Лекция 1. Оптимизационная модель линейного программирования

1. Общая задача оптимального программирования

2. Классификация задач оптимального программирования

3. Формы записи задачи линейного программирования

1. Общая задача оптимального программирования

Линейное программирование – это частный раздел оптимального программирования. В свою очередь оптимальное (математическое) программирование – раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в управлении и планировании. Необходимым условием использования оптимального подхода к планированию и управлению (принципа оптимальности) является гибкость, альтернативность производственно хозяйственных ситуаций, в условиях которых приходится принимать планово-управленческие решения. Именно такие ситуации, как правило, и составляют повседневную практику хозяйствующего субъекта (выбор производственной программы, прикрепление к поставщикам, маршрутизация, раскрой материалов, приготовление смесей и т.д.). Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение: $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots x_m)$, где x_j, $j = 1, m$ – его компоненты, – которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего объекта. Слова «наилучшим образом» здесь означают выбор некоторого критерия оптимальности, то есть некоторого экономического показателя, позволяющего сравнивать эффективность тех или иных планово-управленческих решений. Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и другие. Слова «учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности» означают, что на выбор планово-управленческого решения (поведения) накладывается ряд условий, т.е. выбор $\overline{X}$ осуществляется на некоторой области возможных (допустимых) решений *D*. Эту область также называют областью определения задачи или областью допустимых решений (ОДР). Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это значит решить экстремальную задачу вида:

$$\begin{gathered} f(\overline{X}) \to \min(\max) \\ \{\overline{X} \in D \end{gathered} \qquad (1)$$

Фактически оптимизационная модель (1.1) состоит условно из двух частей: 1. математическая запись критерия оптимальности $f(\overline{X}) \to \min(\max)$ – целевая функция или функция цели; 2. система, описывающая внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности: $\{\overline{X} \in D$ – система экономических ограничений. Представим в качестве критерия «максимум дохода1» *Z* от реализации товаров. Доход может представлять собой сумму произведения цены *j*-ых товаров на реализуемое количество. Обо значим цену *j*-го товара через C_j (в моделировании получил наименование «ценового коэффициента»), а реализуемое количество – через x_j. Тогда целевая функция принимает вид

$$Z = \sum_{J} C_j x_j \to \max \ , \ j = 1, m \quad (2)$$

Возьмем для примера систему внутренних возможностей предприятия, которая основывается на запасах исходного материала $\overline{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, где $b_1, i = 1, n$ -ресурс(лимит) i-го материала. риала. Расход *i*-го материала на производство *j*-го товара определяется нормативной матрицей рас хода $A = \{ a_{ij} \}$. Сумма произведения количества выпускаемых товаров на норму расхода пред- ставляет собой общее количество израсходованного материала *i*-го вида, которое не может превы сить имеющийся ресурс.

$$\sum_{jo} a_{ij} x_j \le b_i \text{ , j = 1,m i=1,n.} \quad (3)$$

Еще одним важным моментом в5 экономических оптимизационных моделях выступает тот факт, что количество производимых изделий не может быть отрицательным $x_j \geq 0$, $j = 1, m$. Перепишем задачу условной оптимизации с учетом всего вышеизложенного.

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_m x_m \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1m} x_m \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2m} x_m \le b_2 \\ \ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nm} x_m \le b_n \\ x_j \ge 0, j = 1, m \end{cases} \quad (4)$$

Задача (1.4) – задача оптимального линейного программирования, в основе которой лежат принципы оптимальности и системности. Заметим, что использование знака «меньше или равно» в неравенствах системы ограничений не является обязательным. В зависимости от экономической ситуации возможно использование знаков «равно» и «больше или равно». В результате решения задачи (1.4) получаем вектор $\overline{X}$ (набор управляющих переменных x_j , $j = 1, m$), который называется планом задачи оптимального программирования. Если план *X* всего лишь удовлетворяет системе ограничений, то он называется допустимым решением. Тот план *X* (допустимое решение), который доставляет *максимум* или *минимум* целевой функции, называется оптимальным планом (оптимальным поведением, или просто решением) задачи оптимального программирования. Таким образом, выбор оптимального управленческого поведения в конкретной производственной ситуации связан с проведением с позиций системности и оптимальности экономико-математического моделирования и решением задачи оптимального программирования.

2. Классификация задач оптимального программирования Задачи оптимального программирования в наиболее общем виде классифицируют по следующим признакам. 1. По характеру взаимосвязи между переменными: а) линейные; б) нелинейные. В случае *а*) все функциональные связи в системе ограничений и функция цели – линейные функции; наличие нелинейности хотя в одном из упомянутых элементов приводит к случаю *б*). 2. По характеру изменения переменных: а) непрерывные; б) дискретные. В случае *а*) значения каждой из управляющих переменных могут заполнять сплошь некоторую область действительных чисел; в случае *б*) все или хотя бы одна переменная должны принимать только целочисленные значения. 3. По учету фактора времени: а) статические; б) динамические. В задачах *а*) моделирование и принятие решений осуществляется в предположении о независимости от времени элементов модели в течение периода времени, на который принимается планово-управленческое решение. В случае *б*) такое предположение достаточно аргументировано определения. В случае *в*) можно сделать предположение о возможных исходах случайных элементов, но нет возможности сделать вывод вероятностях исходов. 5. По числу критериев оценки альтернатив: а) простые, однокритериальные задачи; б) сложные, многокритериальные задачи. В задачах *а*) экономически приемлемо использование одного критерия оптимальности или удается специальными процедурами (например, взвешиванием приоритетов) свести многокритериальный подход к однокритериальному. Сочетание признаков 1-5 позволяет группировать (классифицировать) в самом общем виде задачи и методы оптимального программирования. Например, 1а), 2а), 3а), 4а), 5а) – задачи и методы линейного программирования; , 1б), 2а), 3а), 4а), 5а) – задачи и методы нелинейного программирования; 1а), 2б), 3а), 4а), 5а) – задачи и методы целочисленного линейного программирования. Выбору метода решения конкретной задачи оптимального программирования предшествует ее классификация, т.е. отнесение к одному из классов оптимизационных задач, начиная с приведенных самых общих признаков (например, задачи дискретного линейного программирования с булевыми1 переменными). Развитие и совершенствование методов решения задач оптимального программирования идет от случаев типа *а*) к случаям типа *б*), *в*). Наиболее изучены задачи линейного программирования, для которых разработан универсальный метод решения – метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод), то есть любая задача линейного программирования решается (реализуется) этим методом. Для задач нелинейного программирования свое развитие получили другие универсальные методы, основанные на сопоставлении первых и вторых частных производных по переменным целевой функции, например метод сопряженных градиентов. Следует отметить, что данным методом можно решать задачи линейного программирования. Большинство компьютерных программ, используемых для оптимального моделирования, имеют в своем арсенале метод сопряженных градиентов.

3 *Формы записи задачи линейного программирования* Задача линейного программирования уже была рассмотрена нами с использованием выражения (1.4), в котором были сделаны два отступления от общей формы записи, касающиеся таких моментов, как направление экстремума и форма неравенства в системе ограничений. Тем не менее, выражение (1.4) позволяет рассматривать одну из возможных форм задачи оптимального управления. В ней рассматриваются только неравенства. Однако, как уже было отмечено в предыдущем вопросе, система ограничений может включать и уравнения, то есть между левой и правой частями системы ограничений стоит знак равенства. К тому же развернутая форма записи (1.4) не является обязательной. Она может быть преобразована до сокращенной формы, использующей знаки суммирования.

$$Z = \sum_j C_j x_j \to \min(\max)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i i = 1, n$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, m \qquad (5)$$

При этом записи *C, A, B* представляют собой вектора, а $X \geq 0$ понимается как вектор (или вектор-столбец в зависимости от контекста), у которого все компоненты (элементы) неотрицательные. Приведение задачи к каноническому виду осуществляется введением в левую часть неравенств в системе ограничений дополнительной переменной $0x_{m+n} \geq$ с соответствующим знаком. Ввод дополнительной переменной поддерживается в математике определенным правилом.

Правило. Дополнительная переменная входит в левую часть неравенства из системы ограничений с таким знаком, чтобы полностью уравновесить левую и правую части этого выражения. То есть с точки зрения расширенной записи оптимизационной задачи выражение (1.4) при ходит к виду

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_m x_m + 0 \cdot x_{m+1} + 0 \cdot x_{m+2} + ...0 \cdot x_{m+n} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leq b_n \\ x_j \geq 0, \; j = 1, m \end{cases}$$

В последующем каноническая форма записи линейной оптимизационной модели будет использована нами при рассмотрении симплекс-метода. Однако при машинном (компьютерном) решении задачи вида (1.4) нет необходимости переходить к канонической форме. Метод сопряженных градиентов не требует данной формы.