ЗМІСТ

ВСТУП

Для багатьох технічних та економічних систем важливим є їх дискретність та функціональність в часі та просторі. Склад та структура таких систем представляють дискретну модель, для опису якої застосовується апарат *дискретної математики(ДМ).*
Основними носіями дискретного аналізу є множина елементів, структуру якої формують відношення між її елементами.

Підвищенню рівня математичної підготовки студентів вузів, що спеціалізуються в області комп'ютерних систем і мереж, традиційно приділяється велика увага. Особливе значення в цьому плані має вивчення сучасних розділів математики, таких, як теорія множин, булева алгебра, теорія графів і автоматів, що є математичною основою для цілого ряду спеціальних дисциплін кібернетичного циклу. Ці розділи принято відносити до дискретної математики, яка є базою кібернетики.

В розділі №1 "*Елементи теорії множин*" – вводяться основні поняття множини, визначаються основні властивості, які пояснюють та обґрунтовують, основні операції алгебри множин.

В розділі №2 "*Елементи комбінаторики* " – сформульовані основні поняття про упорядковані та неупорядковані вибірки елементів множини, визначені основні правила, процедури та операції для формування комбінаторних об'єктів та оцінки їх кількості.

В результаті вивчення цієї дисципліни студент повинен ***мати уяву***:

- про предмет, завдання дисципліни "Дискретна математика";
- про основні напрямки розвитку дискретної математики;
- про необхідність використання дискретної математики в професійній діяльності;

<u>знати основні поняття :</u>

- математичної логіки;
- теорії множин;
- теорії графів;
- комбінаторики;

<u>вміти</u>

- застосовувати отримані знання на практиці.

РОЗДІЛ 1.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Зміст

<u>Мета:</u> навчитися виконувати основні операції над множинами: об'єднання, перетин, доповнення; навчитися ілюструвати операції над множинами за допомогою діаграм Ейлера-Вена.

<u>Вимоги до знань і вмінь</u>

В результаті вивчення теми студент повинен

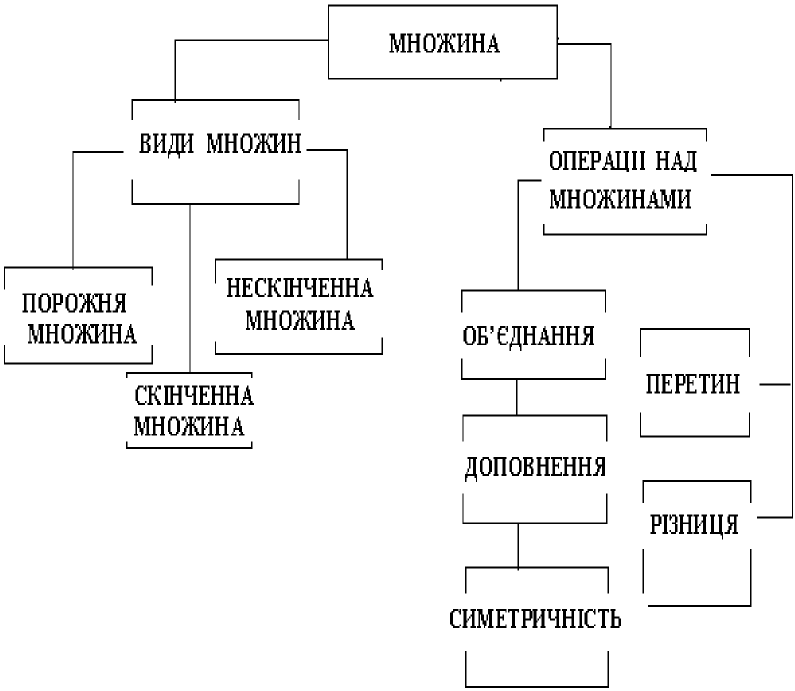
<u>знати:</u>

- основні поняття теорії множин;
- способи представлення множин;
- основні операцій над множинами;
- властивості операцій над множинами;

<u>вміти:</u>

- будувати діаграми Ейлера – Венна для заданої рівності;
- виконувати основні операції над множинами;

Структурна схема термінів



ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основні поняття теорії множин

Теорія множин, створена німецьким математиком Г. Кантором. Ця теорія великою мірою обумовила сучасну структуру математики. Поняття "*множини*"- одне з первісних (невизначених) понять математики. Пояснити цей термін можна, як сукупність, колекція, набирання деяких об'єктів будь-якої природи, об'єднаних за якимись, відповідними для них ознаками. Для позначення множини, Кантор зокрема, використовував букву М (скорочення німецького слова *Menge* - множина).
Об‘єкти, що утворюють множину, будемо називати її *елементами.*

Наприклад 1.1
f,a,c,n – елементи множини літер латинського алфавіту; *1,4*-елементи множини цифр; *2,4,6,8,10,...,* - елементи множини парних додатних чисел; *-5,-10,-15,...,* - елементи множини цілих від’ємних чисел, що діляться на *5*.
Для позначення множин використовують великі літери латинського алфавіту: *A,B,C, ..., X,Y,Z, а* її елементи - малими буквами *a,b,c, ..., x,y,z.*
Для позначення множин зазвичай використовують фігурні дужки *{ }.* Так, *запис B={3;4;5;6} - означає, що множина B складається з елементів 3,4,5,6.*

Для позначення належності елемента m множині M використовується запис $m \in M$, де знак $\in$ - є першою літерою грецького слова *εστί* (є, бути), в іншому випадку - $m \notin M$.

Приклад 1.2
A={2;4;6;8} задана множина, тоді $4 \in A$, $7 \notin A$, $-8 \notin A$, $2 \in A$.

Множина, яка містить скінчену кількість елементів, називається *скінченою*, в іншому випадку-*нескінченою*.

Приклад 1.3
A={a,c,k,l}-скінченна множина*, C={x:x- додатне число}- н*ескінченна множина.

З метою зручності та одностайності при проведенні математичних викладок вводиться поняття множини, яка не містить жодного елемента. Така множина називається *порожньою* множиною і позначається $\varnothing$. Наприклад, якщо досліджується множина об’єктів, які повинні задовольняти певній властивості, і в подальшому з'ясовується, що таких об'єктів не існує, то зручніше сказати, що шукана множина порожня, ніж оголосити її неіснуючою. Порожню множину можна позначати за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад: $\varnothing=\{x|x\neq x\}$ тощо.

Зауваження 1.1.
Множина $\{\varnothing\}$ не є *порожньою,* тобто $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, ця множина є одноелементною, єдиним її елементом є порожня множина.

Кожна множина може мати *підмножину*.

Означення 1.1
Якщо кожен елемент множини C належить множині D, то множина C називається *підмножиною* множини D і позначається :

$$C \subseteq D (D \supseteq C)\text{ , де } \subseteq \text{ - знак включення.}$$

<u>*Зазначимо різницю між відношенням належності*</u> $\in$ <u>*та відношенням включення(*$\subseteq$*).*</u>

Слід чітко розуміти цю різницю між знаками $\in$ і $\subseteq$ і не плутати ситуації їхнього вживання. Якщо $\{a\}\subseteq M$, то $a\in M$, і навпаки. Однак із включення $\{a\}\subseteq M$, взагалі кажучи, не випливає $\{a\}\in M$. Для будь-якого об'єкта x виконується $x\notin\varnothing$.

Наприклад, для множини $D=\{\{x,y\}|x\in\{a,b,c\},\ y\in\{a,b,c\}$ і $x\neq y\}$ і її елементів виконуються наступні співвідношення:

$$\{a,b\}\in D,\ \{\{a,b\},\{b,c\}\}\subseteq D,\ a\in\{a,b\},\ \{c\}\notin\{a,c\},\ \{a\}\subseteq\{a,b\}.$$

Множина може бути своєю підмножиною$(A\subseteq A)$, але не може бути складовою частиною своїх елементів $(A\notin A)$.

Зауваження 1.2
Відношення включення транзитивне, а у відношенні належності такої властивості немає.

Приклад 1.4
Множина $A=\{\{a\};\{b;c\};\{d\}\}$, в числі елементів вміщує множину $\{b;c\}$, тому $b,\ c\ \in\{b,c\}$ *і* $\{b,c\}\in A$. З цього не слідує, що елементи $b,\ c$ належать A, тобто $b,c\ \notin A$.

Якщо, $A\subseteq B$ *і* $A\neq B$, то A називають *власною підмножиною* і позначають $A\subset B$, де $\subset$ - знак строгого включення.

Властивості операції включення

1.Рефлексивність: $A \subseteq A$

2.Принцип об`ємності: $A \subseteq B$ і $B \subseteq A \Rightarrow B{=}A$ (на основі цього принципу і доводиться рівність двох множин).

3. Транзитивність: $A \subseteq B$ *і* $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини *А*, тобто $\varnothing \subseteq A$ (зокрема, $\varnothing \subseteq \varnothing$).

Рівність множин

Означення 1.2

Дві множини є *рівні* тоді і лише тоді, коли вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто є підмножинами одна одної.

$(A = B) : \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$,

де $\forall$ – квантор загальності ($\forall$ *x* –читається "для кожного *x*").

Це означає, що для довільного об’єкту х співвідношення $x \in A$ та $x \in B$ рівносильні.

Приклад 1.5

Розглянемо дві множини *A={1;2;3}* та *B={3;1;2}* - ці множини рівні, оскільки рівні їхні елементи, позначається *A=B* (порядок написання єлементів не має значення).

Приклад 1.6

Множини *A{{1,2}}, B{1,2},* не є рівними оскільки множина *A* - є одноелементною, що має своїм єдиним елементом, елемент *{1,2},* а множина *B* має своїми елементами *1* та *2*.

Універсум

Для кожної множини *M* існує множина, елементами якої є усі її підмножини, така множина позначається *P(I)* і називається *булеаном (множиною-степенем)*, а множина *I-універсумом* (універсальною множиною), для цілих чисел - нескінченність

Означення 1.3

Універсальна множина I - це множина, яка створена всіма елементами будь-якого визначеного типу.

Приклад 1.7
Задано множину *A={1;3;4;8}.*
P(A)={{ ∅ };{1};{3};{8};{1;4};{1;3};{1;8};{3;4};{3;8};{4;8};{1;3;4};{1;3; 8};{3;4;8}; {1;4;8};{1;3;4;8}}. A=I-універсум.

У загальному випадку, якщо множина вміщує *n* елементів, то множина всіх її підмножин *P(A)* складається з 2^n елементів.

Потужність множини

Для скінченних множин введемо поняття *потужності*.

Означення 1.4
Потужність множини *A* – це кількість її елементів, позначається

$|A|$ або *n(A).*

Для довільних скінченних множин *A* та *B* справедлива рівність:
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$, якщо множини *A* та *B* перетинаються ,
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$, якщо множини не перетинаються.
Потужності множин можна порівнювати, при цьому можливі три випадки:

1. $|A| = |B|$, якщо *A* та *B* рівнопотужні;
2. $|A| > |B|$, якщо *A* більш потужна ніж *B,* тобто *A* містить власну підмножину, рівнопотужну *B,* але *A* та *B* рівнопотужні;
3. $|A| < |B|$, якщо *B* потужніша за *A,* то в цьому випадку *B* містить власну підмножину, рівнопотужну *A,*але *A* та *B* не рівнопотужні.

Приклад 1.8
На рис. 1.1 зображено множини A та B. Числа відповідають елементам, що знаходяться у відповідній частині множини.

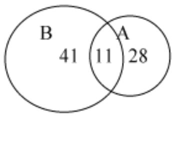


Рисунок 1.1

З рисунку 1.1 можна знайти кількість елементів у множині A, кількість елементів у множині B, та кількість елементів в їхньому *об'єднанні:*
$n(A)=28+11=39$, $n(B)=41+11=52$,
$n(A \cup B) = 28+11+41 = 80.$

Зверніть увагу на те, що: $n(A)+n(B)=39+52=91$ *і* $n(A)+n(B)\neq n(A\cup B)$. Для цих множин ми одержали нерівність. Чи існують такі множини *A* і *B*, щоб для них виконувалась рівність $n(A)+n(B)=n(A\cup B)$?
Так, це можливо, коли множини *A* і *B* не мають спільних елементів.

Приклад 1.9
Нехай маємо дві множини $A=\{3;5;7;8;10\}$, $B=\{-2;-1;1\}$.
Тоді $A\cup B=\{-2;-1;1;3;5;7;8;10\}$, $n(A)=5$, $n(B)=3$,
$n(A\cup B)=8$ *і* $n(A)+n(B)=3+5=8$.
Отже, рівність $n(A)+n(B)=n(A\cup B)$ виконується.

Розглянемо тепер іншу задачу. Нехай треба визначити кількість елементів у об'єднанні двох множин *A* і *B*, якщо множина *A* містить *10* елементів, а множина *B* - 6 елементів. Однозначно вирішити це питання неможливо. Кількість елементів у об'єднанні цих множин буде залежати від того, чи мають множини *A* і *B* спільні елементи, і яка їх кількість. Якщо відомо, що множини А і В спільних елементів не мають, тоді $n(A\cup B)=n(A)+n(B)=16$. Якщо ж відомо, що множини *A* і *B* мають, наприклад, 4 спільних елементи, то кількість елементів у їх об'єднанні дорівнює $10+6-4=12$. Це обумовлено тим, що при додаванні кількості елементів множини *A* і кількості елементів множини *B* кількість їх спільних елементів ураховано двічі.

1.2 Способи подання множин

Використовується декілька способів завдання множин. Розглянемо деякі з них.

1.*Вербальний(словесний),* тобто шляхом опису характеристичних властивостей, якими повинні володіти елементи множин.

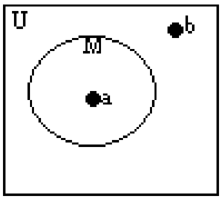
2.*Задання списком(перерахуванням)* усіх її елементів.
$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $У=\{1,2,b,c\}$, $C=\{a_i\}_1^3$

3.*Описом обмеженої властивості*-характеристичними предикатами. Задається у вигляді:
$\{x|p(x)\}$ або $\{x:p(x)\}$, де $p(x)$ - приймає істинні значення для елементів множини.
Символ *"|"* - читається *"таке що"*.
$N=\{n|n\in Z \text{ і } n>0\}$, $M=\{m\in M|m=n^2 \text{ і } n\in N\}$

1.3 Подання множин за допомогою кругів Ейлера

Множини зручно задавати за допомогою *кругів Ейлера(діаграм Венна). Нагадаємо, що грецьке слово μαργαιδμα (діаграма) означає "малюнок", "фігура".* При такому поданні множин, елементи зображуються точками в середині кола, якщо вони належать цій множині ($a \in M$), і точками зовні кола, якщо вони множині не належать($b \notin M$)(рис. 1.2).

За допомогою кругыв Ейлера можно зображати власні підмножини і множини ,які не мають спільних елементів(рис.1.3 а,б).



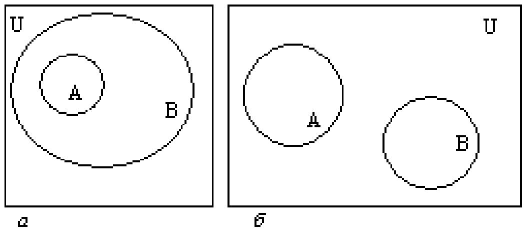


Рисунок 1.2 - Ілюстрація Кругами Ейлера.

Рисунок 1.3 - (а-множина *A* власна підмножина множини *B; б*- множини *A* і *B* не мають спільних елементів)

Діаграма Ейлера-Венна робить очевидним твердження*: якщо* $A \subset B$*,* $B \subset C$*, то* $A \subset C$ (рис. 1.4).

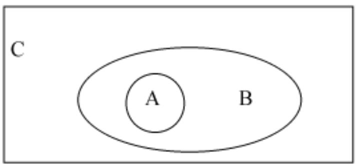
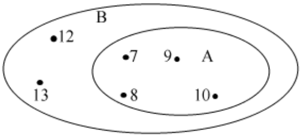


Рисунок 1.4

Приклад 1.10

а) Дано множини *A={7;8;9;10} та B={12;13;9;10;7;8}*. Подамо їх за допомогою кругів Ейлера з урахуванням співвідношення між ними Рис. 1.5

b) Подамо у вигляді діаграми співвідношення між множинами *A={0}, B={0;2;3;1}, C=±{3;±2;±1;0}* і зробимо записи за допомогою знаків включення (рис. 1. 6).



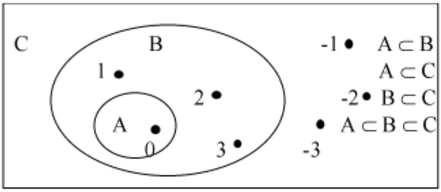


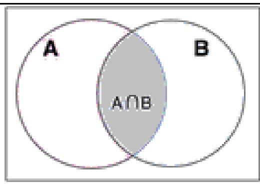
Рисунок 1.5 Рисунок 1.6

1.4 Основні операції над множинами

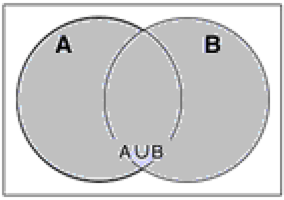
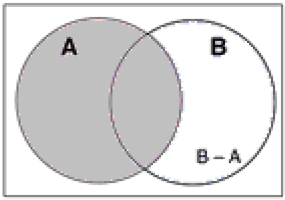
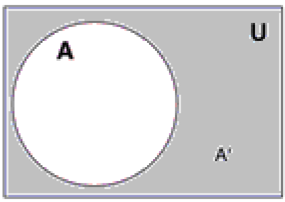
Розглянемо основну множину *I(універсум)* та її підмножини *A* та *B* .З даних множин *A* та *B* можна побудувати нові множини за допомогою наступних операцій:

-перетин множин;
-об`єднання множин;
-різниця множин (табл1.1).

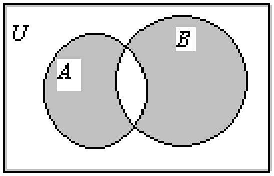
Таблиця1.1

Назва операції	Позначення	Зображення кругами Ейлера Означення	Символічний запис
1	2	3	4
Перетин множин	$A \cap B$	 Ті і лише ті елементи, які належать *одночасно A і B*.	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$
$\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$, $\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \varnothing$.			

Продовження таблиці 1.1

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Об`єднання множин</td><td>$A \cup B$</td><td>
Ті і лише ті елементи, які належать хоча б одній із множин</td><td>A ∪ B={x|x ∈ A або x ∈ B}</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.</td></tr>
<tr><td>Різниця множин</td><td>$A \setminus B = A \cap \overline{B}$</td><td>
Ті і лише ті елементи множини A, які не належать множині B.</td><td>A\B={x|x ∈ A і x ∉ B}
A\B ≠ B\A</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\{a,b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$, $\{a,c,d,e\} \setminus \{a,b,c\} = \{d,e\}$, $\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \varnothing$.</td></tr>
<tr><td>Доповнення до множини А</td><td>$\overline{A}$
A'
$\neg A$</td><td>
Ті і лише ті елементи, які не належать множині A (тобто, доповнюють її до універсальної множини).</td><td>$\overline{A} = \{x \mid x \in U$ і $x \notin A\}$
або
$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$
$\overline{A} = U \setminus A$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Якщо за універсальну множину прийняти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням $\overline{P}$ множини P всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.
U={1,3,5,51,8,10}, F={1,3,8}, F ∈ U, тоді $\overline{F}$ ={5,10,51}</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4
Симетрична різниця	$A \oplus B$ $A\Delta B$	 Ті і лише ті елементи, які належать одній із множин: *A або B*, але не є загальними елементами.	$A\Delta B=\{x\|(x\in A$ і $\notin B)$ або $(x\in B$ і $x\notin A)\}$
$\{a,b,c\}\Delta\{a,c,d,e\}=\{b,d,e\}$, $\{a,b\}\Delta\{a,b\}=\varnothing$.			

Зауваження 1.3

Використовуючи розглянуті операції, дозволяється подавати одну множину через іншу, при цьому спочатку виконується одномісна операція доповнення, а потім перетин і лише потім-операція об'єднання. Для зміни порядку виконання операцій у виразі використовують дужки.

Розглянемо на прикладах, наведені у таблиці основні операції.

Запишемо об'єднання множин в наступних прикладах і покажемо залежність між множинами за допомогою діаграм.

Приклад 1.11

1) Розглянемо множину A={1;2;3;4;5} та множину B={4;5;6;7}. Утворимо нову множину, що складається з усіх елементів даних множин. Це буде множина C={1;2;3;4;5;6;7}. Звернемо увагу, що множини A і B мають спільні елементи (4 і 5). Але за правилом запису елементів множини, кожен з них входить до множини C лише 1 раз $A\cup B=\{1;2;3;4;5;6;7\}$, або $C=A\cup B$.

Можна зробити і такий запис: $\{1;2;3;4;5\}\cup\{4;5;6;7\}=\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

2) Якщо A={a;b;c}, B={1;2;5;7}, то $A\bigcup B=\{a;b;c;1;2;5;7\}$.

3)ЯкщоA={1;2;3},B={3;4;5},C={1;2;6;7}, то $A\cup B\cup C=\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Рис. 1.7

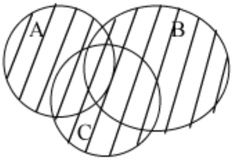


Рисунок 1.7 Об'єднання трьох множин А, В і С.
4) Р-множина натуральних чисел, меньших 15, К - множина простих чисел, меньших 15. Тоді Р={1;2;...;15}, К={2;3;5;7;11;13}, $P \cup K=P$.

Приклад 1.12
Нехай маємо чотири множини :
I={a,c,t,b,e,v,d,f}, A={f,b,e,c}, B={d,c,k,l,e,f}, C={a,f,t,d,k,p,c,e}
1. $A \cap B=\{b, e, c, d, k, l, f,\}$, $A \cap B \cap C=\{e,c,f\}$
2. $A \cup B \cup C=\{a,b,c,d,e,f,k,l,p,t\}$, $A \cup C=\{a,b,c,d,e,f,k,p,t\}$
3. *A\C={b}, C\A={a, d, k, p, t}, A\B={b, c}, B\A={d, k, l}, B\C={d, l,}, C\B={a,t,p,}*
4. $I=\{1,3,5,51,8,10\}$, $F=\{1,3,8\}$, $F\in I$, *тоді* $\overline{F}=\{5,10,51\}$
5. $A\oplus C=\{a, b, d, k, p, t\}$,$A\oplus B=\{b, c, d, k, l\}$, $C\oplus B=\{a, d, l, p, t\}$

1.5 Основні закони алгебри множин

Алгебра яка задається сигнатурою $A=\{\cup, \cap\}$ називається алгеброю Буля Операції над множинами, як і операції над числами, мають певні властивості(таб.1.2), які виражаються сукупністю тотожностей, незалежно від конкретного змісту вміщуваних в них множин і які є підмножинами універсальної множини I.
Розглянемо ці закони.

<u>*Таблиця 1.2*</u>

№	Назва закону	Операція $\cup$	Операція $\cap$
1	2	3	4
1	Закон ідемпотентності	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
2	Закон тотожності	$A\cup \varnothing=A$ $A\cup I=I$	$A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap I=A$

Продовження таблиці 1.2

1	2	3	4
3	Закон доповнення	$A \cup \overline{A} = I$ $\overline{I} = \varnothing$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\overline{\varnothing} = I$
4	Закон комутативності	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
5	Закон асоціативності	$A \cup (B \cup C) =$ $(A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) =$ $(A \cap B) \cap C$
6	Закон дистрибутивності	$A \cup (B \cup C) =$ $(A \cup B) \cup (A \cup C)$	$A \cap (B \cap C) =$ $(A \cap B) \cap (A \cap C)$
7	Закон де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8	Закон поглинання	$(B \cup A) \cap A = A$	$(A \cap B) \cup A = A$
9	Закон інволюції (подвійного заперечення)	$\overline{\overline{A}} = A$	

Окремо запишемо властивості операції симетричної різниці

Таблиця 1.3

	$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, $A \Delta A = \varnothing$, $A \Delta U = \overline{A}$, $A \Delta \varnothing = A$	
№	Назва закону	Операції Δ
1	Закон асоціативності	$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
2	Закон комутативності	$A \Delta B = B \Delta A$
3	Закон дистрибутивності співвідносно перетину	$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Доведення наведених властивостей можна провести на основі означення рівності двох множин.

Зауваження 1.4
Закон асоціативності при комбінаціях операцій об'єднання та різниці, в загальному випадку не має місця.
Розглянуті вище закони дозволяють спрощувати різні складні вирази алгебри множин.

Приклад 1.13
Покажемо істинність однієї з наведених тотожностей - правила де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведемо спочатку, що $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Нехай елемент $x \in \overline{A \cup B}$, тоді $x \in U \backslash (A \cup B)$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$, звідси $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$, отже, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Таким чином, має місце $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведемо обернене включення $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Припустимо $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, це означає, що $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$, звідси $x \notin A \cup B$, отже $x \in \overline{A \cup B}$. Зі справедливості обох включень випливає істинність рівності.

Аналогічно можуть бути доведені всі інші наведені теоретико-множинні тотожності. Ці тотожності дозволяють спрощувати різні складні вирази над множинами.

Приклад 1.14
Послідовно застосовуючи тотожності, маємо:
$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B} \cup D) \cap C) = ((A \cap B \cap \overline{D}) \cup (\overline{A \cap B \cap \overline{D}})) \cap C = E \cap C = C.$

Приклад 1.15
Довести включення $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

Простіше за все це зробити за допомогою діаграми Ейлера-Вена (рис.1.8-1.9).

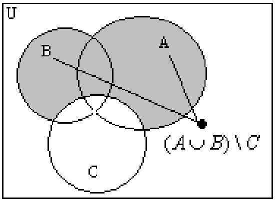


Рисунок 1.8

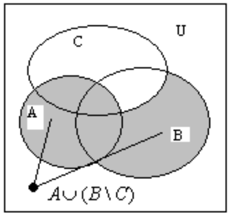


Рисунок 1.9

Приклад 1.16
Довести (закон дистрибутивності).
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
I. Доведемо, що ліва частина включена в праву:
$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді у x є дві можливості
1. $x \in A$, *тоді* $x \in A \cup B$ *і* $x \in A \cup C$, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $x \in B \cap C$, *тоді* $x \in B$ *і* $x \in C$, $x \in A \cup B$ *і* $x \in A \cup C$, тобто $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
II. Доведемо , що права частина включена в ліву:
$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup B \cap C$.
Нехай $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Тоді можливі два варіанти:
1. $x \in A$, $x \in A \cup B \cap C$
2. $x \in B$ *і* $x \in C$ $x \in B \cap C$, $x \in A \cup B \cap C$.
Тобто маємо, що ліва і права множини рівні.

Контрольні запитання:

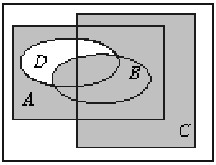
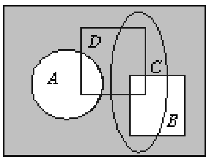
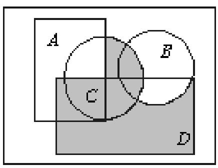
1. Що є множина, порожня множина і універсум?
2. Які способи задання множин існують?
3. Які операції діють над множинами?
4. Як можуть співвідноситися дві множини?
5. Які тотожності для операцій над множинами існують?

Завдання для самостійної роботи

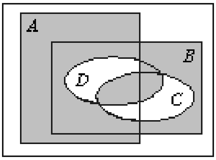
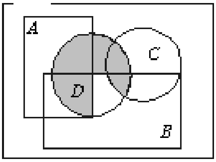
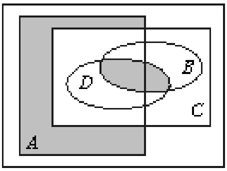
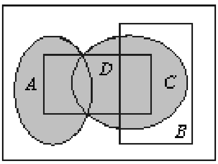
1.Провести тотожні перетворення рівностей з метою зменшення в них кількості букв до мінімуму(табл.3) (для кожної тотожності побудувати діаграму.)

2. Представити діаграми Ейлера – Венна максимально компактними аналітичними виразами

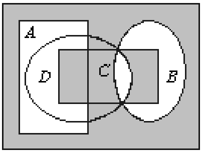
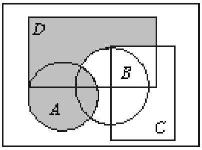
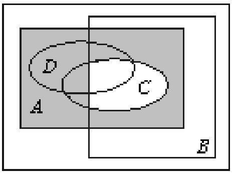
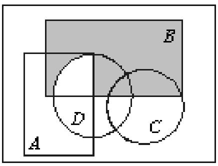
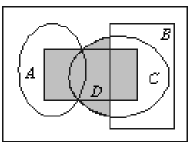
Таблиця 1.4

Варіант	Рівності
1	$\overline{A\cup\overline{B}}\cup\overline{C\cup\overline{D}}\cup\overline{\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D}}$
	
2	$(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap C\cap\overline{A})$
	
3	$(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$
	

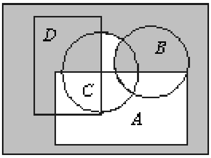
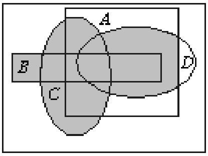
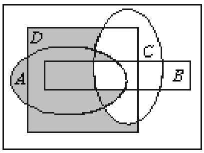
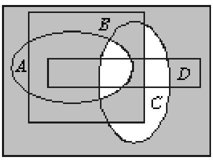
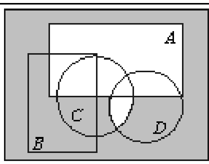
Продовження таблиці 1.4

4	$(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}})\cap\overline{\overline{C}\cap D}$ 
5	$C\cap\overline{D}\cap B\cap(\overline{\overline{A}\cup B\cup\overline{C}})\cap(C\cap D)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$
	
6	$(\overline{A\cap\overline{B}})\cap(A\cap\overline{C}\cap D)\cap(\overline{A}\cup C\cup\overline{D})$
	
7	$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup C})\ (\overline{C\cup\overline{D}})$
	

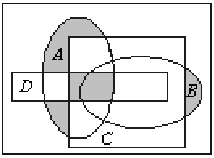
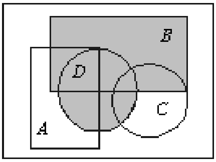
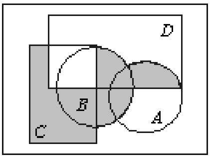
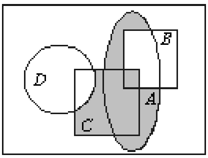
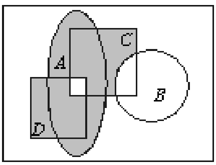
Продовження таблиці 1.4

8	$(D\cup C\cup \overline{A})\cap(\overline{D}\cup C\cup \overline{A})\cap(\overline{D}\cup \overline{C}\cup \overline{A})\cap(\overline{B\cap A})$
	
9	$(\overline{A\cup B})\cap(C\cup \overline{D})\cap(\overline{A\cup B\cup \overline{C}}$
	
10	$((A\cup \overline{B}\cup \overline{C})\cap(B\cup C\cup \overline{D}))\cap((\overline{A}\cap B\cap C)\cup(\overline{B}\cap \overline{C}\cap D))$
	
11	$(D\cup B\cup \overline{C})\cap(D\cup B\cup \overline{C}\cup \overline{A})\cap(B\cup C\cup A)\cap(\overline{\overline{B}\cap \overline{C}\cap \overline{A}\cap D})$
	
12	$\overline{\overline{A}\cap B}\cap \overline{C}((\overline{A}\cap B)\cup C)\cap \overline{D}$ 

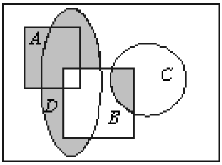
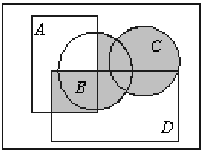
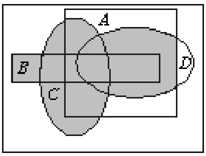
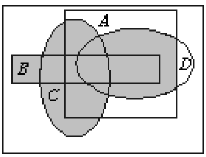
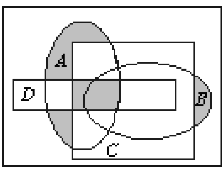
Продовження таблиці 1.4

<table>
<tr><td rowspan="2">13</td><td>$(D\cap C\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap C\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(\overline{B\cup A})$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14</td><td>$(\overline{D}\cap C\cap B\cap A)\cup(D\cap B)\cup(\overline{C}\cap B)\cup(B\cap\overline{A})$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15</td><td>$(D\cap C\cap B\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap B)\cup(\overline{C}\cap B)\cup(B\cap A)$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16</td><td>$(\overline{A\cup\overline{B}}\cap C)\cup((A\cup\overline{B})\cap C)\cup D$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17</td><td>$(\overline{B}\cap C)\cup\overline{D}\cup((B\cup\overline{C})\cap D)\cup(A\cup\overline{C})$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

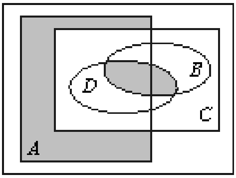
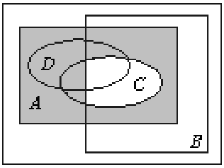
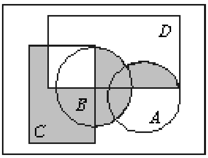
Продовження таблиці 1.4

18	$(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap\overline{D})$ 
19	$(\overline{A\cup\overline{B}})\cap(C\cup\overline{D})\cap(\overline{A\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$ 
20	$\overline{A\cap C\cap\overline{D}}\cup\overline{A\cap C}\cup D\cup A\cup B$ 
21	$(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}})\cup(\overline{C}\cap D)\cup\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap C}$ 
22	$(B\cup C\cup\overline{D})\cap(\overline{B}\cup C\cup\overline{D})\cap(B\cup C\cup D)\cap(A\cup C)$ 

Продовження таблиці 1.4

23	$(((B\cup\bar{C})\cap D)\cap((\bar{B}\cap C)\cup\bar{D}))\cup(A\cap C)$
	
24	$(\bar{A}\cup C)\cap(\bar{A}\cup C\cup D)\cap(C\cup\bar{D})\cap(\bar{C}\cup\bar{D})\cap(\overline{\bar{B}\cup\bar{D}})$ 
25	$\overline{A\cup\bar{B}}\cup\overline{C\cup\bar{D}}\cup\overline{\bar{A}\cap B\cap C\cap\bar{D}}$
	
26	$(\bar{B}\cap C)\cup\bar{D}\cup((B\cup\bar{C})\cap D)\cup(A\cup\bar{C})$ 
27	$(\overline{A\cup\bar{B}})\cap C)\cup((A\cup\bar{B})\cap C)\cup D$
	

Продовження таблиці 1.4

28	**G=** $(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap C\cap\overline{A})$
	
29	**G=** $(\overline{B}\cap C)\cup\overline{D}\cup((B\cup\overline{C})\cap D)\cup(A\cup\overline{C})$
	
30	**G=** $\overline{\overline{A}\cap B}\cap\overline{C}((\overline{A}\cap B)\cup C)\cap\overline{D}$
	

РОЗДІЛ 2.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ.

Зміст

Вимоги до знань і вмінь

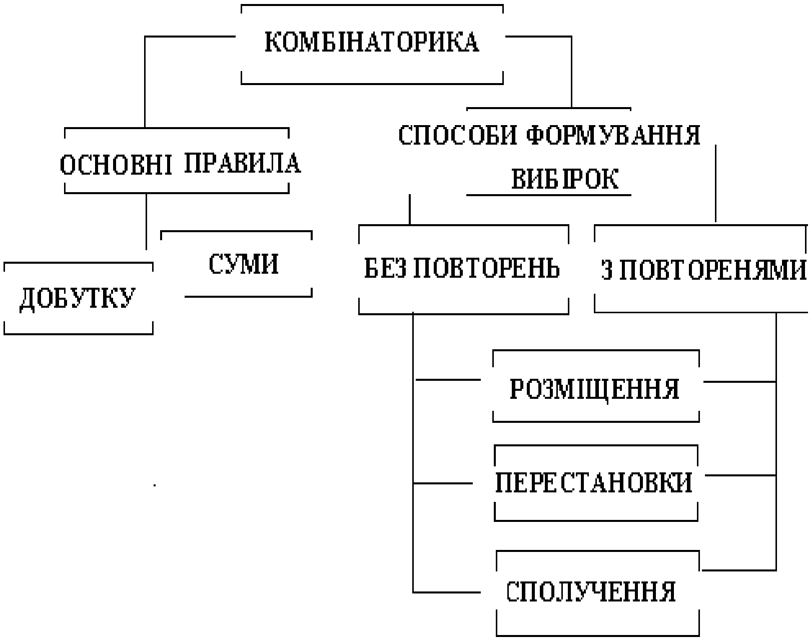
У результаті вивчення даного розділу студент повинен *знати:*

- основні поняття комбінаторики;
- основні правила комбінаторики;
- поняття розміщення;
- формулу для обчислення числа розміщень;
- поняття перестановки;
- формулу для обчислення числа розміщень;
- поняття сполучення;
- формулу для обчислення числа сполучень;

вміти:

- обчислювати число розміщень, перестановок і комбінації.

Структурна схема термінів



ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТ

2.1 Основні правила комбінаторики

Комбінаторика - займається обчисленням числа з'єднань, які можна утворити з елементів кінцевої множини. Термін "комбінаторика" походить від латинського combina - сполучати, з'єднувати. Комбінаторику можна розуміти і як синонім терміну дискретна математика, де *основною задачею* -є перелічення елементів та дослідження скінченних множин.
Нехай маємо скінченну множину елементів

$U=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Розглянемо набір: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{j_j}$, a_{j_j}, де $a \in U$, $j = 1, 2 ..., r$,

цей набір називається *вибіркою об'єму r з n елементів.* Довільна підмножина U є вибіркою, але не будь яка вибірка може бути підмножиною U, оскільки у вибірку один й той самий елемент може входити декілька разів (на відміну від підмножини).

Приклад 2. 1
Нехай, дано множину $M=\{a,b,c,d\}$. Вибірки *abc, acb, bac, bca, cab, cba* є різними перестановками, утвореними з тих самих елементів але представляють різний запис того самого сполучення.
Знайти число вибірок з об'єму r з n елементів можна за одним із двох принципів, а саме, принципу суми або принципу добутку.

<u>*Правило суми*</u>

Означення 2.1 Якщо $|A|=m$*(cardA, потужість)*, $|B|=n$*(cardB, потужість)* і $A \cap B=\varnothing$, *то* $|A \cup B|=|m+n|$.
На комбінаторній мові, це означає: якщо об'єкт A можна вибрати m способами, об'єкт B іншими n способами, але їх одночасний вибір неможливий, то вибір "A або B" може бути здійснено $|m+n|$ способами.
Кортеж - кінцева послідовність (дозволяє повторення) елементів будь-якої множини.
Варто зазначити, що одночасний вибір a і b виключаються. Необхідно, щоб не один зі способів вибору об'єкта A, не збігся з будь-яким способом вибору об'єкта B. За наявності таких збігів правило суми незастосовне, а результат дорівнює $p+q-k$, де k - кількість збігів.

Правило добутку

Означення2.2 Як що $|A|=m$, $|B|=n$, то $|A\times B|=m+n$. На комбінаторній мові, це означає: якщо об'єкт A може бути обраний m способами, при довільному виборі, а об`єкт B може бути обраний n способами, то вибір "A і B" може бути виконаний $m\cdot n$ способами.

Зауваження 2. 1
Правило використовується у випадках, коли вибори a і b незалежні.

Приклад 2.2
Скількома способами з 28 пластинок доміно можна вибрати дві пластини одну за одною так, щоб другу можна було прикласти до першої?
Якщо першою пластиною є дубль $(n_1 = 7)$, то другу можна прикласти до першої $(n_2 = 6)$ способами. Якщо перша пластина не дубль $(n_1^{/} = 21)$, то другу можна прикласти до першої способами $(n_2^{/} = 12)$. Тепер, послідовно застосовуючи правило множення й правило додавання, для шуканого числа одержуємо $m = m_1 + m_2 = n_1 \cdot n_2 + n_1^{'} \cdot n_2^{'} = 7 \cdot 6 + 21 \cdot 12 = 294$

Приклад 2.3
Скільки існує двозначних парних чисел з різними цифрами?
Нехай $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ двозначне парне число, у якого всі цифри різні. Тоді $\alpha_2 \in \{0,2,4,6,8\}$, а $\alpha_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{\alpha_2\}$.
Якщо α_1-непарна цифра, тобто $\alpha_1 \in \{1,2,3,5,7\}$, отримаємо, що перша цифра α_1 може бути вибрана 5-ма способами. При кожному виборі першої цифри α_1, друга цифра α_2 може бути вибрана 5-ма способами. За правилом добутку отримаємо, що існують $5 \cdot 5 = 25$ двозначних парних чисел, в яких перша цифра непарна.
Якщо α_1 парна цифра, тоді $\alpha_1 \in \{2,4,6,8\}$, а $\alpha_2 \in \{0,2.4,6.8\} \setminus \{\alpha_1\}$,тобто елемент α_2 може бути вибрано 4-ма

способами. За правилом добутку, число α може бути вибрано $4 \cdot 4 = 16$ способами.
У довільного двозначного числа перша цифра або парна, або непарна. Використовуючи правило суми, отримаємо, що усього існує 25+16=41 двозначних парних чисел з різними цифрами.

<u>Цю задачу можна вирішити іншим способом.</u>
Розглянемо парне двозначне число $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, де $\alpha_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, а $\alpha_2 \in \{0,2,4,6,8\}$. Перша цифра α_1 може бути вибрана 9-ма способами, для кожної фіксованої цифри α_1, друга цифра α_2 може бути вибрана 5-ма способами. За правилом добутку отримаємо, що існує $9 \cdot 5 = 45$ різних парних двозначних чисел. Серед них, чотири числа: 22, 44, 66, 88 з однаковими цифрами. З відси отримуємо, що існує 45-4=41 двозначних парних чисел з різними цифрами.

2.2 Основні способи формування вибірок

У цім розділі вирішуються деякі задачі, пов'язані з розглядом різних *комбінацій* з елементів кінцевих множин *M*. Наприклад, якщо взяти *10* різних цифр *0, 1, 2, ... , 9* і утворювати з них комбінації, то будемо одержувати різні числа, наприклад *345, 534, 1036, 5472, 45, 54* тощо.
Видно, що деякі з таких комбінацій відрізняються тільки порядком цифр (наприклад *345 і 534*), інші - вхідними в них цифрами (наприклад *1036 і 5472*), треті - розрізняються і порядком і числом цифр (наприклад *345 і 54*).
Отримані комбінації задовольняють різним умовам. Залежно від правил їх утворення можна виділити три типи комбінацій: *перестановки, розміщення, сполучення*. Розглянемо їх окремо.

Означення 2.3
Нехай $A = \{a_1,..., a_n\}$ скінченна множина, ($a_{i_1},..., a_{i_k}$) набір ементів з *A* називається *вибіркою*. *В*ибірка називається *упорядкованою*, якщо в ній заданий порядок слідування елементів. Якщо порядок

слідування елементів неважливий, то вибірка називається *неупорядкованою*.
З означення випливає, що дві упорядковані вибірки, які складаються з одних і тих самих елементів, але розташованих у різному порядку, є різними.

Перестановки.

Означення 2.4

Упорядковані вибірки, об'ємом n із n елементів, де всі елементи різні і відрізняються один від одного тільки порядком , називаються *перестановками* з n елементів.
Кількість перестановок з n елементів позначається P_n. До перестановки без повторень можна перейти, приймаючи, що здійснюється розміщення без повторень з n елементів по n:

Означення 2.5

Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n-факторіалом і пишуть: $n!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.
Вважають, що $0!=1$ і $n \in N$. Основна властивість факторіала: $(n + 1)! = (n +1) \cdot n!$. Отже, число перестановок обчислюємо за формулою:

$$P_n=n!$$

Приклад 2.4

Нехай множина *M* містить три літери *A, B, C.* Складемо всі можливі комбінації із цих літер*: ABC, ACB, BCA, CAB, CBA, BAC* (усього 6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються одна від одної лише порядком розташування літер.
Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три літери. На друге місце вже можна поставити тільки дві літери із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $3{\cdot}2{\cdot}1=6=P_3$, але $1{\cdot}2{\cdot}3=3!$ Прийшли до відомого у математиці поняття факторіала.
Перестановки без повторень можна інтегрувати, як різноманітні варіанти векторів, які складаються з компонентів, які не повторюються і отриманих перестановкою компонентів.

Розміщення.

Означення 2. 6

Упорядковані вибірки об'ємом m з n елементів $(m < n)$, які відрізняються одна від одної або самими елементами або порядком елементів, називаються *розміщеннями без повторень*.

Розміщення позначаються символом A_n^m (*від англійського слова Assing-Призначати*), де n - кількість всіх наявних елементів, m - число елементів у кожній комбінації.

Число розміщень можна обчислити за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), \text{ де } 0 \le m \le n; \ m, n \in N.$$

Формулу можна записати у факторіальній формі:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

Зазначимо, що: при m=0, $A_n^m = \frac{n!}{n!} = 1$.

Приклад 2.5

Нехай множина M містить чотири літери *A, B, C, D*. Склавши всі комбінації тільки із двох літер, одержимо: *AB, AC, AD, BA, BP, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC*. Видно, що всі отримані комбінації (їх 12) відрізняються або літерами, або їхнім порядком (комбінації *BA* і *AB* вважаються різними). За формулою $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, що збігається з результатом наведеного приклада. Тут кожен рядок відповідає одній із всіх наявних літер $(n=4)$, а кількість стовпців відповідає іншим літерам $(n-1=3)$, усього $4 \cdot 3=12$ різних комбінацій.

Приклад 2.6

Скількома способами можна скомплектувати групу з 3-х студентів для збирання яблук у складі начальника та підлеглих?

<u>*Рішення*</u>. Мова йде про вибірку упорядкованих двоелементних підмножин множини студентів, яка складається з 3-х елементів($K=\{1,2,3\}$), тобто про розміщення без повторень з 3-х елементів по 2,тому:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$$

Детальніше у вигляді векторів з номерів студентів (наприклад, за списком) перша компонента якого є номер студента-начальника, друга-підлеглого: *(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2).*
Зрозуміло, що тут суттєвий порядок слідування компонентів і не може бути повторень (один студент не може бути начальником і підлеглим одночасно), тому ця множина-підмножина декартового добутку.

Приклад 2.7
Скількома способами можна провести розподілення *10* механізаторів по трьом сушильним установкам?
Один механізатор призначається на одну сушильну установку.
Рішення. Розподілення механізаторів-розміщення без повторень з *10* елементів по 3, тому:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Комбінації (сполучення)

У деяких комбінаторних завданнях необхідно визначити кількість k-елементних підмножин множини з n елементів.У даному випадку послідовність слідування компонентів несуттєва, тобто виконується неупорядкована вибірка.У результаті отримують так звані комбінації без повторень.
Означення 2.7
Комбінаціями без повторень з *n* елементів по *m* називаються відмінні одна від одної хоча б одним елементом вибірки довжини *m*, складені з n–елементної множини. *(m, n* $\in N$ *і n* $\geq$ *m).*
Число комбінацій без повторень з *n* елементів по *m*, позначається як

$$C_n^m\ ,\ C(n,m)\ , \text{або} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

У загальному випадку кількість сполучень із *n* елементів по *m* дорівнює числу розміщень з *n* елементів по *m*, діленому на кількість перестановок з *m* елементів: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$. Використовуючи для чисел розміщень і перестановок факторіальні формули $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ і

$P_n = n!$, одержимо формулу числа сполучень у вигляді:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Основні властивості сполучень:

$$C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!};\; C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Приклад 2.8

Множена *M* утворена з чотирьох букв *A, B, C, D*. Скласти комбінації з двох букв, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Маємо *AB, AC, AD, BP, BD, CD*. Виходить, що число сполучень з чотирьох елементів по двоє дорівнює 6.

$$\tilde{N}_4^{4-2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 6.$$

Приклад 2.9

Визначити кількість двоелементної підмножини, яка складається з 3-х елементів.

Перерахуємо усі двоелементні підмножини множини

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}$.

Ми маємо справу з комбінацією з *3* по *2*:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Ці величини в *2!* рази менші, ніж число розміщень з A_3^2, оскільки компоненти двоелементних векторів можна переставити $P_2 = 2!$ способами.

Приклад 2. 10

Скількома способами можна вибрати 3 різноманітні цукерки з 5-ти можливих?

Число розміщень з 5-ти по 3 без повторень: $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Один й той самий набір цукерок можна отримати різними способами, наприклад, вектори(a,b,c) і (b,a,c) дають один й тої самий набір.

Оскільки три елемента можна переставити $P_3 = 3! = 6$ способами, то число способів вибору різних 3-х цукерок дорівнює

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{60}{6} = 10$$

2.3 Біноміальна формула Ньютона

Біномом Ньютона називають розклад вигляду:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\, m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n, \ \text{äå}\ m < n$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Компоненти формули «біном Ньютона»:

- ✓ права части формули – розклад бінома;
- ✓ $C_n^0;\ C_n^1;\ \ldots\ C_n^n$ –біноміальні

коефіцієнти, їх можна отримати за допомогою трикутника Паскаля (використовуючи правило добутку).

Практична значимість трикутника Паскаля полягає в тому, що з його допомогою можна легко, за допомогою памяті записати відомі формули квадратів сум та різниці, але і формули кубу суми (різниці), четвертого степеня та вище.

Наприклад 2.11

Четверта строчка, як раз наглядно демонструє біноміальні коефіцієнти для бінома четвертого степеня.

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3 b + 6\cdot a^2 b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

Альтернатива трикутника Паскаля:

1) Перемножити почленно чотири дужки:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^4 + \ldots;$$

2) Згадати розклад бінома Ньютона четвертого степеня:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 =$$

$$a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1$$

Загальний член розкладу бінома *n*-го степеня,

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m,\ m = 0,1,2,...n$$, де T – член розкладу;

$(m+1)$ – порядковий номер члена розкладу.

<u>*Властивості бінома та біноміальних коефіцієнтів*</u>

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. Кількість усіх членів розкладу на одиницю більше показника степеня бінома, тобто дорівнює $(n+1)$
3. Добуток показників степенем a та b кожного члене розкладу дорівнює показнику степеня бінома, тобто n
4. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (правило симетрії)
5. Сума біноміальних коефіцієнтів усіх членів розкладу дорівнює 2^n
6. Сума біноміальних коефіцієнтів, які знаходяться на непарних місцях дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, які стоять на парних місцях і дорівнює 2^{n-1}

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$$

7. Правило Паскаля: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$
8. Будь-який біноміальний коефіцієнт, починаючи з другого дорівнює добутку попереднього та дробу $\dfrac{n-(m-1)}{m}$

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}$$

Приклад 2. 11

У виразі $(x+2y)^{10}$ розкрили дужки та привели подібні члени;який коефіцієнт буде стояти біля виразу $x^4 y^6$?

Для відповіді розглянемо біном Ньютона:

$$(x+2y)^{10} = x^{10} + C_{10}^1 x^9 (2y) + C_{10}^2 x^8 (2y)^2 + ... + C_{10}^6 x^4 (2y)^6 + ... + (2y)^{10}$$

Одержимо число $C_{10}^6 \times 2^6 = 64\,C_{10}^4 = 64\dfrac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 64\dfrac{210}{1} = 13440$.

Комбінації, розміщення та перестановки, є підмножинами вихідної множини. Розглянемо вибірки, які не є підмножинами, до них належать:

1.Розміщення з повтореннями.
2. Перестановки з повтореннями.
3.Комбінації з повтореннями.

<u>*Розміщення з повтореннями*</u>

Означення 2.8

Упорядковані вибірки елементів обсягом m з n елементів, де елементи можуть повторюватися, називаються *розміщеннями з повтореннями*. Їх число позначається A_n^m (n).

Таким чином, перший елемент вектора m вибирається n способами, другий - n способами й так далі: $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$.

$$A_n^m(n)=n^m.$$

Приклад 2.12

Скількома способами можна обладнати дві різні фірми комп'ютерами трьох типів?

Кожен спосіб обладнання є вибірка (3,2), вектор довжини 2, складений з 3-х елементної множини типі $T = \{t_1, t_2, t_3\}$.Тому кількість способів обладнання-число розміщень з повтореннями з 3 по 2: $A_3^2(3) = 3^2 = 9$

Розглянемо більш детально:

$$(t_1,t_1),(t_1,t_2),(t_1,t_3),(t_2,t_2),(t_2,t_3),(t_2,t_1),(t_3,t_3),(t_3,t_2),(t_3,t_1).$$

<u>*Перестановки з повтореннями*</u>

Означення 2.9

Нехай маємо n елементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів іншого типу і т.д., k_s елементів s-*го* типу, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. Упорядковані вибірки з таких n елементів по n називаються *перестановками з повтореннями*, їх число позначається $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$.

Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ називаються *поліноміальними коефіцієнтами*.

$$C_n(k_1, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}.$$

Приклад 2.13

Для множини $A = \{a, b\}$ скласти всі перестановки з повторенням, якщо $n = 3, k_1 = 2, k_2 = 1$. Користуючись визначенням , одержуємо $\{a, a, b\}, \{a, b, a\}, \{b, a, a\}$. Усього три перестановки з повторенням.

Приклад 2.14

Скільки різних слів можна одержати, переставляючи букви слова "математика" ?Шукані слова являють собою перестановки з повторенням (*n =10* - число букв у слові) з елементів-букв безлічі $A = \{a, e, u, к, м, m\}$, причому

$k_1 = 3, k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = k_6 = 2$. Отже, їхнє число дорівнює

$$C_{10}(3,1,1,1,1,2) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$$

<u>*Сполучення з повтореннями*</u>

В багатьох комбінаторних задачах необхідно підрахувати число різних розкладів векторів довжини m з n елементів множини. Такі вектори називаються *комбінаціями*(сполученнями) з повтореннями з n елементів по m.

Означення 2.10

Нехай маємо *n* типів елементів, кожен тип містить не менш *m* однакових елементів. Неупорядкована вибірка обсягом *m* з наявних елементів (їх число ≥ $m \times n$) називається комбінацією з повтореннями і позначається C_n^m (*n*). $C_n^m(n) = \mathrm{C}^{\mathrm{n-1}}_{\mathrm{n+m-1}} = C^m_{n+m-1} = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}$

Приклад 2.15

Скільки є пластинок у звичайній грі "доміно"? Кістки доміно можна розглядати, як сполучення з повтореннями по двох із семи цифр множини $\{1,2,3,4,5,6\}$.Кількість всіх таких сполучень дорівнює

$$C_7^2 = C_{7+2-1}^2 = \frac{8!}{6!2!} = 28.$$

Приклад 2.16

Скількома способами можна розсадити m прибулих гостей серед n гостей,що вже сидять за круглим столом? Очевидно, що між *n* гостями, що сидять за столом, існують *m*–проміжків, в яких можна розмістити *m*– прибулих гостей. Це можна зробити

$C_{n+m-1}^{m} = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}$ способами.

2.3 ПРИНЦИП ВКЛЮЧЕННЯ ТА ВИКЛЮЧЕННЯ

Дотепер мова йшла про підрахунок числа підмножин, що утворяться шляхом вибірки об'єктів з деякої множини відповідно до умов, що визначають їхню кількість, упорядкованість і повторюваність. Не менше значення мають задачі перерахування, зв'язані з властивостями об'єктів.

Якщо*A та B* кінцеві підмножини деякої універсальної множини *I*, тоді

$$N(A \bigcup B) = N(A) + N(B) - N(A \bigcap B). \quad (*)$$

Розглянемо послідовно випадки “взаємного розташування “двох множин А та В.

1.А=В, тоді $A \bigcup B = A,\ A \bigcap B = A$

$N(A) = N(A) + N(A) - N(A) = N(A)$, вірне рівняння.

2. $A \subset B$, тоді $A \bigcup B = B,\ A \bigcap B = A$

$N(B) = N(A) + N(B) - N(A) = N(B)$, вірне рівняння.

3. $A \supset B$ (аналогічно випадку 2).

4. $A \bigcap B = 0$, тоді $N(A \bigcap B) = 0$, $N(A \bigcup B) = N(A) + N(B)$, вірне рівняння.

5. $A \cap B \neq 0$, тоді $N(A) + N(B) = N(A \cup B) + N(A \cap B)$, оскільки в лівій частині останнього рівняння кількість загальних елементів $N(A \cap B)$ будуть перераховані двічі.

Встановимо загальну формулу для визначання кількості елементів об'єднання кінцевого числа кінцевих множин.

Теорема 1.

Якщо $A_i (i = 1,2,..., n)$ кінцеві підмножини універсальної множини *I*, тоді $N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + \ldots + N(A_n) -$

$\{N(A_1 \cap A_2) + + N(A_1 \cap A_3) + .. + N(A_{n-1} \cap A_n)\}$

$+ \{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) +$

$+ \ldots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$,

або

$$N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot S_k(A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

де $S_k(A_1,..., A_n)$ сума чисел $N(A_{i_l} \cap ... \cap A_{i_k}$ за усіма можливими перетинами дорівнює k різних множин із множин $A_1,..., A_n$.

<u>*Наслідок.*</u> $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = 0$,тоді

$$N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i)$$

Приклад 2.17

Кожен студент в групі-або дівчина, або блондин, або говорить англійською. В групі 16 дівчат, з них 6 блондинок, і 4 блондинки знають англійську мову. Всього у групі 11 блондинів, англійською з них говорять 8. Всього студентів, які вміють спілкуватися англійською 20,з них 12 дівчат. Скільки студентів у групі?

Розв'язок. Нехай А- множина дівчат, В- множина блондинів, С- множина студентів, які знають англійську мову. Тоді $N(\cup B \cup C)$ загальне число студентів у групі; $A \cap B$ множина

блондинок; $A \bigcap C$ множина дівчат, які говорять англійською; $B \bigcap C$ множина усіх блондинів(хлопців та дівчат), які знають англійську мову; $A \bigcap B \bigcap C$ множина блондинок, які говорять англійською мовою. З усього вище сказаного випливає, що
$N(A) = 16,\ N(B) = 11,\ N(C) = 20,\ N(A \bigcap B) = 6,\ N(A \bigcap C) = 12,$
$N(B \bigcap C) = 8,\ N(A \bigcap B \bigcap C) = 4.$
Тепер при $n = 3$ отримаємо
$$N(A \bigcup B \bigcup C) = 16 + 11 + 20 - (6 + 12 + 8) + 4 = 25.$$
Таким чином,у групі 25 студентів.

Приклад 2.18

Нехай задані властивості: α_1 -сталевий, α_2 -чорний, α_3 — сферичний, причому $N(\alpha_1)=13$; $N(\alpha_2)=10$; $N(\alpha_3)=14$; $N(\alpha_1\alpha_2)=4$; $N(\alpha_1\alpha_3)=5$; $N(\alpha_2\alpha_3)=3$ *і* $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=1$. Якщо мається усього $N=38$, то число таких з них, що не володіють жодним із зазначених властивостей, буде $N(\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3})$ $=38-(13+10+14)+(4+5+3)-1=12$.
Число сталевих, але не чорних і не сферичних, дорівнює:
$$N(\alpha_1\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3}) = N\,[\alpha_1(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)] = N(\alpha_1) - N(\alpha_1\alpha_2) - N(\alpha_1\alpha_3)$$
$$+ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 13 - 4 - 5 + 1 = 5$$
Принцип включення і виключення наочно ілюструється діаграмою Венна, що для розглянутого приклада показана на рис. 2.1.

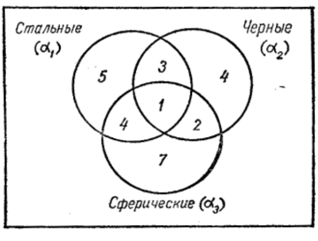


Рисунок 2.1. Діаграма Венна для множин, які характеризуються трьома властивостями.

Контрольні запитання:

1. Що є n-перестановкою?
2. Що є n-сполученням?
3. Що проголошує правило суми і добутку?
4. Що є перестановки без повторень елементів?
5. Яка різниця між перестановками без повторювань і з повторюваннями елементів?
6. Що є сполучення без повторювань елементів?
7. Яка різниця між сполученнями без повторювань і з повторюваннями елементів?
8. Що є біном Ньютона і біноміальні коефіцієнти?
9. Що проголошує принцип включення і виключення?
10. Яка формула включення і виключення?

Завдання для самостійної роботи

1. Комісія складається з голови, його заступника й ще п'яти чоловік. Скількома способами члени комісії можуть розподіляти між собою обов'язку?

2. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із групи в 20 чоловік?

3. Номери трамвайних маршрутів іноді позначаються двома кольоровими ліхтарями. Яку кількість різних маршрутів можна позначити, якщо використовувати ліхтарі восьми кольорів?

4. Чемпіонат, у якому беруть участь 16 команд, проводиться у два кола (тобто кожна команда двічі зустрічається з будь-якою іншою). Визначити, яку кількість зустрічей варто провести.

5. Замок відкривається тільки в тому випадку, якщо набрано певний тризначний номер. Спроба полягає в тому, що набирають навмання три цифри із заданих п'яти цифр. Угадати номер вдалося тільки на останній із всіх можливих спроб. Скільки спроб передувало вдалій?

6. Команда з п'яти чоловік виступає на змаганнях із плавання, у яких беруть участь ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть розподілитися місця, зайняті членами цієї команди?

7. Скількома способами можна розташувати на шахівниці дві тури так, щоб одна не могла взяти іншу? (Одна тура може взяти іншу, якщо вона перебуває з нею на одній горизонталі або на одній вертикалі шахівниці.)

8. Тридцять чоловік розбиті на три групи по десяти осіб у кожній. Скільки може бути різних складів груп?

9. На книжковій полиці міститься 30 томів. Скількома способами їх можна розставити, щоб при цьому перший і другий томи не стояли поруч?

10. Скільки чотиризначних чисел, складених із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, містять цифру 3 (цифри в числах не повторюються)?

11. Десять груп займаються в десяти розташованих підряд аудиторіях. Скільки існує варіантів розкладу, при яких групи №1 і №2 перебували б у сусідніх аудиторіях?

12. У турнірі беруть участь 16 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого тура (розклади вважаються різними, якщо відрізняються учасниками хоча б однієї партії; колір фігур і номер дошки не враховуються).

13. Поїзд метро робить 16 зупинок, на яких виходять всі пасажири. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 100 пасажирів, що ввійшли в поїзд на кінцевій зупинці?

14. Три автомашини №1,2,3 повинні доставити товар у шість магазинів. Скількома способами можна використовувати машини, якщо вантажопідйомність кожної з них дозволяє взяти товар відразу для всіх магазинів і якщо дві машини в той самий магазин не направляються? Скільки варіантів маршруту можливо, якщо вирішено використовувати тільки машину №1?

15. З лабораторії, у якій працює 20 чоловік, 5 співробітників повинні виїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його заступник і головний інженер одночасно їхати не повинні?

16. Вісім авторів повинні написати книгу із шістнадцяти розділів. Скількома способами можливий розподіл матеріалу між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три розділи, чотири - по два, двох - по одному розділу книги?

17. У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів третього розряду, 6 - другого й 2 першорозрядники. Визначити кількість таких складів першого туру, щоб шахісти однієї категорії зустрічалися між собою (колір фігур не враховується).

18. Дванадцяти учням видані два варіанти контрольної роботи. Скількома способами можна посадити учнів у два ряди, щоб у сидячих поруч не було однакових варіантів, а в сидячих один за одним був той самий варіант?

19. Кожний з десяти радистів пункту А намагається встановити зв'язок з кожним із двадцяти радистів пункту Б. Скільки можливо різних варіантів такого зв'язку?

20. Шість ящиків різних матеріалів доставляють на вісім поверхів будівництва. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? У скількох варіантах на восьмий поверх буде доставлено не більше двох матеріалів?

21. А і В і ще 8 чоловік стоять у черзі. Скількома способами можна розташувати людей у черзі, щоб А і В були відділені один від одного трьома особами?

22. На одній прямій взято m точок, на паралельній їй прямій n точок. Скільки можна побудувати трикутників з вершинами в цих точках ?

23. Кидаються 10 однакових гральних костей. Скількома способами вони можуть упасти так, що :
1.на жодній кістці не випаде 6 очка;
2.хоча б на одній кістці випаде 6 очка;
3.рівно на 3-х костях випаде 6 очка;
4. рівно на 3-х костях випаде 6 очка, на 2-х інших випаде 5 очка.

24. Уважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому можуть починатися й з 0 теж, знайти кількість телефонних номерів, таких що:
1. 4 останні цифри однакові й не зустрічаються серед перших 3-х (перші 3 цифри різні.);
2. всі цифри різні ;
3. номер починається із цифри 5;
4. номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2.

25. Регістр калькулятора містить 8 розрядів. Скільки буде 8-ми значних чисел, якщо
1. регістр містить рівно 2 однакові цифри ;
2. регістр містить рівно 2 пари однакових цифр;
3. регістр містить рівно 3 однакові цифри;
4. регістр містить не більше 3-х різних цифр.

26. Скільки можна одержати чотиризначних чисел із цифр 0;1;2;3?

27. Скільки різних двозначних чисел можна утворити із цифр 1;2;3;4 за умови, що в кожному числі немає однакових цифр?

28. Скількома способами можна на шахівниці розставити 8 тур так, щоб вони не били один одного?

30. У підрозділі 60 солдатів і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити варта, що складається із трьох солдатів і одного офіцера?

31. Сейф защіпається на замок із секретом, що складається з п'яти дисків, на кожному з яких зображені цифри 0;1;2;...;9. Замок відкривається за умови набору певної комбінації цифр - “магічне слово”. Скільки часу може бути витрачене на відкривання сейфа підбором “магічного слова”, якщо на складання однієї комбінації витрачено 5 сек.

32. Скільки різних перестановок можна утворити з букв слова “ДЗВІН”?

33. У цеху є 9 вільних робочих місць, з яких на двох можуть працювати тільки жінки, на трьох - тільки чоловіки. Скількома способами можна розподілити трьох жінок і чотирьох чоловіків на ці робочі місця?

34. З 30 співробітників відділу англійську мову знають 19 чоловік, німецький - 17, французьку -11, англійську і німецьку - 12, англійську й французьку - 7, німецьку й французьку -5, всі три мови - 2 чоловік. Скільки співробітників не володіють іноземною мовою?

35. Скількома способами можна розставити n нулів і k одиниць так, щоб ніякі дві одиниці не стояли поруч?

36. Із цифр 1;2;3;4;5; складаються тризначні числа так, що в кожному числі немає однакових цифр. Скільки вийде чисел? Скільки може бути отримано парних чисел від додавання двох отриманих тризначних чисел.

Список рекомендованої літератури

1. Новиков Ф.А.Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2001, с.135-156.

2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учебное пособие. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001, с. 49-53.

3. Мірошників О.И. Цікаві задачі по теорії графів. Мінськ: Тетрасистемс,2001

.4. Хаггарти Дж. Дискретна математика для програмістів. М.: Техносфера, 2003.

<u>*Додаткова*</u>

4. Новоселов В.Г., Скатков А.В. Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах. – К.: Учебно-методический кабинет высшего образования, 1992, с.47-55.

5. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш.шк., 1986, с.13-20.

6. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976, с.25-29.

<u>*Для практичних занять*</u>

7. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1973, с.249-281.

9. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатом-издат, 1987, с.24-44.

Методичні вказівки для проведення прктичних занять з дисципліни
“Дискретна математика” (для студентів спеціальності 6.030502
“Економічна кібернетика” денної форми навчання)

Укладачі: к. ф.-м. н. Валерій Григорович Хребет
ас.Ольга Федорівна Ануфрієва

Підписано до друку
Замовлення
Тираж 50 прим.

Умов. друк. арк. 4,5
Формат 70x90/16

АДІ ДВНЗ "ДонНТУ"

84646, м. Горлівка, Кірова,51