qquad y(x0,y0,T,\Delta t) := s(x0,y0,T,\Delta t)_{0,2}$$

$$t(x0,y0,T,\Delta t) := s(x0,y0,T,\Delta t)_{0,0}$$

$$T := 50 \qquad \Delta t := 0.001$$




Фазовый портрет системы Лотка-Вольтерра

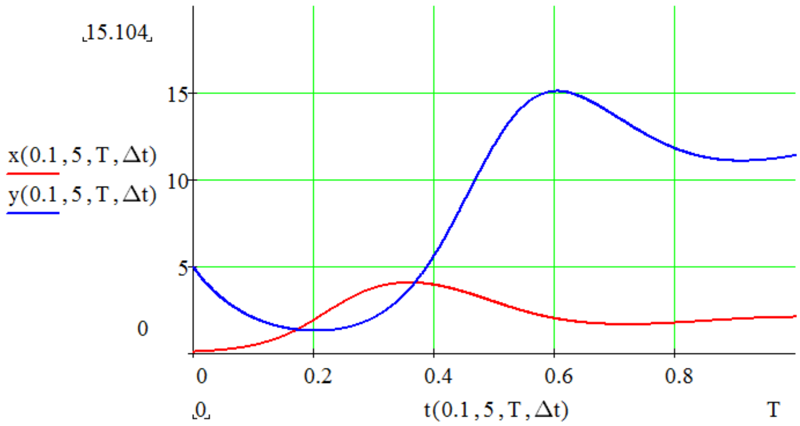


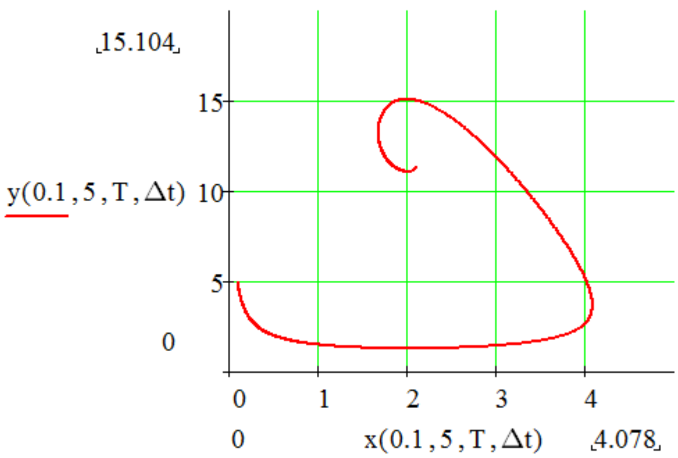
$$
s(x0, y0, T, \Delta t) := \left|
\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow x0 \\
y_0 \leftarrow y0 \\
t_0 \leftarrow 0 \\
n \leftarrow \dfrac{T}{\Delta t} \\
\text{for } i \in 1, 2 .. n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x_i \leftarrow x_{i-1} + \left[20 x_{i-1} - y_{i-1} \cdot x_{i-1} - 4 \cdot \left(x_{i-1}\right)^2\right] \cdot \Delta t \\
y_i \leftarrow y_{i-1} + \left(-10 y_{i-1} + 5 \cdot y_{i-1} \cdot x_{i-1}\right) \cdot \Delta t \\
t_i \leftarrow \Delta t \cdot i
\end{array}
\right. \\
(t \;\; x \;\; y)
\end{array}
\right.
$$

$$x(x0, y0, T, \Delta t) := s(x0, y0, T, \Delta t)_{0,1} \qquad y(x0, y0, T, \Delta t) := s(x0, y0, T, \Delta t)_{0,2}$$

$$t(x0, y0, T, \Delta t) := s(x0, y0, T, \Delta t)_{0,0}$$

$$T := 1 \qquad \Delta t := 0.001$$



Практичне заняття №4

Тема: «Метод найменших квадратів у задачах динаміки популяцій»

План:

1. Метод найменших квадратів.
2. Припущення, покладені в основу парної лінійної моделі.
3. Властивості оцінок МНК.
4. Основні типи моделей динаміки ізольованої популяції
5. Прогнозування.

1. Метод найменших квадратів – один зі статистичних методів що дозволяє досліджувати залежність деякої функції Y від змінних $X_1$, $X_2$,..X використовуючи дані спостережень змінних і функції. У багатьох економічних системах функція Y часто залежить лінійним образом тільки від однієї змінної:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i$$

Однак у дійсності спостережувані значення функції рівні:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + u_i$$

Поява $u_i$ викликана в основному такими причинами:

1. Функція у насправді може залежати від декількох змінних.
2. Можлива помилкова структура моделі (тобто залежність може бути нелінійною).
3. Помилками вимірювання.

Завдання полягає в тім, щоб на основі n пар значень ($x_i$, $y_i$) одержати уявлення про невідомі параметри регресії $a_0$ й $a_1$. Відповідно до методу найменших квадратів (МНК) оцінками цих параметрів беруться такі числа $\hat{a}_0$ й $\hat{a}_1$, які мінімізують цільову функцію:

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

де $e_i$ – відхилення експериментальних даних від регресійної прямої;
$\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i$ - оцінені значення $a_0 + a_1 x_i$.

Рішенням цієї задачі є

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1 \cdot \overline{x}$$

**2.** Для перевірки статистичних гіпотез про параметри моделі необхідно зробити припущення щодо того, що вносить імовірнісний характер у залежність – випадкових величинах $u_i$. По перше, ці величини очевидно складаються з великої кількості випадкових величин, кожна з яких набагато меньше по абсолютній величині в порівнянні з $a_0 + a_1 x_i$ - зміною значення функції обумовленою зміною змінної. У зв'язку із цим і опираючись на центральну граничну теорему можна припустити, що:

I. **Величини $u_i$ мають нормальний закон розподілу**.

Багато які з випадкових величин, що входять в $u_i$ можуть діяти в протилежних напрямках, тому середнє значення їхньої суми дорівнює нулю або точніше:

II. **Математичне очікування випадкових впливів дорівнює нулю**.

$$E(u_i) = 0$$

Значення $u_i$ у різні моменти часу і не залежать друг від друга. З курсу математичної статистики відомо, що необхідною й достатньою умовою незалежності нормально - розподілених величин є рівність нулю їх коваріації:

III. $$\operatorname{cov}(u_i u_j) = E((u_i - E(u_i))(u_j - E(u_j))) = E(u_i u_j) = \begin{cases} 0; i \neq j \\ \sigma_u^2, i = j \end{cases}$$

**3.** Використовуючи перераховані вище припущення, одержують кілька важливих результатів про характеристики оцінок МНК. В – перші оцінки МНК є **лінійними функціями** спостережуваних значень $Y_i$:

$$\hat{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i$$

$$\hat{a}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

Де $c_i$, $\omega_i$ - постійні величини.

Величини $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$ є також лінійними функціями від випадкових збурювань $u_i$, а тому самі є випадковими, тобто міняються від вибірці до вибірки. Як і будь-які випадкові величини, вони мають свій закон розподілу, своє маточикування і свою дисперсію. Із припущень лінійної моделі випливає, що обидві оцінкирозподілені за нормальним законом з параметрами:

$$E(\hat{a}_1) = a_1$$
$$E(\hat{a}_0) = a_0$$
$$D(\hat{a}_1) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$
$$D(\hat{a}_0) = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Перші дві рівності означають, що оцінки $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$ є **незміщеними**. Якість всіх оцінок крім несмещённости характеризує також їхній розкид щодо оцінюваного параметра. Оцінка вважається тим ефективною, чим менше маточикування квадрата її відхилення щодо оцінюваної величини. Відповідно до теореми Маркова – Гаусса оцінки МНК є **найбільш ефективними** в класі всіх лінійних незміщених оцінок, тобто мають найменшу дисперсію.

**4.** Найбільш типові моделі біологічних популяцій перелічені в таблиці 1.1

Таблиця 1.1 – Типи моделей динаміки популяцій

| Модель | Залежністьчисельності від часу |
|---|---|
| Експоненційна $\dot{N} = kN$ | $N = N_0 e^{kt}$ |
| Модель Ферхюльста $\dot{N} = kN(M - N)$ | $N = \dfrac{N_0 M}{N_0 + e^{-kMt}(M - N_0)}$ |
| Модель вибуху $\dot{N} = kN^2$ | $N = -\dfrac{N_0}{ktN_0 - 1}$ |
| Модель сезонних коливань $\dot{N} = kN\cos(t)$ | $N = N_0 e^{k\sin(t)}$ |

Оцінення параметрів цих моделей за допомогою метода найменших квадратів потребує приведення їх к лінійному вигляду. Для цього користуються формулами перетворення наведеними у таблиці 1.2

Таблиця 1.2 – Приведення моделей до лінійного вигляду

| Модель | Перетворення змінних | Вираження параметрів вихідної моделі через параметри лінійної моделі |
|---|---|---|
| Еспоненційна | $y_i = \ln(N_i),\ x_i = t_i$ | $N0 = \exp(a_0), k = a_1$ |

| | | |
|---|---|---|
| Модель Ферхюльста | $y_i = \ln(N_{i+1}) - \ln(N_i),\ x_i = N_i$ | $k = -a_1,\ M = -\frac{a_0}{a_1}$ |
| Модель вибуху | $y_i = -\frac{1}{N_i},\ x_i = t_i$ | $k = a_1, N0 = -\frac{1}{a_0}$ |
| Модель сезонних коливань | $y_i = \ln(N_i),\ x_i = \sin(t_i)$ | $k = a_1, N0 = \exp(a_0)$ |

**5.** Для перевірки статистичних гіпотез необхідно спочатку одержати з наявних випадкових величин стандартні затабульовані величини.
Відомо, що величини:

$$t = \frac{(\hat{a}_0 - a_0)\sqrt{n \cdot \sum (X_i - \bar{X})^2}}{\hat{\sigma}_u \sqrt{\sum X_i^2}}$$

$$t = \frac{(\hat{a}_1 - a_1)\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}{\hat{\sigma}_u}$$

мають розподіл Стьюдента із числом ступенів вільності n-k, де n – кількість спостережень, а k – кількість оцінюваних параметрів (у випадку парної регресії їх 2). $\hat{\sigma}_u$ - незміщена оцінка дисперсії випадкових збурювань u:

$$\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k}}$$

Для перевірки гіпотез про значення параметрів необхідно підставити ті значення, що перевіряються, у відповідну формулу. Якщо виконується нерівність:

$$t \le t_\varepsilon$$

де $t_\varepsilon$ - критичне значення, то гіпотеза приймається на відповідному рівні значущості. Довірчі інтервали для параметрів регресії визначаються нерівностями:

$$\hat{a}_0 + t_{кр} \cdot \frac{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\sum X_i^2}}{\sqrt{n\sum (X_i - \bar{X})^2}} \ge a_0 \ge \hat{a}_0 - t_{кр} \cdot \frac{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\sum X_i^2}}{\sqrt{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{a}_1 + t_{кр} \cdot \frac{\hat{\sigma}_u}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \geq a_1 \geq \hat{a}_1 - t_{кр} \cdot \frac{\hat{\sigma}_u}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

**7.** Одне із застосувань регресійного аналізу полягає в тому, що він дозволяє прогнозувати невідомі значення функції при довільних значеннях аргументу. Існує два типи прогнозів:

1) **Точковий прогноз** – являє собою оцінку значення функції при деякому значенні змінної:

$$\hat{Y}_{пр} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_{пр}$$

2) **Інтервальний прогноз** – довірчий інтервал для значення функції при деякому значенні змінної. Відомо, що випадкова величина

$$t = \frac{\hat{Y}_{пр} - Y_{пр}}{\hat{\sigma}_u \sqrt{1/n + \frac{\left(X_{пр} - \bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}}} \qquad (1.1)$$

має розподіл Стьюдента з *n-k* ступенями вільності, тому з довірчою ймовірністю прогнозне значення функції  буде знаходитися в інтервалі:

$$\hat{Y}_{пр} \pm t_{\varepsilon/2} \hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}$$

де $t_{\varepsilon/2}$ - критичне значення розподілу Стьюдента при *n-k* ступенях вільності й $\varepsilon/2$ рівні значущості. Ці статистики можуть бути використані для обчислення ймовірності потрапляння прогнозного значення функції у будь-який інтервал. Для цього розраховують граничні значення *t* та по таблицям Стьюдента знаходять ймовірність потрапляння *t* у даний інтервал.

Варіанти завдань

Завдання: для кожного варіанта
а) Оцінити параметри моделі
б) Побудувати *p*% довірчі інтервали параметрів моделі
в) Виконати додаткове завдання.

Варіант 1

$t = (2 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 15 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 24 \quad 30 \quad 32 \quad 34 \quad 35 \quad 37)$

$N = (25 \quad 28 \quad 28 \quad 30 \quad 31 \quad 31 \quad 34 \quad 34 \quad 34 \quad 37 \quad 39 \quad 41 \quad 42 \quad 41 \quad 44)$

Тип залежності: експоненційна

Завдання: Обчислити ймовірність того, що к моменту $t$=20 чисельність популяції перевищить 30 одиниць.

Довірча ймовірність $p$=0.9

Варіант 2

$t = (1 \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad 10 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30)$

$N = (21 \quad 47 \quad 15 \quad 64 \quad 41 \quad 108 \quad 100 \quad 94 \quad 162 \quad 177 \quad 221 \quad 531 \quad 684 \quad 757 \quad 763)$

Тип залежності: експоненційна

Завдання: Обчислити ймовірність того, що к моменту $t$=30 чисельність популяції перевищить 500 одиниць.

Довірча ймовірність $p$=0.95

Варіант 3

$t = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 24 \quad 29 \quad 30 \quad 33 \quad 42 \quad 44 \quad 45)$

$N = (20 \quad 20 \quad 21 \quad 21 \quad 21 \quad 22 \quad 23 \quad 23 \quad 26 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 31 \quad 31 \quad 32)$

Тип залежності: експоненційна

Завдання: Обчислити ймовірність того, що к моменту $t$=15 чисельність популяції не перевищить 400 одиниць.

Довірча ймовірність $p$=0.99

Варіант 4

$t = (1 \quad 2 \quad 10 \quad 17 \quad 18 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 22 \quad 30 \quad 30 \quad 30 \quad 31 \quad 34 \quad 36)$

$N = (36 \quad 21 \quad 25 \quad 91 \quad 48 \quad 79 \quad 105 \quad 93 \quad 64 \quad 138 \quad 134 \quad 137 \quad 157 \quad 139 \quad 135)$

Тип залежності: модель Ферхюльста

Завдання: За який проміжок часу чисельність дорівнюватиме 90% максимальної, якщо початкова чисельність дорівнює 10.

Довірча ймовірність $p$=0.91

Варіант 5

$t = (6 \quad 23 \quad 26 \quad 28 \quad 30 \quad 34 \quad 39 \quad 42 \quad 44 \quad 49 \quad 52 \quad 53 \quad 56 \quad 57 \quad 62)$

$N = (41 \quad 157 \quad 147 \quad 156 \quad 146 \quad 218 \quad 210 \quad 278 \quad 283 \quad 309 \quad 277 \quad 276 \quad 320 \quad 357 \quad 341)$

Тип залежності: модель Ферхюльста

Завдання: За який проміжок часу чисельність дорівнюватиме 80% максимальної, якщо початкова чисельність дорівнює 5.
Довірча ймовірність *p*=0.85

Варіант 6
$t = (4 \quad 16 \quad 20 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 31 \quad 38 \quad 43 \quad 50 \quad 52 \quad 58 \quad 61 \quad 65 \quad 69)$
$N = (179 \quad 250 \quad 261 \quad 342 \quad 318 \quad 332 \quad 336 \quad 314 \quad 390 \quad 402 \quad 410 \quad 428 \quad 424 \quad 480 \quad 449)$

Тип залежності: модель Ферхюльста
Завдання: За який проміжок часу чисельність дорівнюватиме 70% максимальної, якщо початкова чисельність дорівнює 200.
Довірча ймовірність *p*=0.89

Варіант 7
$t = (2 \quad 6 \quad 27 \quad 44 \quad 50 \quad 60 \quad 61 \quad 62 \quad 71 \quad 76 \quad 87 \quad 89 \quad 90 \quad 91 \quad 92)$
$N = (7 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 10 \quad 6 \quad 11 \quad 16 \quad 21 \quad 26 \quad 22 \quad 21)$
Залежність: модель вибуху.
Завдання: Визначити, у який момент часу станеться вибух
Довірча ймовірність *p*=0.90

Варіант 8
$t = (2 \quad 20 \quad 34 \quad 54 \quad 57 \quad 62 \quad 63 \quad 67 \quad 72 \quad 77 \quad 78 \quad 79 \quad 85 \quad 87 \quad 89)$
$N = (4 \quad 10 \quad 3 \quad 11 \quad 20 \quad 13 \quad 12 \quad 11 \quad 10 \quad 13 \quad 26 \quad 27 \quad 33 \quad 37 \quad 45)$
Залежність: модель вибуху.
Завдання: Визначити, у який момент часу станеться вибух
Довірча ймовірність *p*=0.92

Варіант 9
$t = (3 \quad 7 \quad 10 \quad 11 \quad 41 \quad 47 \quad 56 \quad 72 \quad 79 \quad 85 \quad 92 \quad 111 \quad 116 \quad 120 \quad 150)$
$N = (11 \quad 16 \quad 16 \quad 10 \quad 12 \quad 16 \quad 11 \quad 18 \quad 16 \quad 16 \quad 23 \quad 22 \quad 19 \quad 24 \quad 40)$
Залежність: модель вибуху.
Завдання: Визначити, у який момент часу станеться вибух
Довірча ймовірність *p*=0.95

Варіант 10
$t = (3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 17 \quad 18 \quad 21 \quad 24 \quad 27 \quad 32 \quad 33 \quad 44 \quad 46 \quad 47 \quad 47)$
$N = (13 \quad 40 \quad 35 \quad 23 \quad 1 \quad 6 \quad 53 \quad 9 \quad 67 \quad 30 \quad 80 \quad 6 \quad 70 \quad 72 \quad 65)$
Залежність: модель сезонних коливань.
Завдання: Визначити амплітуду коливань
Довірча ймовірність *p*=0.99

Варіант 11

$t = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 24 \quad 26 \quad 27)$

$N = (201 \quad 214 \quad 18 \quad 37 \quad 23 \quad 25 \quad 42 \quad 140 \quad 56 \quad 26 \quad 14 \quad 19 \quad 37 \quad 105 \quad 273)$

Залежність: модель сезонних коливань.

Завдання: Визначити амплітуду коливань

Довірча ймовірність $p$=0.85

Варіант 12

$t = (4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 13 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 19 \quad 30 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 38 \quad 39)$

$N = (12 \quad 37 \quad 747 \quad 37 \quad 104 \quad 247 \quad 240 \quad 5 \quad 55 \quad 17 \quad 129 \quad 167 \quad 151 \quad 94 \quad 65)$

Залежність: модель сезонних коливань.

Завдання: Визначити амплітуду коливань

Довірча ймовірність $p$=0.9

Варіант 13

$t = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 14 \quad 16 \quad 17 \quad 25 \quad 26 \quad 28 \quad 33 \quad 35 \quad 39)$

$N = (499 \quad 587 \quad 719 \quad 303 \quad 41 \quad 18 \quad 980 \quad 29 \quad 3 \quad 93 \quad 399 \quad 33 \quad 1013 \quad 43 \quad 868)$

Залежність: модель сезонних коливань.

Завдання: Визначити амплітуду коливань

Довірча ймовірність $p$=0.9

## Порядок виконання роботи

Заносимо вихідні дані

Кількість спостережень $n := 10$ Кількість параметрів $k := 2$

$t := (7 \quad 5 \quad 5 \quad 11 \quad 2 \quad 10 \quad 2 \quad 17 \quad 3 \quad 18 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \quad 18 \quad 11)$

$N := (14 \quad 13 \quad 13 \quad 10 \quad 15 \quad 10 \quad 19 \quad 5 \quad 15 \quad 1 \quad 20 \quad 13 \quad 12 \quad 3 \quad 10)$

$t := t^T$ $N := N^T$ Номер спостереження $i := 0, 1 .. 9$

Довірча імовірність $p := 0.95$ Рівень значущості $\varepsilon := 1 - p$

За таблицею 1.2 приводимо модель до лінійного вигляду

$y_i := \ln(N_i)$ $x_i := t_i$

Оцінюємо параметри лінійної моделі

Оцінка коефіцієнта нахилу $a_1 := \dfrac{\sum_i [(x_i - mean(x))\cdot(y_i - mean(y))]}{\sum_i (x_i - mean(x))^2}$

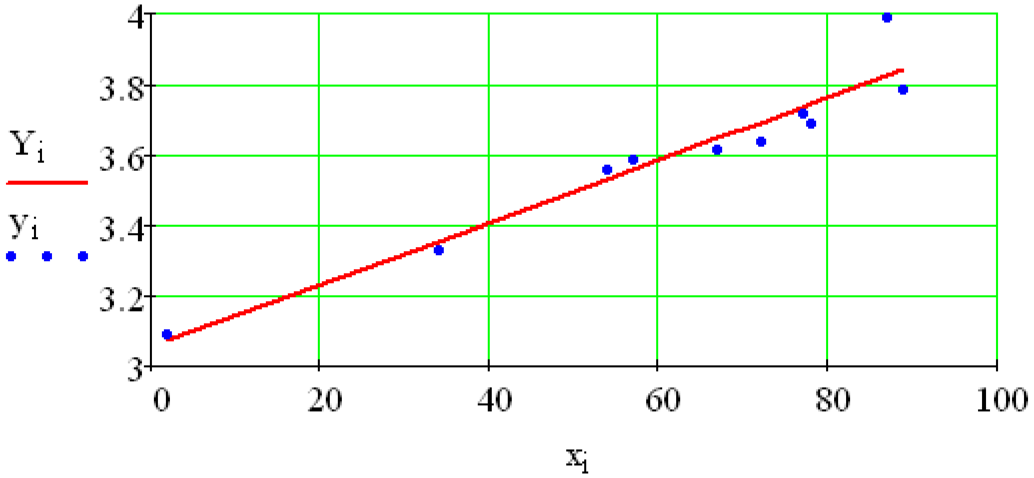
Оцінка вільного члену $a_0 := mean(y) - a_1 \cdot mean(x)$

Оцінюємо параметри нелінійної моделі

$N0 := \exp(a_0) \qquad k := a_1$

$N0 = 21.21 \qquad k = 0.009$

Оцінені значення функції $Y_i := a_0 + a_1 \cdot x_i$




Помилки регресії $e := y - Y$

Перевірка $\sum_i e_i = 0.000$

$\sum_i (x_i e_i) = -0$

Оцінка середньоквадратичного відхилення $\sigma := \sqrt{\dfrac{\sum_i (e_i)^2}{n-k}}$

Критичне значення t-статистики $tkr := qt\left(p + \dfrac{\varepsilon}{2}, n-k\right) = 2.228$

Довірчі інтервали параметрів лінійної залежності

$$a_1 - tkr \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_i \left(x_i - \mathrm{mean}(x)\right)^2}} = 0.007$$

$$a_1 + tkr \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_i \left(x_i - \mathrm{mean}(x)\right)^2}} = 0.011$$

$$a_0 - tkr \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\sum_i \left(x_i\right)^2}}{\sqrt{n \cdot \left[\sum_i \left(x_i - \mathrm{mean}(x)\right)^2\right]}} = 2.937$$

$$a_0 + tkr \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\sum_i \left(x_i\right)^2}}{\sqrt{n \cdot \left[\sum_i \left(x_i - \mathrm{mean}(x)\right)^2\right]}} = 3.172$$

За таблицею 1.2 визначаємо довірчі інтервали параметрів нелінійної залежності

$$\exp(2.937) = 18.859 < N_0 < \exp(3.172) = 23.855$$

$$0.007 < k < 0.011$$

Для знаходження імовірності потрапляння значення функції у деякий інтервал користуються формулою (1.1) і таблицею 1.2. Наприклад, знайдемо імовірність того, що к моменту часу *t*=60 чисельність перевищить 35.

$$N\text{пр} := a_0 + a_1 \cdot 60$$

$$\frac{N\text{пр} - \ln(35)}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(60 - \mathrm{mean}(x))^2}{\sum_i \left(x_i - \mathrm{mean}(x)\right)^2}}} = 1.405$$

$$\mathrm{pt}(1.405, n - k) = 0.905$$