ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Прогнозирование во всём множестве экономико-математических методов всегда занимало особое место, вызывало активный интерес со стороны практических работников, поскольку задачи прогнозирования являются актуальными для всех иерархических уровней экономики, на любых этапах экономической динамики. Прогнозирование, предшествующее планированию, позволяет оценить конкретную ситуацию в управлении и дает практике гибкий инструмент анализа текущих ситуаций. Экономическое прогнозирование в настоящее время переживает новый этап своего развития, претерпевая существенные изменения. Отметим некоторые особенности современного прогнозирования.

Во-первых, изменились объекты прогнозирования: изучаются мега-, мезо- и микрообъекты. Если в 60-80-е годы основные исследования сосредотачивались на разработке крупных комплексных программ для народного хозяйства, задач научно-технического прогресса, изучения динамики развития крупных отраслей, то в 90-е годы народнохозяйственный аспект прогнозирования углубился до всех уровней иерархии: появились принципиально новые объекты прогноза, такие, как территориальные комплексы, социально-экономические структуры, человек. В связи с этим появилось понятие "сложные системы". Под "сложной системой" подразумевается составной объект, обладающий следующими свойствами:

- состоит из подсистем;- подсистемы связаны отношениями; - подсистемы объединены в единое целое; - объединение в единое целое осуществляется по каким-то принципам (критериям).

Отличительными особенностями сложных систем от традиционных объектов прогнозирования являются два факта:

а) отношения и связи между подсистемами всегда сильнее, чем связи с внешней средой;

б) принципы объединения подсистем могут быть противоречивыми.

Эффективным методом изучения сложных систем является имитационное моделирование, которое позволяет исследовать их поведение в течение продолжительных периодов времени.

В рамках изучения сложных систем существенно расширился круг прогнозируемых микроэкономических показателей, например, прогнозируются такие экономические категории, как инфляция, эффективность управления, качество принимаемых решений и другие.

Во-вторых, изменились задачи прогнозирования. Теперь уже прогнозы даже на макроэкономическом уровне носят сценарный характер, разрабатываются по принципу: "что будет, если ...", - и нередко являются предварительным этапом и обоснованием крупных народнохозяйственных программ. Соответственно изменился горизонт прогнозирования. Макроэкономические прогнозы, как правило, выполняются с периодом упреждения в один год. Современная практика функционирования экономики требует краткосрочных прогнозов (полгода, месяц, декада, неделя). Предназначенных для задач обеспечения опережающей информацией отдельных участников экономики.

В-третьих, соответственно изменениям в объектах и задачах прогнозирования изменился перечень методов прогнозирования. Бурное развитие получили адаптивные методы краткосрочного прогнозирования.

В-четвертых, современное экономическое прогнозирование требует от разработчиков разносторонней специализации, владения знаниями из различных областей науки и практики. В задачи прогнозиста входят владение знаниями о научном (как правило, математическом) аппарате прогнозирования, о теоретических основах прогнозируемого процесса, об информационных потоках, о программном обеспечении, интерпретации результатов прогнозирования.

Тема 1: «Основные понятия теории прогнозирования»

1.1. Методология прогнозирования

1.2. Системный подход в прогнозировании

1.3. Сложные системы

1.4. Объекты прогнозирования

1.5. Показатели прогнозирования

1.6. Два подхода к прогнозированию

1.7. Тренды в прогнозировании

1.8. Оценка качества прогнозирования

1.1. Методология прогнозирования

Прогнозирование – разработка прогноза, т. е. специальное научное исследование перспектив (прошлых тенденций) развития каких-либо явлений (технических, социально-экономических). Методология прогнозирования связана с планированием и моделированием.

Важность прогнозирования для народного хозяйства отражается в сферах его применения как средства:

а) предпланового анализа систем, процессов, объектов с целью установления достоверных показателей функционирования;

б) расчета показателей, не принятых к утверждению как плановых, например, показателей развития социально-экономических систем;

в) исследования многомерных и многофакторных зависимостей;

г) моделирования сложных, а также трудно формализуемых и комплексных показателей;

д) решения вероятностных задач получения интервальных оценок прогнозируемых показателей.

Виды прогнозирования во времени:

1) краткосрочное – 1 год;

2) среднесрочное – 2-5 лет;

3) долгосрочное – 5-10 лет;

4) сверхдолгосрочное – более 10 лет.

Период (время), на который делается прогноз, называется шагом прогнозирования. Различают прогнозирование с постоянным и переменным шагом прогнозирования.

При прогнозировании используются три группы методов:

– экстраполяция (интерполяция);

– моделирование;

– опрос экспертов.

Экстраполяция изучает явление и переносит тенденции этого изученного явления на другую часть этого явления или переносит прошлые тенденции явления на будущие периоды. В научном плане примером является математическая статистика.

Интерполяция имеет сходную с экстраполяцией методологию – ищет промежуточные значения величины (параметра) по некоторым известным ее значениям.

Каждый прогноз имеет свои цели и задачи. Прогнозы могут быть классифицированы следующим образом:

– по виду объекта;

– по масштабу объекта;

– по затратам ресурсов;

– по времени;

– по числу факторов;

– по применяемым методам;

– прочие.

Отметим, что можно было дополнить этот перечень признаком компонентного состава статистического ряда или наличием стационарности и т.д.

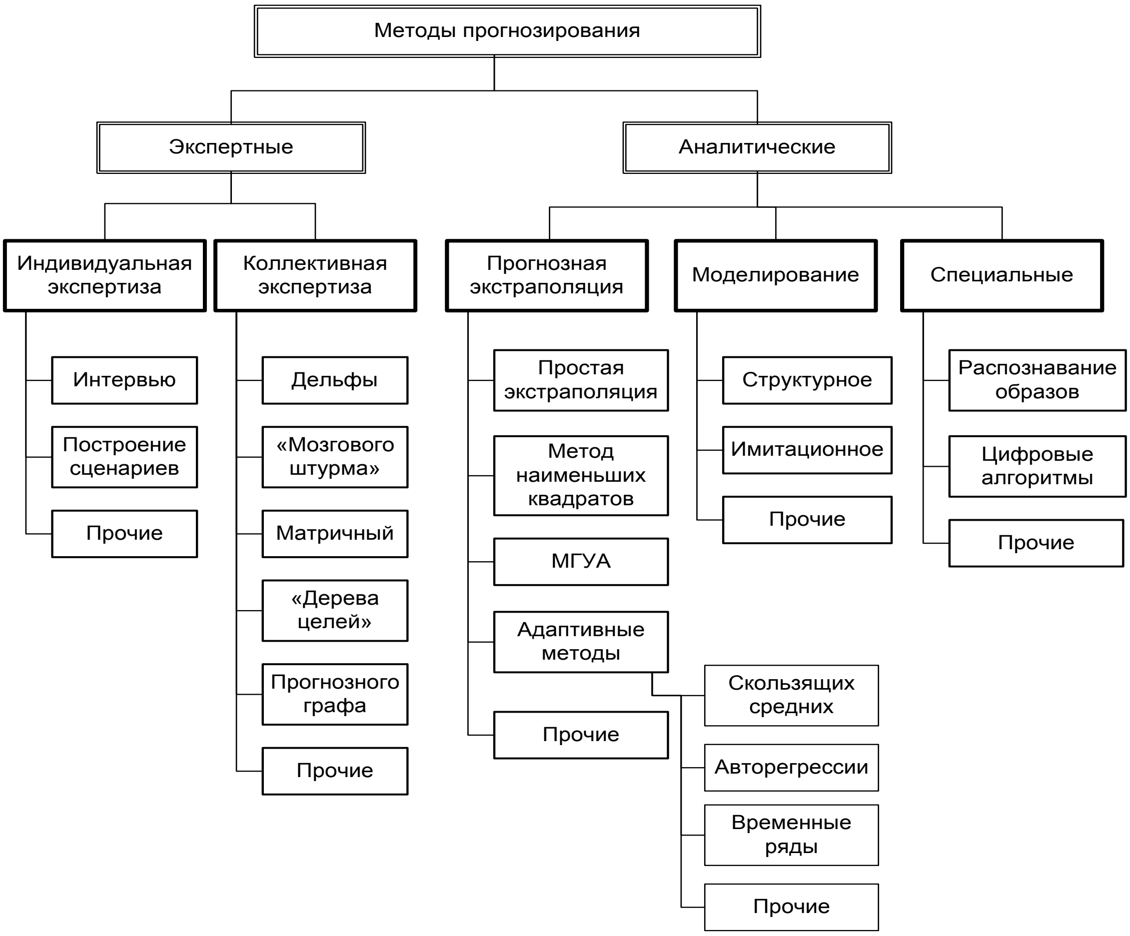

Рис. 1.1. Классификация методов прогнозирования

Любая цель прогнозного исследования, отраженная в классификации, имеет тенденцию к обособлению, т. е. развиваются специальные отрасли знания, ориентированные на углубленное изучение конкретных проблем. Например, желание сравнительного анализа разнородных объектов прогнозирования привело к возникновению теории комплексного показателя оценки эффективности.

Отметим, что каждая классификация должна быть продолжена с точки зрения локальных целей исследования. В этом случае будет построена иерархия классификаций и один и тот же признак займет свое место в разных иерархиях.

Укрупненная классификация методов прогнозирования показана на рис. 1.1.

Особенностью прогнозирования является тот факт, что статистические данные (доступные к моменту времени *t*) об изучаемых явлениях или процессах используются для предварительного анализа и выдвижения гипотез о характере применяемых методов прогнозирования.

Прогнозирование тесно связано с планированием. В частности, их могут объединять общность целей, объекты исследования, а также факторы, показатели для которых планируются или прогнозируются.

Вместе с тем существуют принципиальные отличия прогнозирования от планирования, а именно:

1) ***прогнозироваться могут прошлые показатели развития явления или процесса*** **(** если отсутствуют прошлые статистические данные, а имеются только текущие данные); планируются же, как правило, будущие показатели развития;

2) ***прогнозирование не имеет юридической силы***, однако в последнее время при планировании социальных мероприятий некоторые корректные прогнозные показатели рекомендуются локальной администрацией к утверждению в качестве планов с назначением юридически ответственных лиц.

1.2. Системный подход в прогнозировании

1.2.1. ***Определение системы.*** Любое явление реальной жизни можно отразить понятием “система”. Понятие система появилось в науке с тех пор, как человек научился осмысливать и исследовать процессы, явления, предметы в их взаимосвязи и взаимозависимости.

Определить понятие системы сложно, поэтому идут по пути определения признаков системы. Предполагается, что если признаки системы присутствуют, то можно условно говорить о системе.

Рассмотрим пять основных признаков системы [2, 3] .

Признак элементности – система состоит из элементов (или подсистем), которые взаимодействуют друг с другом.

Признак структурности – система имеет внутреннюю структуру, т.е. входящие в систему элементы или их свойства связаны между собой. Сила этих внутренних связей должна быть заведомо больше, чем сила внешних связей этих же элементов с другими элементами, не входящими в данную систему. Мощность, развиваемая силой внутреннего взаимодействия, порождает интегративные свойства системы, что позволяет отличать систему от простой суммы элементов и выделять ее из окружающей среды в виде единого, целостного образования.

Признак иерархичности - элементы системы связаны отношениями соподчинения (иногда говорят, что элементы системы упорядочены). Степень упорядочения элементов в системе может быть охарактеризована численно.

Признак системного качества (эффект системности) - система в целом может обладать такими качествами (свойствами), которыми не обладают отдельные элементы.

Признак цели – система в целом и все ее элементы подчинены целям развития (функционирования). Цели могут быть противоречивыми (глобальные и локальные цели, согласованный оптимум). Если указан срок достижения цели и даны количественные характеристики желаемого конечного результата, то цель становится задачей. В общем случае цель, как правило, достигается в результате решения ряда задач.

Все признаки равнозначны, но в зависимости от целей прогнозирования исследователь вправе делать соответствующие акценты.

Элементы системы имеют связь с внешней средой.

Каждый признак системы имеет тенденцию к обособлению при конкретном исследовании , что ведет к возникновению специальных отраслей знаний. Например, обособление признака иерархичности привело к появлению методов решения задач двухуровневой оптимизации.

Одним из наиболее важных понятий, применяемых в исследовании систем, является также **внешняя среда** – множество действующих вне системы процессов или элементов любой физической природы.

В научных изданиях часто понятие “система” заменяют словами “объект исследования” или другими синонимами. Аналогичная ситуация наблюдается при отождествлении понятий “прогнозирование систем”, “прогнозирование показателей развития систем ”, “прогнозирование показателей развития” и прочих.

Отметим основные допущения при прогнозировании систем и их показателей:

1) влиянием внешней среды, действующей на объект, пренебрегаем или заменяем на эквивалентное действие отдельных факторов (внешних систем);

2) не всегда будем доказывать, что изучается система: в этом случае ограничимся проверкой наличия признаков системы;

3) если прогнозируется сложный объект, состоящий из многих уровней вложенности, то в зависимости от целей исследования будем поступать следующим образом:

- некоторые признаки системы будем считать второстепенными, т. е. проведем ранжирование признаков системы в зависимости от целей прогнозирования;

- влияние второстепенных признаков системы на прогноз будем считать постоянным (в более сложном случае – изменяющимся по какому-либо закону);

- для упрощения модели исследования будем пренебрегать некоторыми внутренними связями в системе (правило отбрасывания).

Таким образом, *система - это целостное упорядоченное множество стабильно взаимосвязанных и устойчиво взаимодействующих в пространстве и во времени элементов, формирующих ее некоторые интегративные свойства и функционирующих совместно для достижения определенной цели (решения задачи), стоящей перед данной системой.*

В практике прогнозирования изучение любого явления или процесса сопровождается применением категории “подход”. Рассмотрим наиболее распространенные среди них понятия .

1.2.2. ***Подходы к исследованию систем.*** **Системный подход** - это методология, в соответствии с которой объекты, явления и процессы исследуются как системы.

Например, системный подход к изучению процессов функционирования экономических систем требует выявления как роли отдельных подсистем в формировании свойств системы в целом, так и особенностей взаимодействия системы с внешней средой.

Динамический подход - это методология, в соответствии с которой системы, объекты, явления и процессы рассматриваются в движении (динамике), в развитии под действием внешних и внутренних факторов (сил). Динамический подход обеспечивает изучение состояния систем в зависимости от изменения ресурсов, затрат, прибыли, эффективности системы и т.д. во времени.

Структурный подход - это методология научного познания, в соответствии с которой изучаются закономерности в строении систем, объектов, явлений, процессов с целью установления взаимозависимости между их структурой и свойствами.

Функциональный подход - это методология научного познания, в соответствии с которой жизнедеятельность сложной системы рассматривается как такое выполнение локальными подсистемами множества взаимосвязанных функций, которое обеспечивает достижение глобальной цели системы.

Эволюционный подход - это методология научного познания, в соответствии с которой жизнедеятельность сложной системы изучается с позиции ее происхождения (генетики) и развития.

Экономический подход - это методология, в соответствии с которой системы или объекты рассматриваются с точки зрения их роли в организации процесса производства путем распределения, обмена и потребления ресурсов.

Информационный подход - это методология, в соответствии с которой функционирование систем или объектов рассматривается с точки зрения преобразования, хранения, обмена, выдачи и использования информации, необходимой для достижения цели функционирования.

Кибернетический подход - это методология, в соответствии с которой объекты исследования (технические, технологические, экономические, социальные, организационные, биологические и т.д.) рассматриваются с точки зрения эффективного и целенаправленного управления на основе обработки располагаемой информации.

Оптимизационный подход – это методология, в соответствии с которой выполнение системой или объектом тех или иных функций (планирования, управления, проектирования, контроля, конструирования, производства и т.д.) осуществляется таким образом, чтобы достигался максимальный эффект в смысле выбранного критерия.

Ситуационный подход - это методология ориентации (планирования) и принятия решения, в соответствии с которой принимается решение в условиях неопределенности и воздействия окружающей среды .

Социальный подход - это методология, в соответствии с которой принятие решений осуществляется с учетом влияния на систему социальных групп, а также межсоциальных и социопроизводственных отношений.

Экологический подход - это методология, в соответствии с которой объекты исследования рассматриваются с точки зрения эффективного и целенаправленного использования природных ресурсов (воздуха, воды, недр и других), а также с позиций юридической ответственности за нерациональное природопользование.

1.2.3. ***Кибернетическое представление систем.*** Как было отмечено выше, кибернетическое представление систем отражает аспект управления объектом, и с этой точки зрения при прогнозировании целесообразно использовать основные допущения, перечисленные в разделе 1.2.1. В частности, систему можно представить в виде “черного ящика”, пренебрегая при этом внутренней структурой и связями с внешней средой.

Прогнозирование системы (или ее показателей) будет реализовываться на основе изучения входов и выходов системы, как показано на рис. 1.2. Рассмотрим наиболее распространенные способы представления систем в зависимости от способов преобразования входов.

1) Каждому входу u **соответствует один и единственный выход** v. Схема представлена на рис. 1.2, *a*: имеем зависимость

$$v = F(u), \tag{1.1}$$

где u – вход системы (или экзогенная переменная);

v – выход системы (или эндогенная переменная);

F – закон воздействия переменной u на переменную v (функция).

2) Каждому входу u **соответствует один и единственный выход** v **при условии, что известна функция состояния системы** $z = f(u)$**.**

Схема представлена на рис. 1.2, *b*: имеем зависимость

$$v = F(u, z), \tag{1.2}$$

где z – состояние системы.

Таким образом, в системах второго типа учитываются изменения показателей внутреннего состояния в зависимости от изменения входов и внутреннего состояния системы.

3) Системы с многовариантным представлением внутреннего состояния

Система представлена на рис. 1.2, *c*. Системы третьего типа связывают свойства многовариантности, обусловленные неоднозначностью как выбора внутреннего состояния в зависимости от входа, так и неоднозначность выхода при фиксированном внутреннем состоянии.

4) Системы с обратной связью

Система представлена на рис. 1.2, *d*: блок сравнения (или блок анализа) получает информацию из выходного потока и генерирует управляющее воздействие на систему в зависимости от результатов анализа.

Очевидно, что реальные системы представляют собой комбинацию перечисленных представлений.

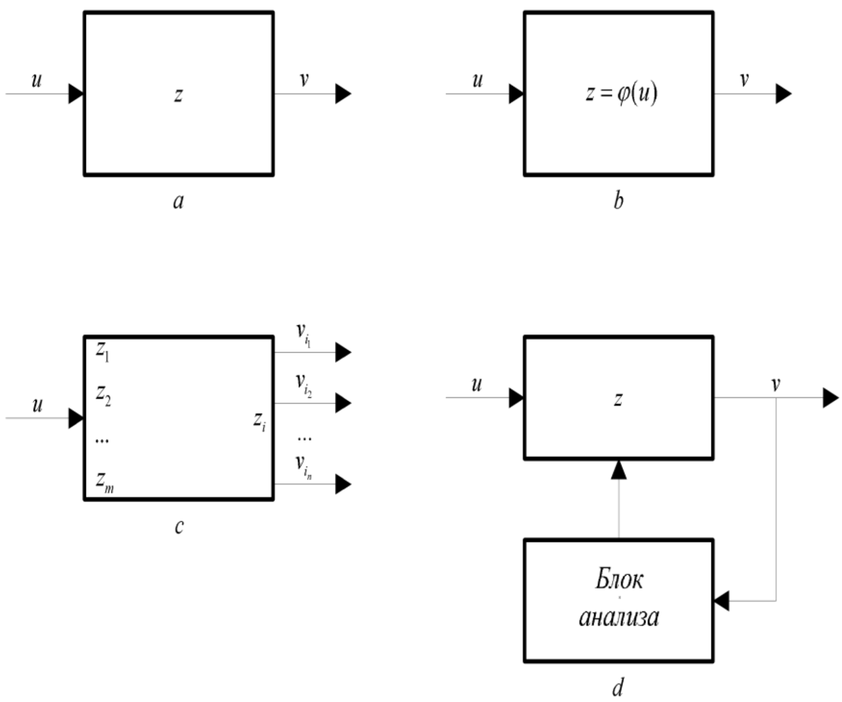

Рис. 1.2. Кибернетическое представление систем

Таким образом, будем рассматривать процесс прогнозирования какого-либо показателя как систему, например, систему, представленную на рис. 1.2, *a*, можем интерпретировать как процесс прогнозирования уровня урожайности от количества вложенных удобрений: $v = F(u)$, где u - количество вложенных удобрений; v - урожайность культуры; z - система, отражающая процесс сеяния и сбора урожая после внесения удобрений.

При прогнозировании реальное явление z заменяется математической моделью, т.е. функция F аналитически “описывает” состояние системы z .

Учитывая способы кибернетического представления систем, рассмотрим укрупненную схему процесса прогнозирования, как показано на рис. 1.3.

Отметим основные достоинства кибернетического подхода к прогнозированию:

1) кибернетическое представление исследуемых процессов помогает четко выделить элементы и показатели прогнозирования: каждый структурный блок – элемент системы (показатель системы);

2) выделение в анализируемых процессах входов и выходов позволяет изучить потоки информации: каждая связь в схеме – управляющее воздействие или поток информации;

3) системный подход обеспечивает различный уровень детализации в представлении изучаемого процесса.

1.3. Сложные системы

Классическое определение сложной системы подразумевает, что это составной объект, части которого можно рассматривать как системы, закономерно объединенные в единое целое в соответствии с определенными принципами или связанные между собой заданными отношениями. Понятие "сложная система" используется в системном анализе в различных областях деятельности. В частности, метод имитационного моделирования является основным средством исследования сложных систем. Классическим принципом выделения сложных систем является территориальный признак (например, район, регион). Для управления процессами, происходящими на территории, выделяются соответствующие отношения на ней: производственные, юридические, социальные, влияние инфраструктур разного уровня (вспомогательные сферы, образование, здравоохранение) и другие.

Сложную систему можно декомпозировать на подсистемы разного уровня, получив, таким образом, иерархическую структуру. Принципы и цели декомпозиции могут быть различными, например,

1) по территориальному признаку – в регионах выделять области, затем в областях – районы;

2) по уровням управления – верхний уровень, являющийся держателем средств, а нижние уровни – потребители;

3) по производственным признакам – объединение и подчиненные ему предприятия и прочие.

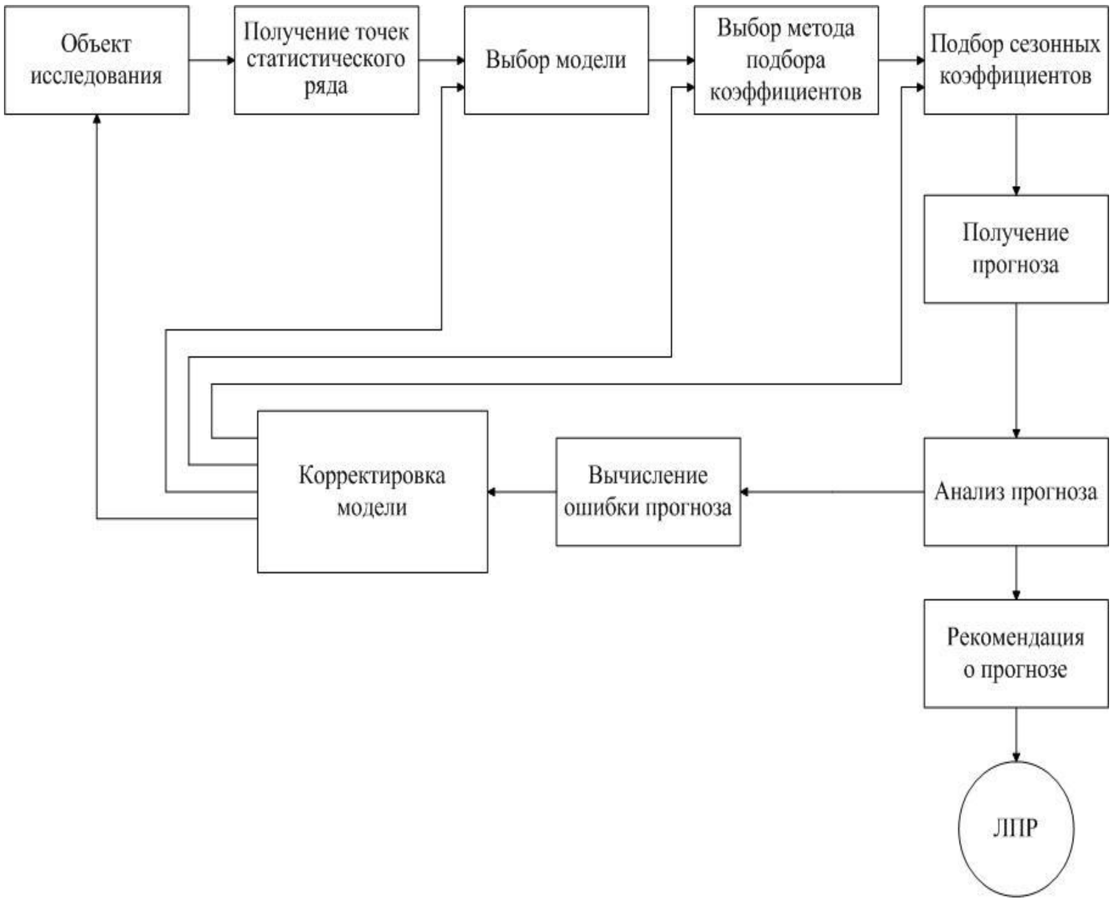

Рис. 1.3. Укрупненная схема процесса прогнозирования

Средства прогнозирования позволяют изучать различные состояния сложной системы, а также исследовать переходы системы из одного состояние в другое под воздействием внешних и внутренних факторов. Динамика поведения элементов сложной системы проявляется в том, что состояние элемента и его выходы в каждый момент времени определяются предыдущими состояниями и входами (в текущий и прошлые моменты времени). Под внешней средой понимаются объекты (и отношения между ними), не являющиеся элементами изучаемой системы.

Элементы (подсистемы) сложной системы функционируют во взаимодействии, т.е. свойства одного элемента в общем случае зависят от условий, определяемых поведением других элементов; свойства сложной системы в целом определяются не только свойствами элементов, но и характером взаимодействия между ними. Этот факт учитывается при моделировании в виде разомкнутых обратных связей.

Социально-экономические системы являются примером сложных систем. При изучении их могут называть экономическими или социальными, подчеркивая глобальную цель исследования – производственную или социальную. Напомним, что социальную сферу образуют здравоохранение, образование, право, религия, институт наследования. Выделяя название “социально-экономический”, подчеркиваем приоритетность изучения связей, возникающих в социальных институтах, традиционно сложившихся на основе правовых норм устойчивой коллективной или индивидуальной деятельности людей с учетом производственных отношений. Таким образом, для социально-экономических систем характерно наличие социальных и экономических взаимосвязей между работниками. Например, к социальным связям можно отнести межличностные отношения; отношения по уровням управления; отношения общественных организаций к человеку и прочие. К экономическим связям относятся: отношения по поводу производства; материальное стимулирование и материальная ответственность; прожиточный уровень; льготы; привилегии и прочие. Важным является и изучение показателей развития системы в зависимости от соотношения перечисленных показателей.

Рассмотрим некоторые примеры сложных систем:

1) ***территориально-производственные комплексы*** (объединения, объекты) – совокупность производственных единиц с органом управления и социальной инфраструктурой;

2) ***процессы управления*** предприятием, отраслью, народным хозяйством – совокупность процессов сбора данных о состоянии управляемых объектов, о формировании потоков информации, ее накоплении, передаче и обработке, синтезе управляющих воздействий;

3) ***вычислительный комплекс*** как структура с соответствующим математическим, программным и техническим обеспечением: компьютерная техника, операционные системы для управления последовательностью вычислений и координации работ всех устройств комплекса, библиотеки стандартных программ, сред-

ства автоматизации программирования (алгоритмические языки, трансляторы, интерпретирующие системы), средства обслуживания и контроля вычислений;

4) ***система управления транспортом*** в городском хозяйстве - регулирование уличного движения в городе или районе с большими потоками автомобилей на автомагистралях и очередями на перекрестках средствами автоматизированного управления движением с учетом реальных ситуаций и пропускной способности улиц.

Классическим методом исследования сложных систем является моделирование, в частности, имитационное моделирование (см. главу 5 настоящего пособия), которое позволяет:

1) изучить системы, для которых не известны аналитические зависимости между показателями функционирования;

2) учесть в имитационном эксперименте воздействие случайных внешних и внутренних факторов системы на результирующие показатели;

3) решить классические задачи прогнозирования показателей развития системы, используя моделирование как средство прогноза.

1.4. Объекты прогнозирования

Изучая объекты прогнозирования, необходимо учитывать, какое место они занимают в исследуемой системе, т.е. являются ли мега-, мезо- или микрообъектами. С другой стороны, желательно учитывать классическое деление объектов на технические, экономические, экологические, социальные и другие.

Рассмотрим некоторые объекты прогнозирования, которые так или иначе используются с точки зрения решения практических прогнозных задач:

1) ***Район*** - а) это территориально-административная единица, которая используется в составе городов, областей, краев;

б) это территория (акватория – участок водной поверхности), которая выделяется по совокупности каких-либо признаков, например, район экологического бедствия.

2) ***Регион*** – территория, очень значительная по размерам, например, Азиатский регион, эколого-экономический регион и другие.

3) ***Территориально-производственный комплекс (ТПК)*** – взаимосвязанное и взаимообусловленное сочетание промышленных объектов (предприятий), объектов производства и социальной инфраструктуры на определенной территории.

ТПК являются прогрессивной формой организации производительных сил в России, например, сырьевые и топливно-энергетические ТПК: Западно-Сибирский ТПК, Южно-Якутский ТПК и др.

4) ***Целевая комплексная программа (ЦКП)*** – это совокупность управленческих и организационных мероприятий, связанных единой программой действий, направленных на решение крупных народнохозяйственных задач социально-экономического развития, значительных научно-технических проблем и проблем развития регионов.

5) ***Социально-экономические объекты*** – объекты, связанные с деятельностью человека.

6) ***Человек*** **-** биологическая система, субъект общественно-экономической и культурной жизни.

7) Прочие.

Все перечисленные объекты могут изучаться с точки зрения как состояния техники и основного производства, так и инфраструктуры. Отметим, что под инфраструктурой понимаются вспомогательные отрасли, обслуживающие основное производство и обеспечивающие жизнедеятельность общества. Перечислим составные части ***инфраструктуры:***

1) ***отрасли, обслуживающие основное производство:***

- водохранилища;
- каналы;
- дороги;
- мосты;
- аэрофлот;
- связь;
- транспорт;

- склады;

2) ***отрасли, обеспечивающие жизнедеятельность общества:***

- образование;
- наука;
- здравоохранение.

Одним из важнейших аспектов прогнозирования является исследование социально-экономического состояния объектов, т.е. социальной инфраструктуры. Это крайне важно для изучения перспектив развития общества в единстве с гармоническим развитием основного его элемента – человека.

1.5. Показатели прогнозирования

Прогнозирование экономических показателей основывается на некоторой сумме профессиональных знаний об объекте исследования. В задачу предпрогнозного анализа входит решение следующих основных вопросов:

1) определение набора переменных, описывающих процесс функционирования исследуемых объектов;

2) анализ структурных связей между отдельными переменными;

3) установление перечня допустимых операций над переменными и связями, т.е., другими словами, выбор рационального типа экономико-статистической модели.

Вопрос выбора прогнозируемых ***результативных признаков*** (экономических показателей) решается относительно просто. Они часто заданы самой формулировкой цели исследования.

Выбор ***независимых переменных (признаков–факторов)*** представляет собой процесс последовательного уточнения первоначальных предположений о прогнозируемых показателях. В этом процессе можно выделить следующие этапы: формирование первичной гипотезы о наборе независимых переменных; экспертная оценка сформированного набора; анализ структурных связей; отбор существенных для прогноза переменных.

В основе формирования первичной гипотезы о наборе переменных лежит общая схема функционирования изучаемого объекта. На перечень переменных, включаемых в первичный набор, накладывают отпечаток назначение модели прогнозирования , тип исследования и т. п. В частности, в модели прогнозирования желательно включать переменные, известные к началу периода прогнозирования или легко поддающиеся оценке.

Рассмотрим некоторые виды признаков, которые рекомендуется выбирать в качестве показателей прогнозирования.

Номинальные признаки—признаки, определяющие качественные неупорядоченные отличия объектов совокупности. Измерение этих признаков производится по шкале наименований, которая обладает весьма слабыми числовыми свойствами. Для этих шкал допустима лишь операция равенство–неравенство. Градации номинальных признаков в форме номера или наименования просто отличают один объект (группу объектов) от другого. При исследовании можно лишь отмечать наличие или отсутствие данной градации признака у единиц совокупности – “да” или “нет” .

Ранговые признаки — это признаки, порождающие упорядоченное разбиение совокупности на классы. Измерение этих признаков производится по шкале порядка, допускающей операции равенство–неравенство и больше–меньше. В этой шкале возможно также любое монотонное преобразование. Например, типичный ранговый признак - сортность продукции. Она характеризует улучшение качества от низшего сорта к высшему. Ответы экспертов обычно также выражаются в виде ранговых признаков (баллов).

Признак называется количественным, если его значения характеризуются числами и он может быть измерен по каждой единице совокупности. Они дают числовую характеристику степени проявления свойств явления. Измерение количественных признаков производится по шкалам двух типов: шкале интервалов и шкале отношений.

Отличительная особенность количественных признаков - возможность жесткого упорядочения значений по числовой шкале. Количественные признаки могут быть дискретными или непрерывными.

К особой разновидности количественных признаков относится набор величин, характеризующих структуру экономических процессов (сортамент продукции, структура производственных фондов и др.). Характерным для этой разновидности признаков является использование комплекса взаимосвязанных измерителей для описания одного явления: например, сортамент продукции описывается удельным весом отдельных видов изделий в общем объеме производства. При использовании в статистическом анализе признаков такого типа необходимо учитывать то, что их сумма для каждого объекта равна постоянному числу (например, единице или 100%). При построении регрессионных моделей прогнозирования, по крайней мере, одна из составляющих структуры должна быть исключена, чтобы избежать искажения коэффициентов регрессии вследствие функциональной взаимосвязи признаков (***явление мультиколлинеарности).***

Поскольку описание объектов экономико-статистического исследования часто включает признаки разных типов, а статистические методы рассчитаны на обработку информации определенных видов шкал, преимущественно метрических, то перед экономистами-исследователями возникает серьезная проблема соизмерения признаков различной природы.

Можно выделить два подхода к ***соизмерению разнотипных признаков.***

Первый основывается на приведении признаков с более развитой шкалой измерений к наименее развитой. Например, если в описание единицы совокупности входят количественные и ранговые признаки, то количественные приводятся к ранговым, а если описание состоит из номинальных, ранговых и количественных, то все признаки сводятся к номинальным.

Для совместного анализа количественных и качественных (номинальных и ранговых) признаков при отсутствии «количественных» соотношений между ними количественные признаки тоже рассматриваются как качественные.

Один из важных этапов процесса формирования исходных данных прогнозно-статистического исследования состоит в выборе или конструировании для каждого признака соответствующих измерителей, которые будут выступать затем как переменные будущей модели. Подавляющее большинство признаков обладает сложной внутренней структурой и описывается набором, комплексом измерителей, о сравнительной важности которых априори судить трудно.

Наличие ***комплекса измерителей*** для одного признака объясняется рядом обстоятельств. Во-первых, некоторые признаки по своей сущности представляют собой многомерные характеристики процесса. Например, сортамент продукции представляет собой совокупность долей отдельных видов продукции. Во-вторых, каждое экономическое явление может быть разложено до некоторых первичных элементов, его составляющих. Третья причина возникновения многомерности признака состоит в объективном существовании нескольких единиц измерения. К примеру, мощность пластов при добыче руд измеряется тремя показателями, каждый из которых имеет свой содержательный смысл: горно-геологическая, средневынимаемая и среднединамическая мощность пластов.

Выбор измерителя для данного признака является ответственным моментом исследования. Измерители должны обеспечивать выполнение требований статистического исследования, а именно:

1) сопоставимость характеристик исследуемого процесса в пространстве, времени и по уровню объекта;

2) полноту описания;

3) предпочтительность количественных оценок перед качественными, натуральных перед стоимостными и т. п.

Одна из сложных проблем подготовки информации - ***обеспечение сопоставимости данных*** в пространстве и во времени для выбранной единицы совокупности. Необходимо обеспечить соблюдение этого важного требования экономико-статистического исследования.

1.6. Два подхода к прогнозированию

В практике экономических исследований различают два подхода к прогнозированию с точки зрения использования ресурсов. Рассмотрим их на примере предприятия. Во-первых, каждое предприятие заинтересовано в изучении текущего состояния своего функционирования в зависимости от наличных ресурсов. Такой подход к изучению возможностей развития предприятия называется ***исследовательским (или генетическим) прогнозированием*** **.**

С другой стороны, каждое предприятие планирует перспективы своего развития, в частности, производство новых изделий с требуемыми техническими и экономическими показателями в требуемых объемах. В этом случае основой для прогноза являются предполагаемая цель и ее будущие параметры, на основании которых исследуются долговременные перспективы развития. При этом определяются объемы финансирования, которые обеспечат достижение заданной цели развития. Такой подход к прогнозированию называется ***нормативным (или целевым).***

Связь двух подходов к прогнозированию показана на рис. 1.4.

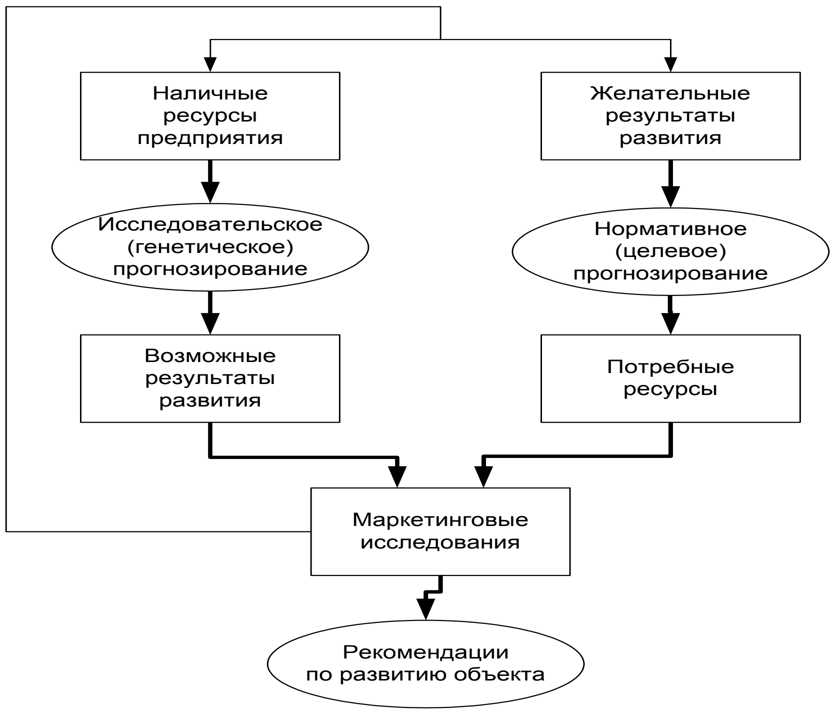

Рис. 1.4. Связь двух подходов к прогнозированию

В прогнозах, которые разрабатываются на предприятиях, предусматривается, как правило, использование нормативного подхода, т.е. ориентация на удовлетворение потребностей владельца и решение стоящих перед предприятием социальных, экономических, технических, производственных и прочих задач, позволяющих определить и экономически обосновать его перспективную политику.

При этом не исключается параллельное использование и исследовательского подхода, на основе которого возможно получение более объективной картины будущего, чем с помощью нормативного.

Составление и согласование прогнозов на базе указанных двух подходов способствует получению наиболее полного материала для определения политики предприятия.

Отметим, что обсуждаемая в этом разделе цель исследования может быть отражена как “цель исследования по затратам ресурсов”.

1.7. Тренды в прогнозировании

При прогнозировании показателей, зависящих от времени, опираются на тот факт, что статистические ряды, используемые для анализа, включают в себя пять компонентов:

1) *тенденции*, характеризующие долговременную основную закономерность развития исследуемого явления;

2) *периодическую или сезонную компоненту*, связанную с влиянием сезонности развития изучаемого явления;

3) *циклическую компоненту*, характеризующую циклические колебания, свойственные любому воспроизводству (например, циклы обновления, связанные с чисто техническими проблемами);

4) *случайную компоненту*;

5) *случайную несистематическую компоненту*, вызванную неточностями сбора статистических данных.

Для выделения этих компонент используют различные методы.

1.7.1. Определение тренда. Под ***тенденцией*** понимают некоторое общее направление развития, долговременную эволюцию. Тенденцию ряда динамики представляют в виде гладкой кривой (траектории), которая аналитически выражается некоторой функцией времени, называемой трендом. ***Тренд***, как правило, характеризует основную закономерность движения во времени и представляется следующим образом:

$$x_t = \xi_t + \eta_t, \qquad (1.3)$$

где x_t – текущий член временного ряда в момент времени t;

ξ_t – случайная величина, которая генерируется детерминированной функцией или стохастическим процессом;

η_t – случайная величина, которая генерируется случайным неавтокоррелированным процессом с математическим ожиданием $M = 0$ и постоянной дисперсией.

Тренды могут быть детерминированными, случайными и комбинированными. Они записываются следующим образом:

$$\xi_{1t} = a_1 + a_2\, t + a_3\, t^2, \qquad (1.4)$$

$$\xi_{2t} = \xi_{2(t-1)} + u_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i\ , \qquad (1.5)$$

$$\xi_{3t} = a_1 + a_2\, t + u_t + q\, u_{t-1} + b \sin\omega t\ , \qquad (1.6)$$

где ξ_{1t}, ξ_{2t}, ξ_{3t} – детерминированный, случайный и комбинированный тренды соответственно;

t – время;

$a_1, a_2\ , a_3\ , b, q,\ \omega$ – коэффициенты (действительные числа);

$u_t\ , u_{t-1}$ – случайные переменные.

Для выделения тренда используют различные методы, например, скользящих или экспоненциальных средних. Рассмотрим один из них.

1.7.2. Выделение тренда с помощью метода скользящих средних. Если уровни ряда (конкретные статистические значения ряда)имеют резкие колебания (возможно, периодические), то наиболее простым методом определения тренда является сглаживание динамического временного ряда методом скользящих средних. Для этого фактические уровни ряда заменяются скользящими средними при условии, что выбран период скольжения: 3, 5, 7 или другое нечетное число. Скользящие средние представляют собой средние уровни за определенные периоды времени (3, 5, 7) путем последовательного передвижения начала периода на единицу времени. Рассмотрим пример, исходные данные для которого приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем производства x_t (тонн)	35	31	40	34	18	30	34	40	29	40	42

Рассчитаем 3-членную скользящую среднюю. Правый сглаженный уровень получим для t =2: $\overline{x_t} = \frac{35+31+40}{3} = 35,3$. Последовательно сдвигая на t =1 начало периода скольжения, находим сглаженные уровни для других t . Так, для t =3 скользящая средняя составит: $\overline{x_3} = \frac{31+40+34}{3} = 35,0$ и так далее. Результаты сглаживания представлены в табл. 1.2. Так как скользящая средняя относится к середине интервала , за который она рассчитана, то сглаженный ряд сокращается на (n-1) уровень при нечетном скольжении и на n уровней - при четном периоде скольжения.

Таблица 1.2

t	Фактический уровень ряда, x_t	Сглаженные уровни	
		3-членная	5-членная
1	35	-	-
2	41	35,3	-
3	40	35,0	31,6
4	34	30,7	30,6
5	18	27,3	31,2
6	30	27,3	31,2
7	34	34,7	30,2
8	40	34,3	34,6
9	29	36,3	37,0
10	40	37,0	-
11	42	-	-

1.8. Оценка качества прогнозирования

Качество прогнозирования, прежде всего, характеризуется ошибкой прогноза (математическое определение качества прогноза): предполагается, что чем меньше ошибка прогноза, тем выше качество прогноза.

Все существующие методики оценки качества прогнозирования можно условно разделить на три группы показателей:

1) абсолютные;

2) сравнительные;

3) качественные.

Абсолютные показатели оценки качества прогноза позволяют количественно определить величину ошибки прогноза в единицах измерения прогнозируемого объекта или в процентах. Это среднеквадратическая ошибка σ_t, абсолютная ошибка $\Delta_{\text{пр}}$, средняя абсолютная ошибка $\bar{\Delta}_{\text{пр}}$, относительная ошибка $\varepsilon_{\text{пр}}$ и средняя относительная ошибка $\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}$. Рассмотрим эти показатели.

Абсолютная ошибка прогноза может быть определена как разность между фактическим значением (x_i) и прогнозом (x^*_i), значит,

$$\Delta_{\text{пр}} = x_t - x_t^* \quad ; \tag{1.7}$$

среднее абсолютное значение ошибки

$$\bar{\Delta}_{\text{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_t - x_t^* \right|}{n} . \tag{1.8}$$

Среднее абсолютное значение всегда неотрицательно, так как $\bar{\Delta}_{\text{пр}}$ неотрицательно (и когда $\Delta_{\text{пр}}$ отрицательно, т.е. $x_t^* > x_t$). Среднеквадратическая ошибка прогноза рассчитывается по формуле

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_t^* - x_t)^2}{n}} , \tag{1.9}$$

где n — период упреждения.

Следует отметить, что существует связь среднего абсолютного отклонения $\bar{\Delta}_{\text{пр}}$ со стандартным отклонением σ_t .

Для большого класса статистических распределений значение стандартного отклонения несколько больше значения среднего абсолютного отклонения и строго пропорционально ему. Константа пропорциональности для различных распределений колеблется между 1.2 и 1.3. Чаще всего на практике берется значение 1.25, поэтому

$$\sigma_t = 1.25 \cdot \bar{\Delta}_{\text{пр}} \quad . \tag{1.10}$$

Недостатком рассматриваемых показателей является то, что значение этих характеристик существенно зависит от масштаба измерения уровней исследуемых явлений.

Поэтому абсолютная ошибка прогноза $\Delta_{\text{ïð}}$ может быть выражена в процентах относительно фактических значений показателя следующим образом:

$$\Delta_{\text{ïð}} = \frac{x_t - x_t^*}{x_t} \cdot 100 \quad (\%), \qquad (1.11)$$

а средняя относительная ошибка $\overline{\Delta}_{\text{ïð}}$ рассчитывается как

$$\overline{\Delta}_{\text{пр}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{\left| x_t - x_t^* \right|}{x_t} 100\,(\%). \qquad (1.12)$$

Данный показатель, как правило, используется при сравнении точности прогнозов разнородных объектов прогнозирования, поскольку этот показатель характеризует относительную точность прогноза.

Если на практике x_t >0, то $\Delta_{\text{ïð}}$ становится бесконечной величиной. Поэтому при экономическом прогнозировании для случаев, когда данные не могут принимать нулевые значения, вычисляется $\Delta_{\text{ïð}}$. Если же x_t=0, целесообразно пропустить соответствующие вычисления, уменьшая при этом и число n на единицу.

Средняя абсолютная и среднеквадратическая ошибки фиксируют среднее значение ошибки на каждом шаге прогноза без учета этой ошибки. Средняя ошибка позволяет определить, какой вид ошибки является наиболее типичным — недооценка или переоценка прогнозируемого показателя. Необходимо иметь в виду, что $\Delta_{\text{ïð}}$ и $\sigma_{\text{пр}}$ равны нулю только тогда, когда $x_t = x^*_t$ для каждого t, т. е. в случае совершенного прогноза. Аналогичное утверждение несправедливо для абсолютной ошибки $\Delta_{\text{ïð}}$, поскольку здесь может иметь место взаимопогашение ошибок. Для расчета этих показателей могут быть использованы как абсолютные величины переменных, так и их приросты или темпы приростов.

Сравнительные показатели оценки качества прогноза основаны на сравнении ошибки рассматриваемого прогноза с эталонными прогнозами определенного вида.

Один из типов таких показателей (k) может быть представлен следующим образом:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(p_t - x_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(p_t^* - x_t)^2}}, \qquad (1.13)$$

где p^*_t — прогнозируемое значение величины эталонного прогноза.

В качестве эталонного прогноза может быть выбрана простая экстраполяция, постоянный темп прироста и т.п. Частным случаем показателей такого типа является ***коэффициент несоответствия*** ($k_{\text{Н}}$), в котором $p^*_t = 0$ для всех t:

$$k_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t^* - x_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}}, \qquad (1.14)$$

где $k_{\text{Н}} = 0$ в случае совершенного прогноза.

$k_{\text{Н}}$ не имеет верхней конечной границы. В случае необходимости можно построить различные модификации коэффициента несоответствия.

К сравнительным показателям следует отнести и ***коэффициент корреляции*** (R) между прогнозируемыми и фактическими значениями переменной:

$$R = \frac{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(x_t^* - \bar{x}_t)(x_t - \bar{x})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t^* - \bar{x}^*)^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}}. \qquad (1.15)$$

Одним из недостатков использования коэффициента корреляции в качестве измерителя точности прогнозов является то, что полная положительная корреляция не предполагает совершенного прогноза. Например, если R=l, то это означает, что существует линейная зависимость между рядами прогнозных и фактических величин, т.е. можно подобрать такие константы α и β (β>0), что $x_t^* = \alpha + \beta\, x_t$. При этом для совершенного прогноза необходимо, чтобы $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Вследствие этого коэффициент корреляции наиболее пригоден для анализа прогнозов циклически развивающихся переменных.

Качественные показатели позволяют провести некоторый анализ видов ошибок прогнозов, разложить их на какие-либо составляющие. Особенно такой анализ важен для циклически изменяющихся переменных, когда необходимо прогнозировать не только общее направление развития, но и поворотные точки цикла, в которых меняются коэффициенты адаптации прогнозной модели.

Одним из методов такого анализа является построение диаграмм (или графиков) в одних координатных осях для реальных и прогнозных данных.

Использование диаграмм позволяет содержательно оценить качество различных прогнозов, рассчитать некоторые коэффициенты, анализирующие качество прогнозирования, а также позволяет выделить наиболее типичные ошибки (недооценки или переоценки изменений) прогнозирования.

Все рассмотренные выше показатели точности прогноза используются при проверке точности прогноза, полученного в виде точечных оценок. Если же при прогнозировании получен интервальный прогноз, то мерой точности прогноза может быть относительное число случаев к общему числу случаев, предложенное Е.М. Четыркиным :

$$\eta = \frac{p}{p+q} \quad , \qquad (1.16)$$

где p – число прогнозов, подтвержденных фактическими данными;

q – число прогнозов, не подтвержденных фактическими данными.

Если η =1, то все прогнозы подтверждаются, и η =0, если прогнозы не подтверждаются (p=0).

Рассмотренные выше показатели точности прогноза могут быть использованы только при наличии информации о фактических значениях исследуемого показателя. Все они имеют большую ценность при сопоставлении различных методик прогнозирования.

Если же статистических данных о прогнозируемом показателе нет, то проблема точности рассматривается как проблема сопоставления априорных качеств или свойств, присущих альтернативным прогностическим моделям. Причем при прогнозировании статистическими методами понятия априорной точности прогноза связывают с размером доверительного интервала. В этом случае модель-прогноз считается более точной, если при одной и той же доверительной вероятности она дает более узкий доверительный интервал по сравнению с другой моделью.

Выбор показателей точности прогнозов зависит от задач, которые ставит перед собой исследователь при анализе точности прогноза. При этом необходимо помнить о фоне прогнозирования.

Важным критерием правильности применения прогнозной модели является ***проверка на адекватность***. Адекватными моделями считаются такие, для которых ***остаточная компонента имеет свойства независимости, случайности и нормальности распределения.***

Для проверки корреляции внутри ряда применяется ***критерий Дарбина–Уотсона.*** В соответствии с этим критерием, если величина d близка к 2, то можно считать модель регрессии достаточно адекватной:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{m}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^{m} e_i^2}, \qquad (1.17)$$

где m – длина временного ряда;

e_i – ошибка прогноза: $e_i = x_i - \overline{x_i}$.

Тема 2: «Прогнозирование с привлечением коллектива экспертов»

2.1. Метод Дельфы

2.2. Учет фона прогнозирования

2.3. Метод “Дерева целей ”

2.4. Метод прогнозного графа

Когда нет возможности определить значения тех или иных показателей экспериментально или из ранее зарегистрированных данных, приходится полагаться на субъективные оценки. В подобных случаях чаще всего желательно воспользоваться мнением коллектива экспертов, а не отдельного лица. Такой коллектив должен состоять из специалистов, обладающих глубокими знаниями прогнозируемого процесса и по возможности облеченных правом принимать ответственные решения. Выявление индивидуальных точек зрения и формирование на их основе единого мнения коллектива экспертов могут осуществляться различными методами, например, могут быть рассчитаны ранговые коэффициенты корреляции для различных вариантов экспертных групп.

Особое внимание при использовании экспертных оценок в прогнозировании следует уделять вопросам точности и надежности получаемых прогнозов. Точность и надежность прогнозов на основе экспертных оценок достигаются следующими способами:

а) тщательным подбором членов экспертной группы, как правило, ведущих ученых и практиков в данной области знаний, проверкой их компетентности;

б) методом экспериментальных проверок компетенции всей привлекаемой к экспертизе группы, т. е. организацией серий опытов, при которых экспериментатор знает ответ, а члены экспертной группы не знают. Если на основе нескольких итераций получают вполне удовлетворительный ответ, то прогнозы данной экспертной группы считаются вполне надежными;

в) возможностью организации проверки полученного прогноза другими методами (моделированием, прогнозированием на основе трендовых моделей и т. д.);

г) простотой опросной анкеты и четкостью очертаний прогнозируемого явления (технического объекта);

д) сокращением по возможности числа прогнозируемых показателей;

в) определением наиболее оптимальных промежутков между турами опросов.

Метод экспертных оценок как способ получения прогнозов имеет определенные недостатки:

а) часть специалистов экспертной группы или даже один наиболее активный член группы могут оказывать давление на всех членов, и, если такое мнение ошибочно, может быть получен неправильный прогноз;

б) в отдельных случаях на решения членов экспертной группы может оказать отрицательное влияние не глубина доводов, а количество замечаний «за» или «против»;

в) возможно также, что проблема достижения соглашения между членами экспертной группы будет иметь более важное значение, чем тщательно разработанный прогноз.

Несмотря на отмеченные недостатки, методы экспертных оценок остаются важнейшим и наиболее надежным способом прогнозирования во многих сферах народного хозяйства, в частности, при прогнозировании научно-технического прогресса.

Рассмотрим некоторые из групповых методов проведения экспертизы.

2.1. Метод Дельфы

Метод Дельфы был разработан в корпорации РЭНД Хелмером и Далки и назван в честь греческого города Дельфы, где проживал древний оракул, славившийся своими пророческими предсказаниями.

Метод Дельфы - итерационная процедура, которая позволяет подвергать мнение каждого эксперта критике со стороны всех остальных, не заставляя их фактически сталкиваться лицом к лицу. Идея метода заключается в том, чтобы создать механизм, обеспечивающий сохранение анонимности точек зрения отдельных лиц и тем самым свести к минимуму влияние красноречивых и обладающих даром убеждать личностей на поведение группы в целом. Все взаимодействия между членами группы находятся под контролем со стороны координатора или руководящего звена, направляющего всю деятельность группы. Координатор регулирует процедуру анализа мнений и сохраняет их анонимность. Групповая оценка вычисляется им путем некоторого усреднения (обычно посредством нахождения среднего значения, или медианы) и доводится до сведения всех членов группы.

Рассмотрим в качестве примера распространенную задачу определения значения некоторого числа N. Пусть в группе экспертов будет 12 членов. Метод Дельфы имеет несколько вариантов, и мы могли бы выбрать следующий способ действий:

1. Опросить каждого члена группы по отдельности, какова его оценка числа N.

2. Расположить ответы на общей шкале в порядке возрастания значений и определить квартили Q_1, M и Q_3 таким образом, чтобы в каждом из четырех отрезков шкалы содержалась четвертая часть всех оценок. Результат при 12 членах группы будет выглядеть так, как это показано на рис. 2.1.

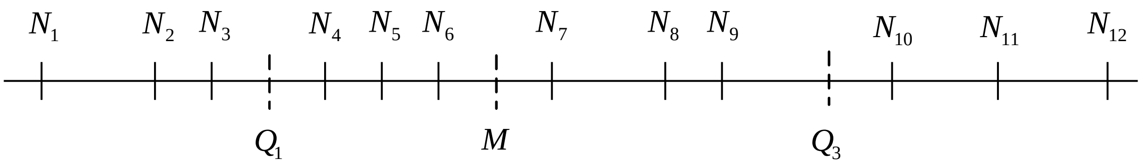

Рис. 2.1. Схема метода Дельфы

3. Сообщить каждому из членов группы значения Q_1, M, Q_3 и попросить его пересмотреть свою оценку, а если его новая оценка выше Q_3 или ниже Q_1, попросить его четко обосновать свое мнение.

4. Подсчитать результаты второго тура и сообщить членам группы новые значения Q_1, M и Q_3 (обычно эти значения будут иметь меньшую дисперсию, чем после первого тура) вместе с письменными обоснованиями предельных значений (обязательно сохраняя анонимность мнений). Попросить каждого из представивших письменные ответы учесть новые данные и аргументацию и при желании пересмотреть свою предыдущую оценку. Если в этом третьем туре пересмотренная оценка у данного члена группы будет выше Q_3 или ниже Q_1, попросить его кратко обосновать, почему он счел не заслуживающими внимания аргументы, которые могли бы заставить его сместить свою оценку ближе к средней.

5. Повторять эту процедуру столько раз, сколько представляется желательным координатору или пока промежуток между Q_1 и Q_3 сузится до некоторой заранее установленной величины. Для этого обычно требуется всего три или четыре тура, поскольку аргументы скоро начинают повторяться. Далее берется медиана как представляющая групповое мнение относительно того, каким должно быть значение N.

Как отмечалось ранее, возможны некоторые варианты метода Дельфы. Например, вместо использования медианы и квартилей можно брать среднее значение и среднеквадратическое отклонение. В этом случае координатор сообщает членам группы в каждом туре среднее значение и среднеквадратическое отклонение и просит их кратко обосновать все оценки, отличающиеся от среднего значения больше, чем на среднеквадратическое отклонение (в любую сторону). Разумеется, предполагается, что полученные от экспертов данные будут иметь нормальное распределение относительно среднего значения, но это допущение не обязательно справедливо. Опросы можно повторять до тех пор, пока среднеквадратическое отклонение не уменьшится до заданной величины или пока не станет ясно, что дальнейшего уменьшения дисперсии оценок не будет. Необязательно стремиться во что бы то ни стало к полному единству оценок: разброс мнений – нормальное явление даже в последнем туре.

Цель метода Дельфы – уменьшить психологическое давление, испытываемое некоторыми людьми при личном контакте, и, следовательно, исключить влияние на конечный результат особо красноречивой или сильной личности. Однако метод нельзя считать полностью надежным. Например, неизвестно, какое влияние на расхождение мнений оказывает желание участников приспособиться к общему мнению группы или устранение основных причин разногласий. Возложение на членов группы ответственности за обоснование своих мнений явно влечет за собой стремление экспертов располагать оценки ближе к медиане без особой аргументации. Кроме того, те участники, которые первоначально были уверены, что обладают сильными аргументами в пользу своего мнения, легко могут отказаться от своих позиций, когда видят, что им не удалось сразу же убедить остальных членов группы. Это может усилить «эффект толпы» вместо того, чтобы уменьшить его, как ожидалось.

Метод Дельфы, предполагающий анонимность мнений, итеративную процедуру обработки результатов, управляемую обратную связь, числовые оценки и статистическое определение групповой оценки, является ценным инструментом исследования для разработчиков имитационных моделей. По данным Куэйда [38], проведенные эксперименты показали следующее:

1) личные дискуссии не дают столь же эффективных результатов, как метод Дельфы;

2) точность оценки улучшается с ростом числа членов группы и увеличением количества итераций;

3) точность оценки падает с увеличением интервала времени между ответами членов группы.

При использовании метода Дельфы достигается бóльшее согласие между групповым мнением и мнениями отдельных членов группы, чем при методах, требующих личных контактов. Эта сторона дела, очевидно, особенно важна, если некоторые из членов группы являются руководящими работниками, ответственными за внедрение результатов имитационного моделирования.

2.2. Учет фона прогнозирования

Прежде чем приступить к разработке прогноза на каком-либо объекте , необходимо дать всестороннюю оценку экономического, политического, технического и т.д. состояния среды, в которой функционирует объект или протекает социально-экономический процесс, в масштабах района, региона или страны в целом. Среду в прогнозировании называют ***фоном***. Состояние фона оказывает определенное влияние на реализацию прогноза, степень его достоверности и надежности. Правильная оценка фона способствует ускорению реализации мероприятий на объекте прогнозирования. Если состояние фона не учтено или будет оценено неправильно, это может привести к неправильным прогнозам.

При прогнозировании необходимо учитывать и оценивать влияние следующих основных видов фона: политического, экономического, социального, научно-технического, организационного, экологического, демографического.

Оценка ***политического фона*** должна дать всесторонний ответ о соответствии прогноза политической стратегии развития объекта, включая его внешнее и внутреннее положение. Характерной чертой политического фона является его активное воздействие на все этапы реализации прогнозов. Политический фон обусловлен многими объективными факторами. Сложный характер его делает особенно актуальной задачу его учета при прогнозировании .

Чтобы правильно оценить ***экономический фон***, также необходимо учитывать законы развития общества, знать законы развития народного хозяйства, методы повышения эффективности общественного производства. В оценку экономического фона следует включать и безусловное знание основных народнохозяйственных показателей: национального дохода, фондов накопления и потребления, материалоемкости, валовой продукции по важнейшим отраслям народного хозяйства, объемов капитальных вложений, стоимости основных производственных фондов, проблем повышения производительности труда и т. д.

Для оценки ***социального фона*** анализируется состояние социальной инфраструктуры: высшее и среднее специальное образование, выпуск специалистов по различным специальностям; школьное образование, наличие производственно-технических комплексов по повышению квалификации и переподготовке кадров и др.; наличие, состояние и использование культурно-просветительных учреждений, библиотек; состояние здравоохранения и физической культуры: наличие клиник, больниц, спортивных сооружений, объектов по восстановлению и реабилитации здоровья работников и т. д. Особое значение придается оценке состояния торговли, в том числе кооперативной, факторам роста товарооборота. К оценке социального фона можно отнести также наличие и состояние дорог, развитие транспортных средств.

При оценке ***научно-технического фона*** нужно ответить на вопрос о научно-техническом обеспечении целевой программы прогнозирования. Прежде всего, оцениваются наличие и планируемые поставки машин, конструкций, оборудования, программного обеспечения, интеллектуальной собственности и т.д.

Оценка ***организационного фона*** заключается в подробной характеристике организаций и подразделений, которые прямо или косвенно связаны с реализацией прогнозов. Рассматриваются мероприятия по взаимной увязке работы всех подразделений. Особое внимание уделяется вопросам материально-технического обеспечения, выполнению заказов с соблюдением сроков поставки всех видов ресурсов. Рассматриваются вопросы координации работы.

Оценка ***экологического фона*** заключается в характеристике природных ресурсов и анализе их использования в процессе реализации прогнозов. Определяются основные направления и мероприятия по борьбе с загрязнением окружающей среды и рационализации природопользования. Оценка экологического фона органически связана с оценкой научно-технического фона и его социально-экономических последствий.

Для учета ***демографического фона*** определяются общая численность населения, его структура по полу, возрасту, социальному и профессиональному составу, размерам семьи, образованию и т.д., если таковые факторы влияют на прогноз.

Большое значение в прогнозировании имеет выявление темпов естественного и механического движения, определение численности населения в трудовом возрасте, средней продолжительности жизни и т. д. Особое значение приобретают прогнозы будущей численности населения, так как это связано с развитием инфраструктуры, обеспечивающей функционирование общества.

Для определения степени влияния отдельных факторов, составляющих фон, в практике прогнозирования используют матрицу коэффициентов, показанную для трех фонов в табл. 2.1.

В данной таблице:

a_{ii}, b_{ii}, c_{ii} - экспертные оценки политического, экономического и социального фонов соответственно;

a_{ii}^{1}, b_{ii}^{2}, c_{ii}^{3} - показатели степени влияния элементов фона (например, ^{1} - отсутствует, ^{2} - слабое, ^{3} - сильное);

$A=\sum a_i$, $B=\sum b_i$, $C=\sum c_i$ – степени влияния отдельных видов фона;

$\sum = A+B+C$ - общее влияние фона.

Сумма всех оценок для каждого вида фона заключается в пределах:

$$i \le \sum \le 3i,$$

где i - число элементов фона в зависимости от степени влияния.

Если $\sum \le 2i$, то данный фон можно не учитывать.

2.3. Метод «Дерева целей»

Развитие сценарного прогнозирования привело к разработке двух взаимосвязанных между собой методов: прогнозного графа и «дерева целей». Как известно, графом называют геометрическую фигуру, состоящую из вершин – точек, соединенных отрезками – ребрами. Графы могут содержать или не содержать циклы (петли), быть связными или несвязными, ориентированными или неориентированными. Если связный граф не содержит петель и ориентирован, то такой граф называют деревом целей, т. е. дерево – это связный граф, выражающий взаимосвязи и соподчиненность элементов.

«Дерево целей» и метод прогнозного графа являются методами прогнозирования сложных систем или процессов, в которых возможно выделение многих структурных или иерархических уровней. ***Дерево целей*** строится на основе последовательного выделения все менее значительных уровней и событий. Пример построения дерева целей показан на рис. 2.2.

Как видно из рис. 2.2, каждая ветвь на более низком уровне разделяется на два еще более низких следующих уровня. Ветви, исходящие из одной вершины, должны быть взаимоисключающими и образовывать замкнутые множества с перечислением всех элементов конечного множества. Дерево целей строится для решения каждой отдельной проблемы. Когда на одном иерархическом уровне достигнуты все цели, то достигнуты поставленные цели и на следующем, более высоком уровне. Когда достигнуты все подцели, то будет достигнута и общая цель. Вместо перечисленных альтернативных целей путем построения дерева целей возможно представление в таблице списка альтернативных решений.

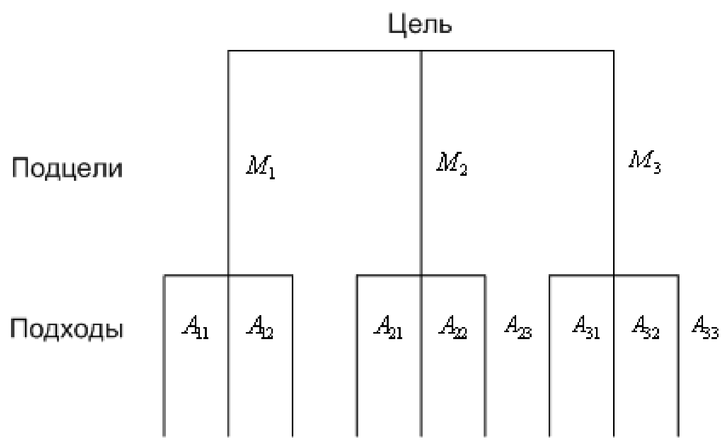

Рис. 2.2. Пример построения дерева целей

Для оценки значимости подходов можно приписать каждому из них коэффициент относительной важности. При присвоении коэффициентов следует учитывать, что их сумма должна быть равна единице. Это условие называют нормированием. Рассмотрим это с помощью рис. 2.2.

Следуя по всевозможным цепочкам от вершины до основания дерева, можно вычислить коэффициенты относительной важности по каждой ветви дерева целей.

2.4. Метод прогнозного графа

Наряду с деревом целей на тех же принципах основано прогнозирование крупных целевых программ ***методом прогнозного графа.*** Исторически впервые этот метод был применен в 70-х годах к прогнозированию научных и технических работ, необходимых для создания технических средств обработки информации, а также при оценке развития вычислительной техники. В основу этой методики также положено первоначальное осуществление подцелей и событий, лежащих на низких уровнях иерархии. Рассмотрим основные этапы этого метода.

Подготовительный этап. Первая группа экспертов четко формулирует глобальную цель исследования. Каждый эксперт в отдельности разрабатывает матрицу “цель – средства”, указывая промежуточные цели и средства их достижения. Делаются ориентировочные количественные оценки средств, необходимых для достижения подцелей. Затем выполняются уточняющие этапы метода.

Первый этап. Каждый эксперт делает уточненный список промежуточных целей с указанием:

а) отношений подчиненности;

б) имен специалистов, которые могут осуществить эти цели;

в) списка целей второго этапа.

Второй этап. Цель этого этапа – анализ промежуточных целей первого этапа. Второй этап выполняется второй группой экспертов, которая полностью отличается по составу от первой группы. Каждый эксперт выполняет следующие действия:

а) строятся графы, связанные с достижением промежуточных целей;

б) на основании графов пункта а) корректируются цели второго этапа;

в) графы детализируются до промежуточных графов, и выполняется их проверка на отсутствие циклов и тупиков.

Результаты работы экспертов второго этапа требуют циклической корректировки действий по согласованию промежуточных целей с экспертами первого этапа. Если промежуточные цели второго этапа достаточно сложны, то необходимо переходить на новый уровень детализации подграфов.

Третий этап. Прогнозный граф, полученный в результате полной реализации первого и второго этапа, анализируется третьей группой экспертов с точки зрения количественных оценок каждой вершины и работы (вершина – цель, дуги – работы).

На рис. 2.3 приведена условная схема построения прогнозного графа. Для прогнозного графа рассчитываются следующие числовые характеристики:

1) время выполнения каждой подцели всего комплекса работ по формуле

$$t_\upsilon = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_{\upsilon j} \cdot V_j}{\sum_{j=1}^{m} V_j}, \qquad (2.1)$$

где t_υ – время выполнения цели υ;

$t_{\upsilon j}$ – время свершения υ- го события по оценке j–го эксперта;

V_j – относительный вес авторитета j–го эксперта;

m – число экспертов в группе;

2) вероятность осуществления глобальной цели

$$P_j = P_{j_1} \cdot P_{j_2} \cdot \ldots \cdot P_{j_{n_j}}, \qquad (2.2)$$

где P_j – вероятность достижения глобальной цели, по мнению j-го эксперта;

$P_{j_{n_j}}$ – вероятность осуществления условия n_j, по мнению j-го эксперта;

3) вероятности выполнения всех событий (целей) графа по формулам теории вероятностей. Близость P_j к единице указывает на высокую вероятность достижения глобальной цели.

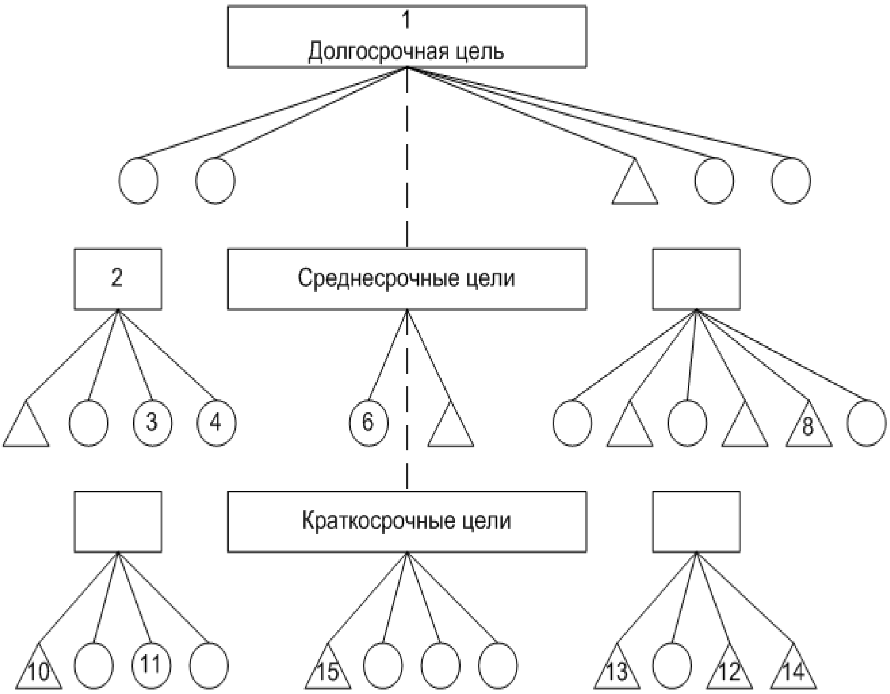

Рис. 2.3. Схема построения прогнозного графа

При использовании прогнозного графа каждой дуге, выходящей из вершины, также можно присвоить коэффициент относительной важности Z_j^i, который будет показывать вклад отдельных элементов в подцели прогнозного графа.

Тема 3: «Метод наименьших квадратов»

3.1. Вывод формул метода наименьших квадратов

3.2. Вывод формул для многофакторного случая

Метод наименьших квадратов (МНК) позволяет относительно просто определить аналитическую зависимость одного показателя от другого:

$$y = \varphi(x).$$

Имея такую функциональную зависимость, легко определить значение y при любом значении x, т.е. получить прогнозное значение y при заданном значении x.

Рассмотрим вывод рекуррентных формул метода наименьших квадратов.

3.1. Вывод формул метода наименьших квадратов

Пусть имеем статистические данные о параметре y в зависимости от x. Эти данные представим в табл. 3.1.

Таблица 3.1

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y^*	y_1^*	y_2^*	$\dots$	y_i^*	$\dots$	y_n^*

Метод наименьших квадратов позволяет при заданном типе зависимости $y = \varphi(x)$ так выбрать ее числовые параметры, чтобы кривая $y = \varphi(x)$ наилучшим образом отображала экспериментальные данные по заданному критерию. Рассмотрим обоснование с точки зрения теории вероятностей для математического определения параметров, входящих в $\varphi(x)$.

Предположим, что истинная зависимость y от x в точности выражается формулой $y = \varphi(x)$. Экспериментальные точки, представленные в табл. 3.1, отклоняются от этой зависимости вследствие ошибок измерения. Ошибки измерения подчиняются по теореме Ляпунова нормальному закону [21,32]. Рассмотрим какое-нибудь значение аргумента x_i. Результат опыта есть случайная величина Y_i, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $\varphi(x_i)$ (средним значением) и со средним квадратическим отклонением σ_i , характеризующим ошибку измерения. Пусть точность измерения во всех точках $x=(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)$ одинакова, т.е. $\sigma_1=\sigma_2=\dots=\sigma_n=\sigma$. Тогда нормальный закон распределения Y_i имеет вид

$$f_i(y_i)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i-\varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.1}$$

В результате ряда измерений произошло следующее событие: случайные величины $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ приняли совокупность значений $(y_1^*,y_2^*,\dots,y_n^*)$. Поставим следующую задачу.

Задача МНК. Подобрать математические ожидания $\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \dots\ ,\varphi(x_n)$ так, чтобы ***вероятность этого события была максимальной.*** Так как величины Y_i непрерывны, то говорят не о вероятностях событий $Y_i=y_i^*$, а о вероятностях того, что Y_i примут значения из интервала $(y_i^*,\ y_i^*+dy_i^*)$, т.е.

$$f_i(y_i)\cdot dy_i^*=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i-\varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}}\cdot dy_i^*.$$

Вероятность P того, что система случайных величин $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ примет совокупность значений, лежащих в пределах $(y_i^*,\ y_i^*+dy_i^*)$, $i=1,2,\dots,n$, с учетом того, что измерения проводятся независимо друг от друга, равна произведению вероятностей $f_i(y_i)\cdot dy_i^*$ для всех значений i:

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i-\varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}}\cdot dy_i^*=k\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i^*-\varphi(x_i))^2}, \quad (3.2)$$

где k - коэффициент, не зависящий от $\varphi(x_i)$.

Требуется выбрать математические ожидания $\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \dots,\varphi(x_n)$ так, чтобы выражение (3.2) достигало максимума. Это возможно, когда выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i^*-\varphi(x_i))^2\to\min\ . \quad (3.3)$$

Отсюда получаем требование метода наименьших квадратов: для того чтобы данная совокупность наблюдаемых значений $(y_1^*,\ y_2^*,\dots,\ y_n^*)$ была ***наивероятнейшей,*** нужно выбрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i^* от $\varphi(x_i)$ была наименьшей.

При решении практических задач зависимость $y=\varphi(x)$ задается в виде $y=\varphi(x,a_1,a_2,\dots,a_m)$, где $a_1,a_2,\dots,a_m$ – числовые параметры, которые необходимо определить. Учитывая соотношение (3.3), получим

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i^*-\varphi(x_i,a_1,a_2,\dots,a_m))^2\to\min\,. \quad (3.4)$$

Продифференцируем выражение (3.4) по $a_1,a_2,\dots,a_m$ и приравняем полученные производные нулю. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m))(\frac{\partial\varphi}{\partial a_1})_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m))(\frac{\partial\varphi}{\partial a_2})_i = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad ; \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m))(\frac{\partial\varphi}{\partial a_m})_i = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $(\frac{\partial\varphi}{\partial a_k})_i = \varphi'_{a_k}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$ – значения частной производной функции φ по a_k в точке x_i.

Отметим, что в общем случае систему (3.5) решить нельзя, так как неизвестен вид функции $\varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$. При решении практических задач зависимость y от x ищут в виде линейной комбинации известных функций с коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_m$, а именно: $y=\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(x)$. Подставив значение $\varphi_k(x)$ в (3.5), решаем эту систему и находим $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Приведем формулы метода наименьших квадратов для простейших видов зависимостей $y = f(x)$:

1. Пусть зависимость y от x выражается ***линейной функцией*** $y = a_1 + a_2 x$. Тогда значения коэффициентов a_1 и a_2 находятся по следующим формулам:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i^*)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \quad a_2 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i^*) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{3.6}$$

2. Пусть зависимость y от x выражается ***квадратичной функцией*** $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Тогда значения коэффициентов a_1, a_2 и a_3 находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^*; \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i^*); \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot y_i^*), \end{cases} \qquad (3.7)$$

где a_1, a_2, a_3 – коэффициенты; n – количество статистических данных; x – значение аргумента;

y^* – статистические наблюдаемые данные.

Оценка точности выражений $\varphi(x)$, полученных по методу наименьших квадратов, определяется по следующей формуле:

$$\overline{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n-1}}, \qquad \delta_i = y_i^* - \varphi(x, a_i). \qquad (3.8)$$

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся на практике зависимости:

а) ***степенная функция*** $y = a_1 x^{a_2}$. Преобразуем это выражение с помощью логарифмического преобразования: $\lg y = \lg a_1 + a_2 \lg x$, затем сделаем следующие замены: $Y = \lg y$, $X = \lg x$, $a_1^* = \lg a_1$, $a_2^* = \lg a_2$. После подстановки всех замен в выражение для степенной функции получим $Y = a_1^* + a_2^* X$;

б) ***показательная функция*** $y = a_1 e^{a_2 \cdot x}$ логарифмическим преобразованием $\lg y = \lg a_1 + a_2 x \lg e$ и заменами $Y = \lg y$, $X = x$, $a_1^* = \lg a_1$, $a_2^* = a_2 \lg e$ сводится к виду $Y = a_1^* + a_2^* X$;

в) ***функция вида*** $y=\frac{a_1}{x}+a_2$ заменами $Y=y$, $X=\frac{1}{x}$, $a_1^*=a_2$, $a_2^*=a_1$ сводится к виду $Y=a_1^*+a_2^*X$.

Преобразования для функций а) - в) сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Исходная функция	Замены	Преобразованная функция
$y=a_1x^{a_2}$	$Y=\lg y$, $X=\lg x$, $a_1^*=\lg a_1$, $a_2^*=\lg a_2$	$Y=a_1^*+a_2^*X$
$y=a_1e^{a_2\cdot x}$	$Y=\lg y$, $X=x$, $a_1^*=\lg a_1$, $a_2^*=a_2\lg e$	$Y=a_1^*+a_2^*X$
$y=\frac{a_1}{x}+a_2$	$Y=y$, $X=\frac{1}{x}$, $a_1^*=a_2$, $a_2^*=a_1$	$Y=a_1^*+a_2^*X$

Рассмотрим пример, реализующий метод наименьших квадратов с целью получения зависимости $y=\varphi(x)$.

Пример 1. Определим зависимость $y=\varphi(x)$ для данных, приведенных в табл. 3.3. Предположим, что зависимость y от t выражается линейной функцией $y=a_1+a_2t$. Результаты промежуточных расчетов по формулам (3.6) приведены в табл. 3.3. Определим коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1=\frac{55\cdot 2530-15\cdot 7601}{5\cdot 55-225}=\frac{25135}{50}\approx 502.7;$$

$$a_2=\frac{5\cdot 7601-15\cdot 2530}{5\cdot 55-225}=\frac{55}{50}\approx 1.1.$$

Получим следующую зависимость: $y=502.7+1.1\cdot t$. Результаты расчетов по полученной формуле приведены в последнем столбце табл. 3.3. Для $t=6$ получено прогнозное значение $y=509.3$.

Таблица 3.3

i	Значение t	Статистические данные y_i^*	t_i^2	$t_i \cdot y_i^*$	Значения по МНК
1	1	510	1	510	503.8
2	2	497	4	994	504.9
3	3	504	9	1512	506.0
4	4	510	16	2040	507.1
5	5	509	25	2545	508.2
$\sum$	15	2530	55	7601	
	6	**Получить прогноз**			**509.3**

3.2. Вывод формул для многофакторного случая

Предположим, что с помощью метода наименьших квадратов необходимо найти зависимость

$$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k\,, \qquad (3.9)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ – коэффициенты полинома, которые необходимо найти;

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ – факторы.

Рассмотрим процесс поиска коэффициентов для уравнения (3.9), представив его в матричном виде:

$$Y = X \cdot A. \qquad (3.10)$$

С учетом статистических данных система (3.10) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \ldots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \ldots & x_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{0n} & x_{1n} & \ldots & x_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_k \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \cdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$ – фиктивные переменные, позволяющие вести запись в матричной форме.

Для получения формул, позволяющих вычислить коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$, умножим уравнение (3.10) на X^{T}, а затем на $(X^{\mathrm{T}} \cdot X)^{-1}$ слева. Получим выражение (3.11):

$$(X^{\mathrm{T}} \cdot X)^{-1} \cdot X^{\mathrm{T}} \cdot Y = (X^{\mathrm{T}} \cdot X)^{-1} \cdot (X^{\mathrm{T}} \cdot X) \cdot A. \qquad (3.11)$$

Заметим, что в выражении (3.11), $(X^{\mathrm{T}} \cdot X)^{-1} \cdot (X^{\mathrm{T}} \cdot X) = E$ – единичной матрице, с учетом этого факта получим

$$A = (X^{\mathrm{T}} \cdot X)^{-1} \cdot X^{\mathrm{T}} \cdot Y \ . \qquad (3.12)$$

Тема 4: «Адаптивные методы прогнозирования»

4.1. Экспоненциальное сглаживание

4.2. Модели линейного роста

4.3. Сезонные модели

4.4. Метод группового учета аргументов

Временным рядом называется множество наблюдений, получаемых последовательно во времени.

Прогнозирование с помощью временных рядов относится к классу адаптивных методов прогнозирования, которые имеют следующие особенности:

1) в основе всех адаптивных моделей лежит идея экспоненциального сглаживания;

2) адаптивные модели отражают только текущие свойства исследуемого временного ряда;

3) на каждой итерации адаптивные модели непрерывно учитывают текущие изменения характеристик ряда;

4) некоторые адаптивные модели обладают свойством самонастраивания, т.е. свойством учитывать прошлые изменения характеристик ряда;

5) критерием качества использования адаптивной прогнозной модели, как правило. является средний квадрат ошибки прогнозирования. В редких случаях за качество модели принимается отсутствие автокорреляции между членами временного ряда.

Согласно классическому подходу, в общем случае временной ряд рассматривается как состоящий из четырех компонент: тренда, сезонных колебаний, нерегулярных колебаний и случайной компоненты.

Для описания временных рядов используется следующая модель:

$$x_t = \xi_t + \eta_t, \qquad (4.1)$$

где x_t – текущий член временного ряда в момент времени t;

ξ_t – случайная величина, которая генерируется детерминированной функцией или стохастическим процессом;

η_t – случайная величина, которая генерируется случайным неавтокоррелированным процессом с математическим ожиданием $M = 0$ и постоянной дисперсией.

Значение прогнозируемого показателя определяется в формуле (4.1) только случайной величиной ξ_t, так как в силу концепции модели (4.1) только через нее может быть реализовано взаимодействие членов ряда. Величина ξ_t называется ***уровнем ряда*** x_t и может быть представлена различными законами, т. е. трендами (см. раздел 1.6).

Случайная величина η_t влияет на один или несколько соответствующих членов временного ряда, причем долевое влияние η_t на прогноз значительно меньше, чем влияние ξ_t.

Простейшие адаптивные модели используют идею экспоненциального сглаживания, т.е. вычисление экспоненциальной средней. Рассмотрим экспоненциальное сглаживание.

4.1. Экспоненциальное сглаживание

При исследовании временного ряда x_t экспоненциальное сглаживание проводится по формуле

$$S_t = \alpha \cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1}, \qquad (4.2)$$

где x_t – текущий член временного ряда в момент времени t;

S_t – значение экспоненциальной средней в момент времени t;

α – параметр адаптации (параметр сглаживания), $0 < \alpha < 1, \beta = 1 - \alpha$.

Значение S_t в формуле (4.2) можно вычислить следующим образом:

$$S_t = \alpha \cdot x_t + (1-\alpha) \cdot S_{t-1} = S_{t-1} + \alpha \cdot (x_t - S_{t-1}), \qquad (4.3)$$

где S_{t-1} – экспоненциальная средняя предшествующего момента времени;

$(x_t - S_{t-1})$ – ошибка сглаживания.

Исследуем выражение (4.2). Для этого применим формулу (4.2) для вычисления текущих значений S_{t-i} :

$$S_t = \alpha \cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1} = \alpha \cdot x_t + \alpha \cdot \beta \cdot x_{t-1} + \beta^2 \cdot S_{t-2} = \ldots =$$

$$= \alpha \cdot x_t + \alpha \cdot \beta \cdot x_{t-1} + \alpha \cdot \beta^2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \alpha \cdot \beta^{i} \cdot x_{t-i} + \ldots + \beta^N \cdot S_0 =$$

$$= \alpha \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \cdot x_{t-i} + \beta^N \cdot S_0, \qquad (4.4)$$

где N – число членов ряда x_t;

S_0 – величина, характеризующая начальные условия для первого применения формулы (4.2) при $t=1$.

Отметим, что поскольку $\beta < 1$, то в формуле (4.4) при $N \to \infty$ имеем $\beta^N \to 0$ и соответственно $\beta^N \cdot S_0 \to 0$, значит $S_t \approx \alpha \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \cdot x_{t-i}$. Из последнего соотношения видим:

1) с ростом i значение величины β^i уменьшается, т.е. “прошлые” (более давние) данные ряда учитываются в прогнозе с меньшими весами;

2) увеличивая α в (4.4), увеличиваем в прогнозе вес более “свежих” наблюдений ;

3) значение α в (4.3) надо брать как можно меньше с целью уменьшения ошибки сглаживания (ошибкой сглаживания является разность $(x_t - S_{t-1})$.

Отметим, что выводы 1) и 2) противоречат друг другу, поэтому в практике прогнозирования подбирают α экспериментально.

Кроме особенностей, указанных в пунктах 1) - 2) , при выборе α необходимо учитывать, во-первых, сопоставимость данных: данные должны быть приведены к масштабу измерения одного периода; во-вторых, фон прогнозирования, например: близость периода прогнозирования к финансовым реформам, текущее состояние экономики, погодные условия (для сезонных моделей) и прочие.

В качестве начальных условий S_0 для применения экспоненциального сглаживания рекомендуется выбирать следующие значения:

1) среднее арифметическое всех имеющихся значений (или части значений) временного ряда;

1) среднее геометрическое всех имеющихся значений;

2) значения, выбранные из статистики, полученной при наблюдении за аналогами изучаемого явления.

Рассмотрим пример, в котором будет показано, как изменение α влияет на временной ряд.

Пример 4.1. Исходные данные приведены в табл. 4.1. В качестве S_0 выберем среднее арифметическое статистических данных x_t :

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{510 + 497 + \ldots + 509}{5} = 506.0; \qquad (4.5)$$

$$S_1 = \alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot S_0 = 0.1 \cdot 510 + 0.9 \cdot 506 = 506.4 \quad \text{и так далее.}$$

Результаты расчетов при различных значениях α приведены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Значение t	Статистические данные x_t	Значение α		
		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
1	510	506.4	508.0	509.6
2	497	505.5	502.5	498.3
3	504	505.3	503.2	503.4
4	510	505.8	506.6	509.3
5	509	506.1	507.8	509.0

4.2. Модели линейного роста

Если временной ряд имеет тенденцию линейного роста, то применение экспоненциальной средней приводит к смещенным прогнозам. Поэтому были сконструированы специальные адаптивные модели, учитывающие тенденции роста и опирающиеся на идею экспоненциального сглаживания. Р. Браун высказал в 60-х годах гипотезу, что в рассматриваемом случае ряд генерируется следующей моделью:

$$x_t = a_{1,t} + \xi_t , \qquad (4.6)$$

где x_t – временной ряд; $a_{1,t}$ – изменяющийся во времени средний уровень ряда;

ξ_t – случайные неавтокоррелированные отклонения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

Адаптивные методы позволяют статистическим данным, близким к периоду прогнозирования, придать в некотором смысле больший вес, а наблюдениям, относящимся к далекому прошлому, – меньший (дисконтирование данных), тогда как при использовании в прогнозировании критерия наименьших квадратов все наблюдения имеют равный вес. Наиболее известными и используемыми среди этих моделей являются модель Брауна, модель Хольта, Уинтерса, сезонная модель Харрисона и другие (см. Лукашин, Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования . -М.: Статистика, 1975.- 254 с.). Рассмотрим эти модели в форме, удобной для организации вычислений. Отметим, что начальные условия применения всех адаптивных моделей (при t=0) можно найти с помощью метода наименьших квадратов.

4.2.1. **Модель Брауна.** *Рассмотрим в схеме экспоненциального сглаживания ряд весов, пропорциональных порядку множителя* β *, а именно 1,* β, β^2, β^3 *и т. д. Так как их сумма должна равняться единице и*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{1}{1-\beta} \quad , \qquad (4.7)$$

весами фактически будут (1-β), (1-β)β, (1-β)β^2 и т.д. Мы предполагаем, что $|\beta| <$ 1. В момент t строим предиктор (модель):

$$S_1(t) = (1-\beta)\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-i} \Rightarrow S_1 = (1-\beta)x_t + \beta S_1(t-1)\,. \qquad (4.8)$$

В формуле (4.8), благодаря тому, что $|\beta| < 1$, веса уменьшаются экспоненциально.

Применяя операцию сглаживания повторно к уже сглаженным значениям функции x, получим функции сглаживания 2-го, 3-го порядка и т. д.:

$$S_2(t) = (1-\beta)S_1(t) + \beta S_2(t-1)\,,$$
$$S_3(t) = (1-\beta)S_2(t) + \beta S_3(t-1)\,. \qquad (4.9)$$

Прогнозная модель Брауна задается выражением

$$\bar{x}_{t+k} = a_0(t) + a_1(t)k + \ldots + a_p(t)k^p \ , \qquad (4.10)$$

где a_0(t), a_1(t), ..., a_p(t) – коэффициенты, которые определяются с помощью взвешенного метода наименьших квадратов, т. е. из условия минимума величины

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_{t-j} - \bar{x}_{t-j})^2 \beta^{\,j} \to \min\,. \qquad (4.11)$$

Пересчет коэффициентов происходит просто и быстро. Например, при p=1 получим формулы:

$$a_0(t+1) = (1-\beta^2)x_{t+1} + \beta^2 a_0(t) + \beta^2 a_1(t),$$
$$a_1(t+1) = (1-\beta)^2 x_{t+1} - (1-\beta)^2 a_1(t) - (1-\beta)^2 a_0(t) + a_1(t)\,. \qquad (4.12)$$

Простейшая прогнозная модель Брауна имеет вид

$$\bar{x}_\tau(t) = \bar{a}_{1,t} + \bar{a}_{2,t} \cdot \tau\,, \qquad (4.13)$$

$$\bar{a}_{1,t} = \bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)\, e(t)\,, \qquad (4.14)$$

$$\bar{a}_{2,t} = \bar{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)e(t)\,, \qquad (4.15)$$

$$e(t) = x_t - \bar{x}_1(t-1) = x_t - \bar{x}_t\,, \qquad (4.16)$$

где x_t – временной ряд; $\bar{x}_\tau(t)$ – прогнозное значение временного ряда в точке t на τ шагов вперед;

τ – шаг прогноза; $\bar{a}_{1,t}, \bar{a}_{2,t}$ – коэффициенты; β – параметр адаптации или коэффициент дисконтирования – характеризует обесценение данных наблюдения за единицу времени; $e(t)$ – ошибка прогноза.

4.2.2. ***Двухпараметрическая модель Хольта.*** Простейшая модификация этой модели имеет вид [38]:

$$\bar{x}_\tau(t) = \bar{a}_{1,t} + \bar{a}_{2,t} \cdot \tau\,, \qquad (4.17)$$

$$\bar{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot x_t + (1-\alpha_1)(\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1})\,, \qquad (4.18)$$

$$\bar{a}_{2,t} = \alpha_2 \cdot (\bar{a}_{1,t} - \bar{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\bar{a}_{2,t-1}\,, \qquad (4.19)$$

$$e(t) = x_t - \bar{x}_1(t-1)\,, \qquad (4.20)$$

где x_t – временной ряд; $\bar{x}_\tau(t)$ – прогнозное значение временного ряда в точке t на τ шагов вперед;

$\bar{a}_{1,t}, \bar{a}_{2,t}$ – коэффициенты; $\alpha_1,\ \alpha_2$ – параметры адаптации, $0 < \alpha_1 < 1,\ 0 < \alpha_2 < 1$;

$e(t)$ – ошибка прогноза.

Рассмотрим на примере, как выбор шага прогноза влияет на результаты расчетов.

Пример 4.2. Используя исходные данные примера 4.1, определить прогнозные значения показателя в точке $t=6$ с шагом прогноза $\tau_1=1$ и $\tau_2=2$. Результаты расчетов по формулам (4.17) – (4.20) приведены в табл. 4.2. Начальные условия возьмем из примера 4.1: $\bar{a}_{1,0}=502.7$, $\bar{a}_{2,0}=1.1$. Выполним расчеты сначала с шагом единица:

1) При $t=0, \tau_1=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ расчетная формула (4.17) имеет вид

$$\bar{x}_1(0)=\bar{x}(1)=\bar{a}_{1,0}+\bar{a}_{2,0}=502.7+1.1=503.8\ .$$

2) При $t=1, \tau_1=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ расчетные формулы (4.17) – (4.20) имеют вид

$$\bar{x}_1(1)=\bar{x}(2)=\bar{a}_{1,1}+\bar{a}_{2,1};$$

$$\bar{a}_{1,1}=0.5\cdot x_1+0.5\cdot(\bar{a}_{1,0}+\bar{a}_{2,0});$$

$$\bar{a}_{2,1}=0.5\cdot(\bar{a}_{1,1}-\bar{a}_{1,0})+0.5\cdot\bar{a}_{2,0}\ .$$

Подставляя последовательно известные значения, получим:

$$\bar{a}_{1,1}=0.5\cdot 510+0.5\cdot(502.7+1.1)=506.90;$$

$$\bar{a}_{2,1}=0.5\cdot(506.9-502.7)+0.5\cdot 1.1=2.65;$$

$$\bar{x}(2)=506.9+2.65=509.55\ .$$

3) При $t=2, \tau_1=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ расчетные формулы (4.17) – (4.20) имеют вид

$$\bar{x}_1(2)=\bar{x}(3)=\bar{a}_{1,2}+\bar{a}_{2,2};$$

$$\bar{a}_{1,2}=0.5\cdot x_2+0.5\cdot(\bar{a}_{1,1}+\bar{a}_{2,1});$$

$$\bar{a}_{2,2}=0.5\cdot(\bar{a}_{1,2}-\bar{a}_{1,1})+0.5\cdot\bar{a}_{2,1}\ .$$

Предлагаем расчеты по приведенным формулам выполнить самостоятельно и сверить полученные прогнозные значения с результатами, приведенными в табл. 4.2.

Аналогично проводятся расчеты для коэффициентов $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.3$.

Выполним расчеты с шагом два, значения коэффициентов $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$.

1) При $t = 0, \tau_1 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ расчетная формула (4.17) имеет вид

$$\bar{x}_2(0) = \bar{x}(2) = \bar{a}_{1,0} + 2 \cdot \bar{a}_{2,0} = 502.7 + 2.2 = 504.9 \ .$$

2) При $t = 1, \tau_1 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ расчетные формулы (4.17) – (4.20) имеют вид

$$\bar{x}_2(1) = \bar{x}(3) = \bar{a}_{1,1} + 2 \cdot \bar{a}_{2,1};$$

$$\bar{a}_{1,2} = 0.5 \cdot x_2 + 0.5 \cdot (\bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{2,1});$$

$$\bar{a}_{2,2} = 0.5 \cdot (\bar{a}_{1,2} - \bar{a}_{1,1}) + 0.5 \cdot \bar{a}_{2,1} .$$

Заметим, что две последние формулы точно такие же, как в предыдущих расчетах, т.е. формулы (4.18) и (4.19) не зависят от шага прогноза τ. Подставляя уже рассчитанные значения $\bar{a}_{1,1}, \bar{a}_{2,1}$, получим

$$\bar{x}(3) = 506.9 + 2 \cdot 2.65 = 512.20 .$$

3) При $t = 2, \tau_1 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ расчетные формулы (4.17) – (4.20) имеют вид

$$\bar{x}_2(2) = \bar{x}(4) = \bar{a}_{1,2} + 2 \cdot \bar{a}_{2,2};$$

$$\bar{a}_{1,1} = 0.5 \cdot x_1 + 0.5 \cdot (\bar{a}_{1,0} + \bar{a}_{2,0});$$

$$\bar{a}_{2,1} = 0.5 \cdot (\bar{a}_{1,1} - \bar{a}_{1,0}) + 0.5 \cdot \bar{a}_{2,0} .$$

Предлагаем последующие расчеты выполнить самостоятельно и сверить полученные прогнозные значения с результатами, приведенными в табл. 4.2. Сделайте выводы и рекомендации о применении различных шагов прогноза и коэффициентов адаптации.

Таблица 4.2

i	Значение t	Временной ряд x_t	Значения по МНК	Метод Хольта		
				$\tau_1 = 1$	$\tau_1 = 1$	$\tau_1 = 2$
				$\alpha_1 = 0.5$ $\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = 0.2$ $\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_1 = 0.5$ $\alpha_2 = 0.5$
1	1	510	503.8	503.80	503.80	
2	2	497	504.9	509.55	507.07	504.90
3	3	504	506.0	502.76	506.51	512.20
4	4	510	507.1	503.24	509.90	502.30
5	5	509	508.2	508.17	513.75	503.10
	6	**Прогноз**	**509.3**	**510.3**	**516.40**	**509.72**

4.2.3. ***Трехпараметрическая модель Бокса и Дженкинса.*** Рассматриваемая модель является одним из вариантов “усовершенствованной” модели Хольта за счет включения в расчетные формулы разности ошибок прогнозов:

$$\bar{x}_{\tau}(t) = \bar{a}_{1,t} + \bar{a}_{2,t} \cdot \tau, \qquad (4.21)$$

$$\bar{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot x_t + (1-\alpha_1)(\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1}) + \alpha_3(e(t) - e(t-1)), \qquad (4.22)$$

$$\bar{a}_{2,t} = \alpha_2 \cdot (\bar{a}_{1,t} - \bar{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\bar{a}_{2,t-1}, \qquad (4.23)$$

$$e(t) = x_t - \bar{x}_1(t-1), \qquad (4.24)$$

где $e(t)$ – ошибка прогноза.

Обобщенная модель Бокса и Дженкинса может применяться для прогнозирования нестационарных временных рядов, так как содержит не только операцию сглаживания скользящим средним, но и элементы авторегрессии (см. Бокс, Дж., Дженкинс, Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление.- М.: Мир, 1974.- 195 с.).

4.2.4. ***Стохастический процесс Тейла и Вейджа.*** Модели Тейла и Вейджа описывают некоторый вероятностный процесс, который характеризуется стохастическим трендом [38]. К этому процессу применяется предиктор (модель) Хольта. Кроме того, выведены соотношения для оптимальных параметров адаптации, минимизирующих средний квадрат ошибки прогнозирования.

Процесс Тейла и Вейджа аналитический записывается в следующем виде:

$$x_t = a_{1,t} + \xi_t \, , \qquad (4.25)$$

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t} \, , \qquad (4.26)$$

$$a_{2,t} = a_{2,t-1} + \nu_t \, , \qquad (4.27)$$

где x_t – временной ряд; $\bar{a}_{1,t}$ – значение уровня исследуемого временного ряда x_t в момент t ;

$\bar{a}_{2,t}$ – прирост уровня ряда от момента (t – 1) к моменту t ; ξ_t, ν_t – временные последовательности с нулевым математическим ожиданием, постоянными дисперсиями и отсутствием ковариации.

Схема прогнозирования реализуется с помощью формул (4.28) – (4.30)

$$\bar{x}_\tau(t) = \bar{a}_{1,t} + \tau \cdot \bar{a}_{2,t} \, , \qquad (4.28)$$

$$\bar{a}_{1,t} = \bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1} + \alpha_1 \cdot e_t \, , \qquad (4.29)$$

$$\bar{a}_{2,t} = \bar{a}_{2,t-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot e_t \, , \qquad (4.30)$$

где $\bar{x}_\tau(t)$ – прогнозное значение временного ряда x_t на τ шагов вперед;

$\bar{a}_{1,t}, \bar{a}_{2,t}$ – коэффициенты;

$\alpha_1,\ \alpha_2$ – параметры адаптации, $0<\alpha_1<1,\ 0<\alpha_2<1$; e_t – ошибка прогноза.

Тейла и Вейдж получили следующие рекомендации для применения своего метода: коэффициенты автоковариации для k - х разностей должны удовлетворять следующим условиям:

$$-\frac{2}{3}<\rho_1<0; \tag{4.31}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}<0; \tag{4.32}$$

$$|\rho_k|\to 0 \quad \text{при} \quad |k|>2, \tag{4.33}$$

где ρ_k - коэффициент автоковариации вторых разностей y_t, отстоящих на k шагов в единицах времени.

$$y_t=(x_t-x_{t-1})-(x_{t-1}-x_{t-2}); \qquad \rho=\frac{M}{\sigma^2} \quad ,$$

где x_t – временной ряд**;** y_t – вторые разности, отстоящие на шаг вперед ($\tau=1$); ρ – коэффициент автоковариации; M – математическое ожидание; σ – среднее квадратическое отклонение.

4.3. Сезонные модели

В экономике многие процессы характеризуются периодически повторяющимися сезонными явлениями. Временные ряды, которые их отражают, содержат периодические сезонные колебания. Существуют два подхода к представлению сезонных явлений [38] .

1) ***Модели с мультипликативными коэффициентами сезонности.*** В этом случае процесс аналитически представляется в соответствии с формулами

$$x_t=\Theta_{1t}+\Theta_{2t}, \qquad \Theta_t=a_{1,t}\cdot f_t, \tag{4.34}$$

где f_t – сезонные коэффициенты; $a_{1,t}$ – адаптивные коэффициенты.

2) ***Модели с аддитивными коэффициентами сезонности.*** В этом случае процесс аналитически представляется в соответствии с формулами

$$x_t = \Theta_{1t} + \Theta_{2t} \quad , \qquad \Theta_t = a_{1,t} + g_t \, , \tag{4.35}$$

где g_t – сезонные коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим сезонную модель Уинтерса.

4.3.1. ***Сезонная модель УИНТЕРСА*. 4.3.1.1.** ***Общий вид модели***

$$\overline{x}_1(t) = \overline{a}_{1,t} \cdot \overline{f}_{t-l+1} \, ;$$

$$\overline{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot \frac{x_t}{\overline{f}_{t-l}} + (1-\alpha_1) \cdot \overline{a}_{1,t} \, ;$$

$$\overline{f}_t = \alpha_2 \cdot \frac{x_t}{\overline{a}_{1,t}} + (1-\alpha_2) \cdot \overline{f}_{t-l} \, ;$$

$$\overline{x}_\tau(t) = \overline{a}_{1,t} \cdot \overline{f}_{t-l+\tau} \, ;$$

$$\overline{a}_{1,\tau} = \alpha_1 \cdot \sum_{n=0}^{t} (1-\alpha_1)^n \cdot \frac{x_{t-n}}{\overline{f}_{t-l-n}} + (1-\alpha_1)^{t+1} \cdot \overline{a}_{1,0} \, ;$$

$$\overline{f}_t = \alpha_2 \cdot \sum_{n=0}^{J} (1-\alpha_2)^n \cdot \frac{x_{t-nl}}{\overline{a}_{1,t-nl}} + (1-\alpha_2)^{J+1} \cdot \overline{f}_{i,0} \, ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – адаптивные коэффициенты: $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$, $0 < \alpha_3 < 1$;

$f_t, f_{t-1}, \ldots, f_{t-l+1}$ – коэффициенты сезонности;

l – количество фаз в полном сезонном цикле, цикл равен году: если статистический ряд содержит наблюдения за месяц, то $l = 12$; если статистический ряд содержит наблюдения за квартал, то $l = 4$ и т.д.

4.3.1.2. ***Модель с линейным ростом***

$$\bar{x}_{\tau}(t) = (\bar{a}_{1,t} + \tau \cdot \bar{a}_{2,t}) \cdot \bar{f}_{t-l+\tau};$$

$$\bar{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot \frac{x_t}{\bar{f}_{t-l}} + (1-\alpha_1) \cdot (\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1});$$

$$\bar{f}_t = \alpha_2 \cdot \frac{x_t}{\bar{a}_{1,t}} + (1-\alpha_2) \cdot \bar{f}_{t-l};$$

$$\bar{a}_{2,t} = \alpha_3 \cdot (\bar{a}_{1,t} - \bar{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_3) \cdot \bar{a}_{2,t-1}.$$

4.3.2. *Альтернативные сезонные модели*

$$\bar{x}_{\tau}(t) = P_{\tau},$$

$$\bar{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot d_1 + (1-\alpha_1) \cdot d_2;$$

$$\bar{a}_{2,t} = \alpha_2 \cdot (\bar{a}_{1,t} - \bar{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2) \cdot \bar{a}_{2,t-1};$$

$$\bar{r}_t = \alpha_r \cdot \frac{\bar{a}_{1,t}}{\bar{a}_{1,t-1}} + (1-\alpha_r) \cdot \bar{r}_{t-1};$$

$$\bar{g}_t = \alpha_g \cdot (\bar{x}_t - \bar{a}_{1,t}) + (1-\alpha_g) \cdot \bar{g}_{t-l};$$

$$\bar{f}_t = \alpha_f \cdot \frac{x_t}{\bar{a}_{1,t}} + (1-\alpha_f) \cdot \bar{f}_{t-l},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – адаптивные коэффициенты: $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$, $0 < \alpha_3 < 1$;

$f_t, f_{t-1}, \dots, f_{t-l+1}$, $g_t, g_{t-1}, \dots, g_{t-l+1}$ – коэффициенты сезонности;

l – количество фаз в полном сезонном цикле.

Формулы для расчетов приведены в табл. 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3 - Символы обобщенной формулы

Характер сезонности Тенденция роста		$\bar{a}_{1,t}$	1 Отсутствие сезонного эффекта	2 Аддитивный сезонный эффект	3 Мультипликативный сезонный эффект
A	Отсутствие тенденции роста	d_1	x_t	$x_t - \bar{g}_{t-l}$	$\frac{x_t}{\bar{f}_{t-l}}$
		d_2	$\bar{a}_{1,t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1}$
B	Аддитивный рост	d_1	x_t	$x_t - \bar{g}_{t-l}$	$\frac{x_t}{\bar{f}_{t-l}}$
		d_2	$\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1} + \bar{a}_{2,t-1}$
C	Экспоненциальный рост	d_1	x_t	$x_t - \bar{g}_{t-l}$	$\frac{x_t}{\bar{f}_{t-l}}$
		d_2	$\bar{a}_{1,t-1} \cdot \bar{r}_{t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1} \cdot \bar{r}_{t-1}$	$\bar{a}_{1,t-1} \cdot \bar{r}_{t-1}$

Таблица 4.4 - Формулы для прогнозов

Характер сезонности Тенденция роста		1 Отсутствие сезонного эффекта	2 Аддитивный сезонный эффект	3 Мультипликативный сезонный эффект
A	Отсутствие тенденции роста	$\bar{a}_{1,t}$	$\bar{a}_{1,t} + \bar{g}_{t-l+\tau}$	$\bar{a}_{1,t} \cdot \bar{f}_{t-l+\tau}$
B	Аддитивный рост	$\bar{a}_{1,t} + \tau \cdot \bar{a}_{2,t}$	$\bar{a}_{1,t} + \tau \cdot \bar{a}_{2,t} +$ $+ \bar{g}_{t-l+\tau}$	$(\bar{a}_{1,t} + \tau \cdot \bar{a}_{2,t}) \cdot \bar{f}$
C	Экспоненциальный рост	$\bar{a}_{1,t} \cdot \bar{r}_t^{\,\tau}$	$\bar{a}_{1,t} \cdot \bar{r}_t^{\,\tau} + \bar{g}_{t-l+\tau}$	$\bar{a}_{1,t} \cdot \bar{f}_{t-l+\tau} \cdot \bar{r}_t^{\,\tau}$

4.4. Метод группового учета аргументов

Алгоритмы, использующие метод группового учёта аргументов (МГУА), предназначены для получения модели исследуемого процесса [13 ÷ 16, 26]. Это моделирование осуществляется путём перебора различных моделей-претендентов по внешним критериям, при этом внешний критерий сначала уменьшается, проходя через точку минимума при оптимальной модели, после чего начинает возрастать в области переусложнённых моделей.

Алгоритмы МГУА являются чрезвычайно помехоустойчивыми – при соотношении помеха/сигнал θ = 20-30% алгоритмы позволяют получить точную физическую модель; алгоритмы не теряют работоспособности вплоть до соотношения θ = 300-400%. В этой области алгоритм МГУА применяется для краткосрочного прогнозирования; и только при отношении помеха/сигнал, большем 400%, алгоритмы МГУА полностью теряют свою пригодность для моделирования

Оптимальная модель процесса, полученная при помощи МГУА, может служить для прогнозирования данных на будущее.

4.4.1. Модели и их представление. 4.4.1.1. Полиномиальная модель. ***Полиномиальная модель*** представляет собой полином некоторой максимальной степени от всех аргументов. В случае максимальной степени m = 2 и количества переменных n = 3 полином имеет $C_{n+m}^{m} = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ членов и выглядит так:

$$Q = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_3^2 + a_7 x_1 x_2 + \quad a_8 x_2 x_3 + a_9 x_1 x_3. \quad (4.36)$$

Иногда в состав аргументов требуется ввести обратные величины $\frac{1}{x}$, их степени или другие нелинейные функции (целесообразность введения новых аргументов определяется по уменьшению минимального значения основного критерия). В любом случае полный полином является линейным по коэффициентам, для определения которых применяется МНК.

Одна из возможных схем работы этого алгоритма выглядит так. Сначала определяются все модели, состоящие из одного аргумента:

$$q_1 = a_0;\ \ q_2 = a_1 x_1;\ \ q_3 = a_2 x_2;\ \ \ldots;\ \ q_{10} = a_9 x_9.$$

Далее рассматриваются всевозможные модели, состоящие из двух аргументов, и т.д. При этом модель, описываемая полиномом, проверяется на оптимальность и соответствие критериям селекции.

4.4.1.2. ***Гармоническая модель.*** При построении ***гармонической модели*** интервал главных значений частот искомых гармоник длиной 2π разбивается (вообще говоря, произвольно) на n промежутков. Каждому полученному дискретному значению частоты ω_i ставится в соответствие «переобозначенный гармонический аргумент» вида

$$x_i = C_i + A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t, i = \overline{1, n}, \qquad (4.37)$$

где коэффициенты C_i, A_i, B_i определяются по методу наименьших квадратов на всех N точках исходных данных.

Далее выполняется полный перебор всех частных *моделей* различной сложности. При этом, начиная с того момента, когда рассматриваются модели, имеющие более двух гармоник, определяются коэффициенты *моделей* по отношению к уже вычисленным «гармоническим аргументам»: $q_l = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j$.

4.4.2. *Критерии селекции моделей*

Критерием модели называется в общем случае мера количественного сравнения моделей различной сложности, которая позволяет выделить некоторое подмножество лучших моделей из всего их множества, генерируемого в процессе самоорганизации.

Все критерии можно разделить на две группы:

- ***критерии точности***, выражающие ошибку проверяемой модели на различных частях выборки;
- ***критерии согласованности***, являющиеся мерой близости оценок, полученных на различных частях выборки.

Обе группы критериев могут применяться как в ***симметричной,*** так и в ***несимметричной*** форме. Симметричная форма критерия означает, что в этом критерии равноправно используется информация как из обучающей последовательности (далее – *A*), так и из первой проверочной последовательности (далее – *B*). Несимметричным критерий называется в противном случае. Кроме уже введённых обозначений последовательностей *A* и *B*, введём ещё одну последовательность: W, $W = A \cup B$.

Итак, рассмотрим основные критерии, применяющиеся для селекции моделей.

4.4.2.1. *Критерии точности.* Критерии точности порождены формулой квадратичной ошибки аппроксимации (ошибки МНК). Внешний характер этих критериев обеспечивается учётом проверочных выборок. Другими словами, критерии точности, имеющие один вид формулы, могут использоваться и как внутренние (для оценки коэффициентов модели), и как внешние (для оценки качества модели)[1].

Критерий регулярности

Это исторически первый критерий, использующийся при отборе моделей, и записывается следующим образом:

$$\Delta^2(B\,|\,A)=\frac{\sum_{i}^{N_B}\left(q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}}-q_{i\,\text{Ì Î ÄÅËÈ}\,A}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_B} q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}}^2}, \qquad (4.38)$$

где $\Delta^2(B\,|\,A)$ означает “ошибка на *B* модели, коэффициенты которой получены на модели *A*”.

Очевидно, что данный критерий несимметричен – выборка *A* является обучающей; *B* – проверочной. Поменяв *A* и *B* местами, получим ещё один критерий регулярности:

$$\Delta^2(A\,|\,B)=\frac{\sum_{i}^{N_A}\left(q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}}-q_{i\,\text{Ì Î ÄÅËÈ}\,A}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_A} q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}}^2}, \qquad (4.39)$$

в котором модель создаётся на последовательности *B*, а проверяется на *A*.

Теперь легко сконструировать симметричный критерий регулярности:

$$d^2=\Delta^2(B\,|\,A)+\Delta^2(A\,|\,B),$$

где подпоследовательности *A* и *B* используются равноправно.

Этот критерий позволяет более надёжно выбирать модель по сравнению с обычным критерием регулярности, так как позволяет сглаживать влияние помех на обеих подвыборках *A* и *B*.

Критерий стабильности

[1] Это замечание не относится к $\Delta^2_{cp}(W)$.

Этот критерий используется в тех случаях, когда необходимо, чтобы модель имела удовлетворительную точность как на обучающей, так и на проверочной последовательностях. Его выражение:

$$\chi^2 = \chi^2(W \mid A) = \Delta^2(W \mid A) = \Delta^2(A \mid A) + \Delta^2(B \mid A) = \varepsilon^2(A) + \Delta^2(B), \quad (4.40)$$

где $\Delta^2(A \mid A) = \varepsilon^2(A)$ – точность метода наименьших квадратов (МНК).

Как нетрудно видеть, этот критерий также несимметричен.

Как и в случае критерия регулярности, можно сконструировать аналогичный критерий $\chi^2(W \mid B)$ и, соответственно, симметричный критерий регулярности:

$$S^2 = S^2(W \mid A, B) = \chi^2(W \mid A) + \chi^2(W \mid B) = \varepsilon^2(A) + \varepsilon^2(B) + d^2, \quad (4.41)$$

где d^2 – симметричный критерий регулярности.

Усреднённый критерий регулярности

Согласно этому критерию, вычисляется среднее значение N_W критериев регулярности для каждой проверяемой частной модели в условиях, когда проверочная последовательность – поочерёдно каждая точка из W, обучающая последовательность состоит из прочих (N_W – 1) точек. Такой критерий имеет следующий вид:

$$\Delta^2_{\text{ñð}}(W) = \frac{\sum_{i}^{N_W}\left(q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}} - q_{i\,\text{Ì Î ÄÅËÈ}\,W_i}\right)^2}{N_W \cdot \sum_{i=1}^{N_W} q_{i\,\text{ÔÀÊÒ}}^{2}}, \quad (4.42)$$

где $W_i = W \setminus i; N_{W_i} = N_W - 1$

4.4.2.2. ***Критерии согласованности.*** Критерии этой группы не учитывают в явном виде ошибку модели и поэтому даже формально (в отличие от критериев точности) не могут быть использованы в качестве внутренних (для оценки коэффициентов). Эти критерии строятся как количественное выражение какого-либо дополнительного требования к свойствам искомой модели.

Критерий минимума смещения коэффициентов

Данный критерий требует, чтобы оценки коэффициентов моделей на *A* и *B* отличались минимально:

$$\tilde{n}^{2}_{\text{ñì}} = \tilde{n}^{2}_{\text{ñì}}\left(A,B\right) = \left\| a_A - a_B \right\|^2, \qquad (4.43)$$

где a_A – вектор коэффициентов модели, вычисленный на *A*, а a_B – вектор коэффициентов, вычисленный на *B*.

Критерий минимума смещения решений

Это более распространённая версия предыдущего критерия (4.43):

$$n^{2}_{\text{ñì}} = n^{2}_{\text{ñì}}\left(W \mid A,B\right) = \sum_{i=1}^{N_W}\left(q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ A} - q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ B}\right)^2. \qquad (4.44)$$

Этот критерий требует, чтобы минимально отличался выход на *W* моделей с коэффициентами, полученными на *A* и *B*.

Абсолютно помехоустойчивый критерий

Данный критерий требует максимальной согласованности оценок выхода модели при коэффициентах, полученных на трёх частях выборки – *A*, *B* и *W*:

$$V^2 = V^2\left(W \mid A,B,W\right) = \sum_{i=1}^{N_W}\left(q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ A} - q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ W}\right)\cdot\left(q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ B} - q_{i\ \text{Ì Î ÄÅËÜ}\ W}\right). \qquad (4.45)$$

Название этого критерия связано с тем, что он теоретически удовлетворяет одному из наиболее важных условий работоспособности внешнего критерия – надёжно отсеивать избыточные (переусложнённые) модели при любом шуме.

4.4.3. ***Виды алгоритмов МГУА.*** Особенность алгоритмов МГУА состоит в том, что вид опорной функции, класс уравнений и структура моделей устанавливаются объективным способом при помощи перебора вариантов по целесообразно выбранному ***ансамблю критериев*** (индуктивный метод). Способ введения критериев обеспечивает объективное нахождение структуры единственной модели оптимальной сложности при высокой помехоустойчивости метода. Допустимое ограничение шум/сигнал может достигать значения единицы и более (без учёта информации о помехах).

Наиболее существенными признаками, отличающими алгоритмы МГУА, являются:

- число рядов селекции;
- наличие или отсутствие вычисления остатка;
- число уравнений в системе.

Структуры алгоритмов МГУА остаются аналогичными друг другу для различных опорных функций. Так, для полиномиальных и гармонических алгоритмов можно указать три основных вида структуры: однорядные (комбинаторные); многорядные, без вычисления остатков после каждого ряда селекции; многорядные, с вычислением остатков.

Однорядные алгоритмы МГУА предназначены для решения переопределенных задач самоорганизации моделей по опытным данным, в которых число точек измерения равно или превышает некоторый (различный для разных типов моделей) алгебраический минимум.

Многорядные алгоритмы МГУА применяются для решения некорректных или недоопределённых задач моделирования, т.е. в случае, когда число точек N в таблице опытных данных меньше числа аргументов n, входящих в синтезируемую модель ($N < n$). Методы регрессионного анализа в этом случае неприменимы, так как не дают возможности построения единственной модели, адекватной процессу за пределами интервала интерполяции.

В зависимости от априорных знаний о процессе в алгоритмах МГУА используются различные опорные (базисные) функции. Например, многорядные алгоритмы МГУА с полиномиальными опорными функциями позволяют получать модели в виде полиномов, число членов в которых значительно больше, чем в моделях, построенных по однорядным алгоритмам (в том числе регрессионным), при одинаковом ограниченном объеме выборки.

Тема 5: «Прогнозирование на основе имитационного моделирования»

5.1. Основные понятия имитационного моделирования

5.1.1. Этапы организации имитационного эксперимента.

5.1.2. Правила автоматической остановки имитационного эксперимента.

5.1.3. Пример задачи имитационного моделирования

5.2. Имитационное моделирование фирмы, отрасли

5.2.1. Модель конкурентной отрасли

5.2.2. Статистическое прогнозирование с помощью паутинообразной модели фирмы

Имитационное моделирование является мощным инструментом анализа технических, экономических и управленческих задач. Имитационный эксперимент является эффективным аналогом реального процесса и позволяет заменить конкретное явление экспериментом с математической моделью на персональном компьютере.

В учебном пособии основное внимание уделяется двум прикладным задачам:

- задаче прямоугольного раскроя с неявно заданной технологической последовательностью выполнения резов;

- задаче определения параметров альтернативного графа (графа с возвратами).

Реализация имитационной процедуры выбора карт раскроя позволяет рационально использовать банки карт раскроя заготовительных цехов и участков.

Проведение имитационного эксперимента на графах с возвратами позволяет рассматривать большое число альтернатив при функционировании систем и изучении их особенностей. Излагается широкий спектр алгоритмов для определения временных, стоимостных и ресурсных характеристик альтернативных сетевых моделей.

Особое внимание в учебном пособии уделяется изучению современных математических приемов автоматизации процесса моделирования, в частности, рассматриваются критерии автоматической остановки.

5.1. Основные понятия имитационного моделирования

Имитационное моделирование - это метод проведения вычислительных экспериментов с математическими моделями сложных систем с целью изучения поведения систем в течение продолжительных периодов времени [44, 46].

Пусть Y - вектор, описывающий множество **выходных (эндогенных) переменных** изучаемой системы, X - вектор, составленный из множества **входных (эндогенных) переменных** (или переменных управления).

Предположим, что переменная X воздействует на переменную Y в соответствии с функциональным соотношением

$$Y = \Psi(X), \tag{5.1}$$

где X - факторы системы (входы системы); Y - реакция системы; Ψ - поверхность реакции системы.

В условиях имитационного эксперимента $\Psi(X)$ заменяется конкретным математическим выражением и строится математическая модель следующего вида:

$$\overline{Y} = \overline{\Psi}(A, X) + \xi, \tag{5.2}$$

где $\overline{Y}$ - оценка Y по модели (5.2); A - вектор параметров имитационной модели; ξ - случайная величина (тренд).

Случайная величина ξ моделируется при помощи методов Монте-Карло [21, 47, 48].

Отметим, что при изучении реальных технико-экономических систем в модель (5.2) можно включить преобразования реакции Y и элементов вектора X, а также учесть закон изменения случайной величины ξ [25, 53, 54].

Постановка и проведение имитационного эксперимента предполагает решение целого ряда сопутствующих проблем, которые кратко перечислены в следующем разделе.

5.1.1. ***Этапы организации имитационного эксперимента.*** Перечислим основные этапы организации имитационного эксперимента, подробно изложенные в [38]:

1) формулировка проблемы;

2) формулировка математической модели;

3) выбор метода анализа и генерации случайных чисел;

4) выбор ПК, языков моделирования, программирование алгоритмов;

5) оценка пригодности модели;

6) планирование машинного эксперимента;

7) анализ результатов эксперимента.

Формулировка проблемы, подлежащей исследованию с помощью метода имитационного моделирования, начинается с постановки задачи. Изучаются входные и выходные переменные системы, выделяются управляющие переменные. Составляется описание среды, в которой функционирует изучаемая система. Этап завершается ясным изложением вопросов, на которые исследователь хочет получить ответы.

На втором этапе выбирается вид математической модели, описывающей основные зависимости между переменными задачи. Анализируется способ включения в модель случайных величин, а также изучаются особенности законов распределения вводимых случайных величин. Принимается решение о характере используемых статистических методов обработки результатов имитационного эксперимента.

После выбора методов анализа и генерации случайных чисел решается проблема автоматизации процесса моделирования - от использования отдельных компонент объектно-ориентированных языков моделирования до применения специализированных пакетов прикладных программ.

Оценка пригодности имитационной модели может производиться по двум критериям:

1) оценка степени совпадения имитированных данных с известными за прошлые периоды данными (если эти данные имеются);

2) оценка точности предсказания имитационной модели относительно поведения реальной системы в будущем.

Решение перечисленных задач является сложной проблемой, поскольку затрагивает многие практические и теоретические аспекты.

5.1.2. ***Правила автоматической остановки имитационного эксперимента.*** Пусть N - число повторений имитационного эксперимента.

Правило, определяющее число N, обеспечивающее заданный уровень статистической точности, называется правилом остановки [см. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями больших систем.- М.: Мир,1975.- 500 с.].

Правило остановки при фиксированном объеме выборки

Рассмотрим правило остановки в случае, когда объем выборки (количество случайных величин в одном испытании) постоянен и определяется до начала эксперимента. В этом правиле дисперсия предполагается **известной.**

Пусть имеется выборка, состоящая из N независимых одинаково распределенных случайных чисел $X_1, X_2, \ldots, X_N$, дисперсия σ^2 которых известна, а математическое ожидание E неизвестно. Предположим, что мы хотим оценить математическое ожидание E и нами вычислена несмещенная оценка по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \,. \tag{5.3}$$

Будем искать такое правило остановки, которое гарантирует, что вероятность попадания числа E в доверительный интервал

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{5.4}$$

равна $(1-\alpha)\%$, где σ - стандартное отклонение величины X, а $Z_{\alpha/2}$ - процентиль нормального распределения , оставляющий в каждом отбрасываемом “ хвосте ” случайных чисел по $\alpha/2\%$ вероятности. Обозначим длину доверительного интервала d, эта длина вычисляется по формуле

$$d = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \qquad (5.5)$$

Если σ и α известны, то остановку следует произвести, когда

$$N = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{d^2}. \qquad (5.6)$$

По центральной предельной теореме можно считать, что распределение величины $\overline{X}$ нормально, поскольку все X_i независимы и одинаково распределены.

Правило остановки последовательных испытаний

Имитационные эксперименты с фиксированным объемом выборки N требуют большего машинного времени, чем методы, где число наблюдений заранее не фиксируется и объем выборки N рассматривается как случайная величина, зависящая от исхода предыдущих $(N-1)$ наблюдений. Такой подход называется методом последовательных испытаний. Затраты машинного времени на проведение имитационного эксперимента методом последовательных испытаний определяются только тем количеством наблюдений, которое необходимо , чтобы получить результат с заранее заданной точностью. Рассмотрим один из способов включения в статистический эксперимент правила автоматического определения N на каждом шаге имитации.

Пусть имеется выборка из n независимых, одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученных в результате проведения n опытов по имитации. Значение n на первом этапе реализации имитационной модели определяется из практических соображений , как правило, $10 \le n \le 50$. Определим выборочное среднее $\overline{M}(x)$ и выборочную дисперсию $\overline{\sigma}^2$ по следующим формулам [3, 21]:

$$\overline{M}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,; \tag{5.7}$$

$$\overline{\sigma}^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{M}(x))^2\,, \tag{5.8}$$

где n - объем выборки; x_i - значение случайной величины в i-м опыте.

Требуется найти такое правило остановки, чтобы истинное значение математического ожидания $M(x)$ лежало в доверительном интервале [21]:

$$M \pm d = M \pm \frac{z\cdot\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{5.9}$$

с вероятностью $p = (1-\alpha)$, где p- вероятность доверия к полученным результатам имитации, $d = \frac{z\cdot\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}$, z - квантиль распределения случайной величины X при условии, что множество значений p задается в виде $p = 0.01, 0.02, \ \ldots \ , 0.99$. Величина z характеризует рассеяние распределения случайной величины X и показывает отклонение z от среднего $M(x)$, выраженное в единицах стандартного отклонения $\sigma(x)$. Значение z определяется по таблицам в зависимости от значения величины p и типа распределения случайной величины.

Задавая величину доверительного интервала d, можем оценить объем выборки N:

$$N = \frac{z^2\cdot\overline{\sigma}^2}{d^2}\,. \tag{5.10}$$

Полученное значение N используется для проведения второго этапа имитационного эксперимента по правилам:

а) если $N < n$, то эксперимент заканчивается; качество статистических характеристик случайной величины X оценивается вероятностью p;

б) если $N \geq n$, то продолжается эксперимент для получения $(N - n)$ выборочных значений.

В случае необходимости можно провести повторную корректировку N по формуле (5.10).

5.1.3. Пример задачи имитационного моделирования.

Классическим примером для постановки имитационного эксперимента является задача массового обслуживания [38]. Рассмотрим одну из возможных экономических интерпретаций одноканальной модели массового обслуживания.

Пусть имеется очередь деталей для обработки на одном токарном станке. Предположим, что промежутки времени между поступлениями деталей на обработку распределены равномерно в интервале от 1 до 10 минут. Пусть время на обработку каждой детали распределено равномерно от 1 до 6 минут. Мы хотим узнать, какое среднее время пребывает каждая деталь на токарной обработке, включая ожидание и обслуживание. Кроме того, необходимо определить процент времени простоя токаря. Чтобы моделировать, необходимо поставить искусственный эксперимент, отражающий условия предлагаемой ситуации. Необходимо придумать способ имитации искусственной последовательности поступления деталей на станок и времени обработки их токарем.

Рассмотрим следующий способ имитации:

1) возьмем 10 карточек и один кубик с шестью гранями;

2) перенумеруем карточки от 1 до 10;

3) положим 10 карточек в шляпу и будем их перемешивать;

4) вынем карточку из шляпы и считаем с нее число, которое будет представлять промежутки времени между появлением предыдущей и последующей деталей;

5) бросим кубик и прочитаем с его верхней грани число очков, которое будет представлять время обработки детали на станке;

6) повторим эти операции в указанной последовательности, возвращая каждый раз карточки обратно и встряхивая шляпу перед каждым вытягиванием; в результате повторений получаем временные ряды;

7) запишем результаты десяти экспериментов в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер детали	Время после поступления предыдущей детали (мин)	Время обработки на станке (мин)	Общее время пребывания детали на обработке (мин)	Время простоя станка в ожидании детали (мин)	Расчет квадратов отклонений от среднего значения
1	-	1	1	0	5.29
2	3	4	4	2	0.49
3	7	4	4	3	0.49
4	3	2	3	0	0.09
5	9	1	1	8	5.29
6	10	5	6	9	7.29
7	6	4	4	1	0.49
8	8	6	6	4	7.29
9	8	1	1	1	5.29
10	8	3	3	4	0.09
Итого		31	33	30	32.10

Определим среднее время пребывания детали на токарной обработке:

$$t_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{пр}}{n} = \frac{33}{10} = 3{,}3 \quad \text{(мин)}, \qquad (5.11)$$

где $t_{ср}$ - среднее время пребывания детали на токарной обработке;

i - порядковый номер детали;

$t_i^{пр}$ - общее время пребывания i-й детали на токарной обработке (технологическое время плюс время пролеживания детали);

n - общее количество деталей, $n = 10$.

Определим с вероятностью P = 0.90 ошибку оценивания среднего времени пребывания детали на токарной обработке.

Выполним расчет квадратов отклонений от среднего значения $t_{ср}$, расположив результаты в последнем столбце табл. 5.1. Вычислим для проведенных опытов дисперсию D по формуле (5.8): $D = \frac{32.10}{9} \approx 3.57$.

Длина доверительного интервала по правилу остановки при фиксированном объеме выборки вычисляется по формуле (5.5) . Значение $Z = 1.28$ при P=0.90 берется из соответствующих таблиц (см. Математическая энциклопедия. Т. 2.-М., 1979.- С. 829). Учитывая, что $\sigma^2 = D$, $N = n = 10$, по формуле (5.10) получим

$$d \approx \frac{1.28 \cdot \sqrt{3.57}}{\sqrt{10}} \approx 0.76 \text{ (мин)}.$$

Таким образом, истинное значение $t_{ср}$ заключено в следующих пределах:

$$t_{ср} - d \le \bar{t}_{ср} \le t_{ср} + d \quad \text{или} \quad 2.54 \le \bar{t}_{ср} \le 4.06.$$

Отметим, что при увеличении вероятности доверия к результатам имитационного эксперимента значение процентиля Z возрастает.

Для вычисления среднего времени простоя станка необходимо провести расчеты, аналогичные вычислениям для среднего времени обработки деталей.

Отметим, что пункты 4 и 5 нашего эксперимента являются искусственными приемами, которые отображают процесс генерирования случайных чисел. В реальных условиях имитации на ПК используются соответствующие стандартные программы.

5.2. Имитационное моделирование фирмы, отрасли

5.2.1. ***Модель конкурентной отрасли.*** Эта модель – пример описания отрасли, состоящей из нескольких конкурирующих фирм, которые через фиксированные отрезки времени планируют свои текущие объемы производства и реализации [3, 38].

Выпуск фирмы на каждом элементарном отрезке времени является управляемой величиной. Конкретные значения управлений администрация каждой фирмы может выбирать, руководствуясь своими неформальными соображениями.

Рассмотрим основные переменные и тождества этой модели.

Пусть X_{it} - объем продукции, произведенной и реализованной i-й фирмой на t-м отрезке времени, i = 1, 2, 3;

U_{it} - случайная величина с заданным законом распределения, математическим ожиданием и дисперсией, i = 1, 2, 3;

V_t - случайная величина с заданным законом распределения, математическим ожиданием и дисперсией;

A_i - номинальная мощность i-й фирмы, i = 1, 2, 3;

B - технологический параметр;

C - технологический параметр;

D, E, F, G - константы;

S_t - полный выпуск отрасли на t-м отрезке времени;

D_t - потребление продукции отрасли на t-м отрезке времени;

P_t - цена на t-м отрезке времени;

C_{it} - производственные затраты i-й фирмы на t-м отрезке времени;

$П_{it}$ - полная прибыль i-й фирмы на t-м отрезке времени.

Основные соотношения модели описываются уравнениями, приведенными ниже.

$$C_{it} = (X_{it} - A_i)^2 + BA_i^2 + C + U_{it}; \qquad (5.29)$$

$$P_t = D - ED_t - FD_{t-1} - GD_{t-2} + V_t; \qquad (5.30)$$

$$S_t = \sum_{i=1}^{3} X_{it}; \qquad (5.31)$$

$$S_t = D_t; \qquad (5.32)$$

$$П_{it} = P_t X_{it} - C_{it}. \qquad (5.33)$$

При выборе управлений на текущем отрезке времени предполагается, что каждая фирма знает следующие исходные данные: коэффициенты своей функции затрат; вид функции затрат своих конкурентов, но не знает значений их коэффициентов затрат; вид функции спроса на продукцию отрасли; выпуски отрасли на двух предыдущих отрезках времени; цену на продукцию отрасли, которая установилась на предыдущем отрезке времени.

Тождество (5.32) дает условие локального равновесия рынка. Подстановка величины спроса, найденной из соотношений (5.31), (5.32), в уравнение (5.30) (функция спроса на продукцию отрасли) определяет значение текущей цены, обеспечивающее равновесие. После того как найдена эта равновесная цена, по формуле (5.33) вычисляется текущая прибыль каждой фирмы. Эта прибыль зависит от цены на продукцию отрасли; выпуска фирм; ее номинальной мощности, заданной параметром A_i; существующей технологии (от параметров B и C) и случайной величины U_{it}.

5.2.2. ***Статистическое прогнозирование с помощью паутинообразной модели фирмы.*** Простейшей динамической моделью взаимодействия фирмы и рынка является так называемая паутинообразная модель [38].

В модели предполагается, что спрос на некоторый продукт на заданном отрезке времени зависит от его цены. Предложение определяется ценами предыдущего периода времени. Кроме того, предполагается, что рынок всегда находится в условиях локального равновесия.

К переменным рассматриваемой модели относятся параметры, перечисленные ниже.

U_t - случайная величина с заданными законом распределения, математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией VU; V_t - случайная величина с заданными законом распределения, математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией VV; W_t - случайная величина с заданными законом распределения, математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией VW; P_t - цена на t-м отрезке времени; D_t - спрос на t-м отрезке времени; S_t - предложение на t -м отрезке времени.

Уравнения функционирования модели имеют следующий вид:

$$D_t = A - BP_T + U_t, \tag{5.34}$$

$$S_t = C + DP_{t-1} + V_t. \tag{5.35}$$

Условие локального равновесия рынка имеет следующий вид:

$$S_t = D_t + W_t \quad . \tag{5.36}$$

Предполагается, что константы A, B, C, D оценены с помощью стандартных экономических методов.

Уравнения (5.35) и (5.36) функционирования модели допускают следующую интерпретацию. Спрос на t-м отрезке времени линейно зависит от текущей цены и случайной величины U_t. Это отражено в уравнении (5.34). Величина U_t описывает непредвиденные колебания предпочтений и доходов потребителей, а также другие случайные факторы, влияющие на величину спроса. Предложение на t-м отрезке времени зависит от цены на (t-1)-м отрезке времени и значения случайной величины V_t, которая учитывается в уравнении (5.35).

Случайность может быть связана с погодой, колебаниями технологии и эффективности производственного процесса. Условие (5.36) локального равновесия рынка означает совпадение спроса и предложения с точностью до случайной величины W_t.

Подставляя выражение для D_t и S_t в (5.36) и решая это уравнение относительно P_t, получаем

$$P_t = \frac{1}{B}(A - C - DP_{t-1} + U_t + W_t - V_t)\,. \tag{5.37}$$

Это соотношение позволяет моделировать на ПК траектории переменных P_T, S_t и D_t.

Отметим, что вид траектории P_T полностью определяется соотношением параметров D и B, а именно:

если $D > B$, амплитуда колебаний неограниченно растет;

если $D = B$, колебания имеют постоянную амплитуду;

если $D < B$, колебания затухают.