Лекция 7.
Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Их свойства и примеры.

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения или плотность веро-ятности) полностью описывают поведение случайной величины. Но в ряде задач доста-точно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный во-прос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическое ожидание.

Определение 7.1. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называ-ется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n\,. \qquad (7.1)$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, если полученный ряд сходится абсолютно.

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольше-го.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучай-ная* (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это же справедливо и для непре-рывных случайных величин.

Пример 1. Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что X может принимать значения 1, 2, 3.

$p(1)=\dfrac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15},\quad p(2)=\dfrac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15},\quad p(3)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}.$ Тогда

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{7}{15}+3\cdot\frac{7}{15}=2{,}4.$$

Пример 2. Определим математическое ожидание случайной величины X – числа бросков монеты до первого появления герба. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел). Ряд ее распределения имеет вид:

X	1	2	…	n	…
p	0,5	$(0,5)^2$	…	$(0,5)^n$	…

Тогда $M(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}+\ldots+$

$+\dfrac{1}{2^n}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}+\ldots=1\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots\right)=1\cdot 2=2$ (при вычислении дважды использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, откуда

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=1,\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=2$).

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C. \qquad (7.2)$$

Доказательство. Если рассматривать C как дискретную случайную величину, принимающую только одно значение C с вероятностью $p = 1$, то $M(C) = C\cdot 1 = C$.

2) Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X). \qquad (7.3)$$

Доказательство. Если случайная величина X задана рядом распределения

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

то ряд распределения для CX имеет вид:

Cx_i	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тогда $M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X)$.

Определение 7.2. Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины **зависимы**.

Определение 7.3. Назовем **произведением независимых случайных величин X и Y** случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений X на все возможные значения Y, а соответствующие им вероят-ности равны произведениям вероятностей сомножителей.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y). \qquad (7.4)$$

Доказательство. Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда X и Y принимают только по два возможных значения:

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

y_i	y_1	y_2
g_i	g_1	g_2

Тогда ряд распределения для XY выглядит так:

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1g_1	$p_2\, g_1$	p_1g_2	p_2g_2

Следовательно, $M(XY) = x_1y_1\cdot p_1g_1 + x_2y_1\cdot p_2g_1 + x_1y_2\cdot p_1g_2 + x_2y_2\cdot p_2g_2 = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + \; + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (y_1g_1 + y_2g_2)\,(x_1p_1 + x_2p_2) = M(X)\cdot M(Y)$.

Замечание 1. Аналогично можно доказать это свойство для большего количества возможных значений сомножителей.

Замечание 2. Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

Определение 7.4. Определим **сумму случайных величин X и Y** как случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или незави-симых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \qquad (7.5)$$

Доказательство.

Вновь рассмотрим случайные величины, заданные рядами распределения, приведен-ными при доказательстве свойства 3. Тогда возможными значениями $X + Y$ являются $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2$. Обозначим их вероятности соответственно как p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22}. Найдем $M(X+Y) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} =$
$= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$.

Докажем, что $p_{11} + p_{22} = p_1$. Действительно, событие, состоящее в том, что $X + Y$ примет значения $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$ и вероятность которого равна $p_{11} + p_{22}$, совпадает с событием, заключающемся в том, что $X = x_1$ (его вероятность – p_1). Аналогично дока-зывается, что $p_{21} + p_{22} = p_2$, $p_{11} + p_{21} = g_1$, $p_{12} + p_{22} = g_2$. Значит,

$$M(X + Y) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1g_1 + y_2g_2 = M(X) + M(Y).$$

Замечание. Из свойства 4 следует, что сумма любого числа случайных величин равна сумме математических ожиданий слагаемых.

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Найдем математическое ожидание числа очков, выпавших при броске одной кости:

$M(X_1) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$ Тому же числу равно математическое ожидание числа очков, выпавших на любой кости. Следовательно, по свойству 4 $M(X)=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Дисперсия.

Для того, чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание. Рассмотрим две случайные величины: X и Y, заданные рядами распределения вида

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	100
p	0,5	0,5

Найдем $M(X) = 49\cdot 0,1 + 50\cdot 0,8 + 51\cdot 0,1 = 50$, $M(Y) = 0\cdot 0,5 + 100\cdot 0,5 = 50$. Как видно, мате-матические ожидания обеих величин равны, но если для X $M(X)$ хорошо описывает пове-дение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (при-чем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения Y существенно отсто-ят от $M(Y)$. Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, на-сколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Определение 7.5. **Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математи-ческое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (7.6)$$

Пример.

Найдем дисперсию случайной величины X (числа стандартных деталей среди отобранных) в примере 1 данной лекции. Вычислим значения квадрата отклонения каждого возможно-го значения от математического ожидания:

$(1 - 2,4)^2 = 1,96$; $(2 - 2,4)^2 = 0,16$; $(3 - 2,4)^2 = 0,36$. Следовательно,

$$D(X) = 1{,}96\cdot\frac{1}{15} + 0{,}16\cdot\frac{7}{15} + 0{,}36\cdot\frac{7}{15} = \frac{28}{75} \approx 0{,}373.$$

Замечание 1. В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

Замечание 2. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Замечание 3. Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии, справедливость которой доказывается в следующей теореме:

Теорема 7.1. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. (7.7)

Доказательство.

Используя то, что $M(X)$ – постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу (7.6) к виду:

$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X\cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + M^2(X) =$
$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, что и требовалось доказать.

Пример. Вычислим дисперсии случайных величин X и Y, рассмотренных в начале этого раздела.
$M(X) = (49^2\cdot 0{,}1 + 50^2\cdot 0{,}8 + 51^2\cdot 0{,}1) - 50^2 = 2500{,}2 - 2500 = 0{,}2$.
$M(Y) = (0^2\cdot 0{,}5 + 100^2\cdot 0{,}5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$. Итак, дисперсия второй случайной величины в несколько тысяч раз больше дисперсии первой. Таким образом, даже не зная законов распределения этих величин, по известным значениям дисперсии мы можем утверждать, что X мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для Y это отклонение весьма существенно.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0. \tag{7.8}$$

Доказательство. $D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X). \tag{7.9}$$

Доказательство. $D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) = M(C^2(X - M(X))^2) =$
$= C^2D(X)$.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \tag{7.10}$$

Доказательство. $D(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) +$
$+ M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \tag{7.11}$$

Доказательство. $D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2D(Y) = D(X) + D(X)$.

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Определение 7.6. **Средним квадратическим отклонением** σ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,. \tag{7.12}$$

Пример. В предыдущем примере средние квадратические отклонения X и Y равны соответственно $\sigma_x = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447;\quad \sigma_y = \sqrt{2500} = 50$.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Распространим определения числовых характеристик случайных величин на непре-рывные случайные величины, для которых плотность распределения служит в некото-ром роде аналогом понятия вероятности.

Определение 7.7. **Математическим ожиданием** непрерывной случайной величины называется

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{7.13}$$

Замечание 1. Общее определение дисперсии сохраняется для непрерывной случайной величины таким же, как и для дискретной (опр. 7.5), а формула для ее вычисления имеет вид:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \qquad (7.14)$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле (7.12).
Замечание 2. Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала $[a, b]$, то интегралы в формулах (7.13) и (7.14) вычисля-ются в этих пределах.

Пример. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ -\dfrac{3}{4}(x^2-6x+8), & 2\le x\le 4 \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, σ.

Решение. $M(X)=-\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_2^4 x(x^2-6x+8)dx=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^4=3;$

$$D(X)=-\frac{3}{4}\int_2^4 x^2(x^2-6x+8)dx-9=-\frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+\frac{8x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4-9=9{,}2-9=0{,}2; \quad \sigma=\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}447.$$

Числовые характеристики случайных величин, имеющих некоторые стандартные законы распределения.

1. Биномиальное распределение.
Для дискретной случайной величины X, представляющей собой число появлений события A в серии из n независимых испытаний (см. лекцию 6), $M(X)$ можно найти, используя свойство 4 математического ожидания. Пусть X_1 – число появлений A в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

X_i	0	1
p_i	q	p

Следовательно, $M(X_i) = p$. Тогда $M(X)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i)=\sum_{i=1}^{n} p = np.$

Аналогичным образом вычислим дисперсию: $D(X_i) = 0^2\cdot q + 1^2\cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$, откуда по свойству 4 дисперсии $D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=np(1-p)=npq.$

2. Закон Пуассона.

Если $p(X=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, то $M(X)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m}{m!}e^{-a}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=ae^{-a}e^{a}=a$ (использо-валось разложение в ряд Тейлора функции e^x).

Для определения дисперсии найдем вначале $M(X^2)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^2\frac{a^m}{m!}e^{-a}=a\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}=$

$$=a\sum_{m=1}^{\infty}\left((m-1)+1\right)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}=a\left(\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}\right)=a(a+1).$$

Поэтому $D(X) = a^2 + a - a^2 = a$.
Замечание. Таким образом, обнаружено интересное свойство распределения Пуассона: математическое ожидание равно дисперсии (и равно единственному параметру a, определяющему распределение).
3. Равномерное распределение.

Для равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ непрерывной случайной величины

$M(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$, то есть математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины равно абсциссе середины отрезка $[a, b]$.

Дисперсия $D(X) = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$

$= \frac{(b-a)^2}{12}$.

4. Нормальное распределение.

Для вычисления математического ожидания нормально распределенной случайной величины воспользуемся тем, что *интеграл Пуассона* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi}$.

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = (z = \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z + a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = a$ (первое слагаемое равно 0, так как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля).

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = (u = z, dv = ze^{-\frac{z^2}{2}}) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.-z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-0+\sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2.$$

Следовательно, параметры нормального распределения (a и σ) равны соответствен-но математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению иссле-дуемой случайной величины.

Лекция 8.

Случайные векторы (системы нескольких случайных величин). Закон распределения веро-ятностей дискретной двумерной случайной величины. Функция распределения и плот-ность распределения двумерной случайной величины, их свойства. Вероятность попада-ния случайной точки в произвольную область. Отыскание плотностей вероятности со-ставляющих двумерной случайной величины. Равномерное распределение на плоскости.

Наряду с одномерными случайными величинами, возможные значения которых определяют-ся одним числом, теория вероятностей рассматривает и многомерные случайные величины. Каждое возможное значение такой величины представляет собой упорядоченный набор нескольких чисел. Геометрической иллюстрацией этого понятия служат точки n-мерного пространства, каждая координата которых является случайной величиной (дискретной или непрерывной), или n-мерные векторы. Поэтому многомерные случайные величины называют еще случайными векторами.

Двумерные случайные величины.

1. Дискретные двумерные случайные величины.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид таблицы с двойным входом, задающей перечень возможных значений каждой компоненты и вероятности $p(x_i, y_j)$, с которыми величина принимает значение (x_i, y_j):

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
...	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

При этом сумма вероятностей, стоящих во всех клетках таблицы, равна 1.
Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти законы распреде-ления ее составляющих. Действительно, событие $X = x_1$ представляется собой сумму несовместных событий ($X = x_1$, $Y = y_1$), ($X = x_1$, $Y = y_2$),…, ($X = x_1$, $Y = y_m$), поэтому
$p(X = x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) +…+ p(x_1, y_m)$ (в правой части находится сумма вероятностей, стоящих в столбце, соответствующем $X = x_1$). Так же можно найти вероятности остальных возможных значений X. Для определения вероятностей возможных значений Y нужно сложить вероятности, стоящие в строке таблицы, соответствующей $Y = y_j$.
Пример 1. Дан закон распределения двумерной случайной величины:

Y	X		
	-2	3	6
-0,8	0,1	0,3	0,1
-0,5	0,15	0,25	0,1

Найти законы распределения составляющих.
Решение. Складывая стоящие в таблице вероятности «по столбцам», получим ряд распре-деления для X:

X	-2	3	6
p	0,25	0,55	0,2

Складывая те же вероятности «по строкам», найдем ряд распределения для Y:

Y	-0,8	-0,5
p	0,5	0,5

2. Непрерывные двумерные случайные величины.

Определение 8.1. **Функцией распределения $F(x, y)$** двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность того, что $X < x$, а $Y < y$:

$$F(x, y) = p (X < x, Y < y). \qquad (8.1)$$

y

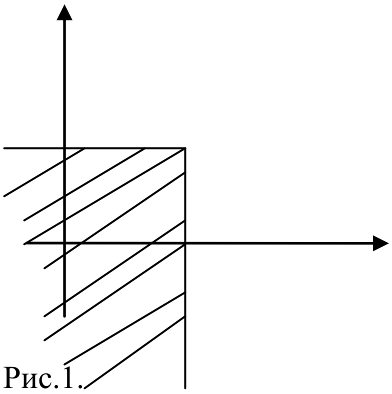

Рис.1.

Это означает, что точка (X, Y) попадет в область, заштрихованную на рис. 1, если вершина прямого угла располагается в точке (x, y).

Замечание. Определение функции распределения справедливо как для непрерывной, так и для дискретной двумерной случайной величины.

Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x, y) \le 1$ (так как $F(x, y)$ является вероятностью).

2) $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $x_2 > x_1$;

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, если $y_2 > y_1$.

Доказательство. $F(x_2, y) = p(X < x_2, Y < y) = p(X < x_1, Y < y) + p(x_1 \le X < x_2, Y < y) \ge$

$\ge p(X < x_1, Y < y) = F(x_1, y)$. Аналогично доказывается и второе утверждение.

3) Имеют место предельные соотношения:

a) $F(-\infty, y) = 0$; b) $F(x, -\infty) = 0$; c) $F(-\infty, -\infty) = 0$; d) $F(\infty, \infty) = 1$.

Доказательство. События a), b) и c) невозможны (так как невозможно событие $X<-\infty$ или $Y<-\infty$), а событие d) достоверно, откуда следует справедливость приведенных равенств.

4) При $y = \infty$ функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

При $x = \infty$ функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей Y :

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

Доказательство. Так как событие $Y < \infty$ достоверно, то $F(x, \infty) = p(X < x) = F_1(x)$. Аналогично доказывается второе утверждение.

Определение 8.2. **Плотностью совместного распределения вероятностей (двумер-ной плотностью вероятности)** непрерывной двумерной случайной величины называ-ется смешанная частная производная 2-го порядка от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (8.2)$$

Замечание. Двумерная плотность вероятности представляет собой предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника при $\Delta x\to 0,\ \ \Delta y\to 0.$

Свойства двумерной плотности вероятности.

1) $f(x, y)\geq 0$ (см. предыдущее замечание: вероятность попадания точки в прямоуголь-ник неотрицательна, площадь этого прямоугольника положительна, следовательно, предел их отношения неотрицателен).

2) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$ (следует из определения двумерной плотности вероятно-сти).

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ (поскольку это вероятность того, что точка попадет на плос-кость Oxy, то есть достоверного события).

Вероятность попадания случайной точки в произвольную область.

Пусть в плоскости Oxy задана произвольная область D. Найдем вероятность того, что точка, координаты которой представляют собой систему двух случайных величин (двумерную случайную величину) с плотностью распределения $f(x, y)$, попадет в область D. Разобьем эту область прямыми, параллельными осям координат, на прямоугольники со сторонами Δx и Δy. Вероятность попадания в каждый такой прямоугольник равна $f(\xi_i,\eta_i)\Delta x\Delta y$, где (ξ_i,η_i) - координаты точки, принадлежащей прямоугольнику. Тогда вероятность попадания точки в область D есть предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x\Delta y$, то есть

$$p((X,Y)\subset D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (8.3)$$

Отыскание плотностей вероятности составляющих

двумерной случайной величины.

Выше было сказано, как найти функцию распределения каждой составляющей, зная двумерную функцию распределения. Тогда по определению плотности распределения

$$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}=\frac{dF(x,\infty)}{dx}=\frac{d\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\right)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy. \qquad (8.4)$$

Аналогично находится $\qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (8.4')$

Условные законы распределения составляющих

дискретной двумерной случайной величины.

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину и найдем закон распределения составляющей X при условии, что Y примет определенное значение (например, $Y = y_1$). Для этого воспользуемся формулой Байеса, считая гипотезами события $X = x_1$, $X = x_2,\ldots, X = x_n$, а событием A – событие $Y = y_1$. При такой постановке задачи нам требуется найти условные вероятности гипотез при условии, что A произошло. Следовательно,

$$p(x_i / y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)}.$$

Таким же образом можно найти вероятности возможных значений X при условии, что Y принимает любое другое свое возможное значение:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}. \qquad (8.5)$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей Y:

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \qquad (8.5`)$$

Пример. Найдем закон распределения X при условии Y = -0,8 и закон распределения Y при условии X = 3 для случайной величины, рассмотренной в примере 1.

$$p(x_1 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad p(x_2 / y_1) = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad p(x_3 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$p(y_1 / x_2) = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11}; \quad p(y_2 / x_2) = \frac{0,25}{0,55} = \frac{5}{11}.$$

Условные законы распределения составляющих

дискретной двумерной случайной величины.

Определение 8.3. **Условной плотностью φ(*x*/*y*)** распределения составляющих X при данном значении $Y = y$ называется

$$\varphi(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx}. \qquad (8.6)$$

Аналогично определяется условная плотность вероятности Y при $X = x$:

$$\psi(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy}. \qquad (8.6`)$$

Равномерное распределение на плоскости.

Система двух случайных величин называется **равномерно распределенной на плоскости**, если ее плотность вероятности $f(x, y)$ = const внутри некоторой области и равна 0 вне ее. Пусть данная область –

прямоугольник вида $a \le x \le b,\ \ c \le y \le d$. Тогда из свойств $f(x, y)$ следует, что

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_{np}}=\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \textit{внутри прямоугольника,}\\ \qquad\qquad 0 & \textit{вне его.}\end{cases}$$

Найдем двумерную функцию распределения:

$F(x,y)=\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}\int\limits_c^y\int\limits_a^x dxdy=\dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}$ при $a < x < b,\ c < y < d$, $F(x, y) = 0$ при $x \le a$ или $y \le c$, $F(x, y) = 1$ при $x \ge b,\ y \ge d$.

Функции распределения составляющих, вычисленные по формулам, приведенным в свойстве 4 функции распределения, имеют вид: $F_1(x)=\dfrac{x-a}{b-a},\quad F_2(y)=\dfrac{y-c}{d-c}$.

Лекция 9.

Некоторые числовые характеристики одномерных случайных величин: начальные и центральные моменты, мода, медиана, квантиль, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Числовые характеристики двумерных случайных величин: начальные и центральные моменты. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

Определение 9.1. **Начальным моментом порядка *k*** случайной величины X называется матема-тическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \qquad (9.1)$$

В частности, $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$. Следовательно, дисперсия $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Определение 9.2. **Центральным моментом порядка *k*** случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M((X - M(X))^k). \qquad (9.2)$$

В частности, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$.

Можно получить соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\ \ \mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^2,\ \ \mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4.$$

Мода и медиана.

Такая характеристика случайной величины, как математическое ожидание, называется иногда *характеристикой положения*, так как она дает представление о положении случайной величии-ны на числовой оси. Другими характеристиками положения являются мода и медиана.

Определение 9.3. **Модой *М*** дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, **модой *М*** непрерывной случайной величины – значение, в котором плотность вероятности максимальна.

Пример 1.

Если ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4
p	0,1	0,7	0,15	0,05

то $M = 2$.

Пример 2.

Для непрерывной случайной величины, заданной плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, модой является абсцисса точки максимума: $M = 0$.

Замечание 1. Если кривая распределения имеет больше одного максимума, распределение называется **полимодальным**, если эта кривая не имеет максимума, но имеет минимум – **анти-модальным**.

Замечание 2. В общем случае мода и математическое ожидание не совпадают. Но, если распре-деление является симметричным и модальным (то есть кривая распределения симметрична от-носительно прямой $x = M$) и имеет математическое ожидание, оно совпадает с модой.

Определение 9.4. **Медианой *Me*** непрерывной случайной величины называют такое ее значение, для которого

$$p(X < Me) = p(X > Me). \qquad (9.3)$$

Графически прямая $x = Me$ делит площадь фигуры, ограниченной кривой распределения, на две равные части.

Замечание. Для симметричного модального распределения медиана совпадает с математичес-ким ожиданием и модой.

Определение 9.5. Для случайной величины X с функцией распределения $F(X)$ **квантилью порядка *p*** ($0 < p < 1$) называется число K_p такое, что $F(K_p) \le p$, $F(K_p + 0) \ge p$. В частности, если $F(X)$ строго монотонна, K_p: $F(K_p) = p$.

Асимметрия и эксцесс.

Если распределение не является симметричным, можно оценить асимметрию кривой распреде-ления с помощью центрального момента 3-го порядка. Действительно, для симметричного распределения все нечетные центральные моменты равны 0 (как интегралы от нечетных функ-ций в симметричных пределах), поэтому выбран нечетный момент наименьшего порядка, не тождественно равный 0. Чтобы получить безразмерную характеристику, его делят на σ^3 (так как μ_3 имеет размерность куба случайной величины).

Определение 9.6. **Коэффициентом асимметрии** случайной величины называется

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad (9.4)$$

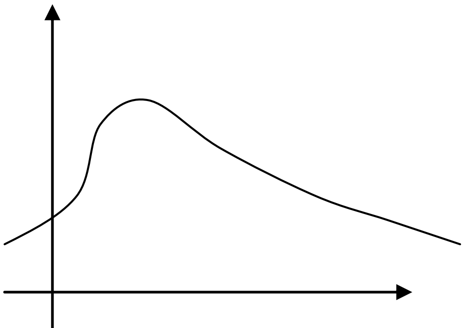

Рис.1.

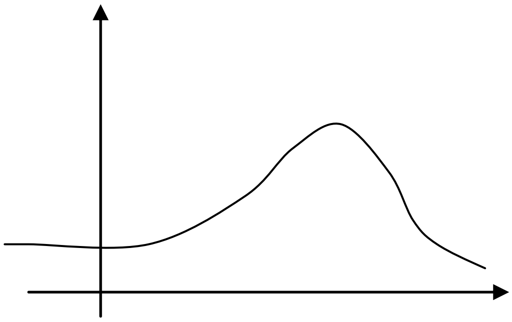

Рис.2.

В частности, для кривой, изображенной на рис.1, $S_k > 0$, а на рис.2 - $S_k < 0$.

Для оценки поведения кривой распределения вблизи точки максимума (для определения того, насколько «крутой» будет его вершина) применяется центральный момент 4-го порядка.

Определение 9.7. **Эксцессом** случайной величины называется величина

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (9.5)$$

Замечание. Можно показать, что для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, и, соответственно, $Ex = 0$. Для кривых с более острой вершиной $Ex > 0$, в случае более плоской вершины $Ex < 0$.

Числовые характеристики двумерных случайных величин.

Такие характеристики, как начальные и центральные моменты, можно ввести и для системы двух случайных величин.

Определение 9.8. **Начальным моментом порядка *k, s*** двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s:

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s). \qquad (9.6)$$

Для дискретных случайных величин $\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$, для непрерывных случайных величин $\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy$.

Определение 9.9. **Центральным моментом порядка *k, s*** двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения $(X - M(X))^k$ на $(Y - M(Y))^s$:

$$\mu_{k,s} = M((X - M(X))^k (Y - M(Y))^s). \qquad (9.7)$$

Для дискретных случайных величин $\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^s p_{ij}$, для непрерывных случайных величин $\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k (y - M(Y))^s f(x,y)dxdy$.

При этом $M(X) = \alpha_{1,0}$, $M(Y) = \alpha_{0,1}$, $D(X) = \mu_{2,0}$, $D(Y) = \mu_{0,2}$.

Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Определение 9.10. **Корреляционным моментом** системы двух случайных величин называется второй смешанный центральный момент:

$$K_{xy} = \mu_{1,1} = M((X - M(X))(Y - M(Y))). \qquad (9.8)$$

Для дискретных случайных величин $K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))(y_j - M(Y))\, p_{ij},$ для непрерывных случайных величин $K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))\, f(x,y)\,dxdy.$

Безразмерной характеристикой коррелированности двух случайных величин является **коэффи-циент корреляции**

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\ . \qquad (9.9)$$

Корреляционный момент описывает связь между составляющими двумерной случайной вели-чины. Действительно, убедимся, что для независимых X и Y $K_{xy} = 0$. В этом случае $f(x,y) = =f_1(x)f_2(y)$, тогда

$$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))\, f_1(x)dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))\, f_2(y)dy = \mu_1(x)\mu_2(y) = 0.$$

Итак, две независимые случайные величины являются и некоррелированными. Однако понятия коррелированности и зависимости не эквивалентны, а именно, величины могут быть зависимы-ми, но при этом некоррелированными. Дело в том, что коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только линейную. В частности, если $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \pm 1$. Найдем возможные значения коэффициента корреляции.

Теорема 9.1. $|\, r_{xy} | \le 1.$

Доказательство. Докажем сначала, что $|\, K_{xy} | \le \sigma_x \sigma_y$. Действительно, если рассмотреть случай-ную величину $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y$ и найти ее дисперсию, то получим: $D(Z_1) = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy}$. Так как дисперсия всегда неотрицательна, то $2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} \ge 0,$ откуда $|\, K_{xy} | \le \sigma_x \sigma_y$. Отсюда $\left|\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right| = \left|r_{xy}\right| \le 0,$ что и требовалось доказать.

Лекция 10.

Функции от случайных величин. Функция одного случайного аргумента, ее распределение и математическое ожидание. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распределения.

В предыдущих лекциях рассматривались некоторые законы распределения случайных величин. При решении задач часто удобно бывает представить исследуемую случайную величину как функцию других случайных величин с известными законами распределения, что помогает уста-новить и закон распределения заданной случайной величины.

Определение 10.1. Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют **функцией случайного аргу-мента X:** $Y = \varphi(X)$. Выясним, как найти закон распределения функции по известному закону распределения аргумента.

1) Пусть аргумент X – дискретная случайная величина, причем различным значениям X соот-ветствуют различные значения Y. Тогда вероятности соответствующих значений X и Y равны.

Пример 1. Ряд распределения для X имеет вид:

X	5	6	7	8
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдем закон распределения функции $Y = 2X^2 - 3$:

Y	47	69	95	125
p	0,1	0,2	0,3	0,4

(при вычислении значений Y в формулу, задающую функцию, подставляются возможные значения X).

2) Если разным значениям X могут соответствовать одинаковые значения Y, то вероятности значений аргумента, при которых функция принимает одно и то же значение, складываются.

Пример 2. Ряд распределения для X имеет вид:

X	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдем закон распределения функции $Y = X^2 - 2X$:

Y	-1	0	3
p	0,2	0,4	0,4

(так как $Y = 0$ при $X = 0$ и $X = 2$, то $p(Y = 0) = p(X = 0) + p(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$).

3) Если X – непрерывная случайная величина, $Y = \varphi(X)$, $\varphi(x)$ – монотонная и дифференцируемая функция, а $\psi(y)$ – функция, обратная к $\varphi(x)$, то плотность распределения $g(y)$ случайно функции Y равна:

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|. \qquad (10.1)$$

Пример 3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $Y = x^3$. Тогда $\psi(y) = \sqrt[3]{y}$, $g(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^{\frac{2}{3}})} \cdot \left(\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{1}{3\pi y^{\frac{2}{3}}(1+y^{\frac{2}{3}})}$

Математическое ожидание функции одного случайного аргумента.

Пусть $Y = \varphi(X)$ – функция случайного аргумента X, и требуется найти ее математическое ожидание, зная закон распределения X.

1) Если X – дискретная случайная величина, то

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\,p_i. \qquad (10.2)$$

Пример 3. Найдем $M(Y)$ для примера 1: $M(Y) = 47\cdot 0,1 + 69\cdot 0,2 + 95\cdot 0,3 + 125\cdot 0,4 = 97$.

2) Если X – непрерывная случайная величина, то $M(Y)$ можно искать по-разному. Если известна плотность распределения $g(y)$, то

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y)\,dy. \qquad (10.3)$$

Если же $g(y)$ найти сложно, то можно использовать известную плотность распределения $f(x)$:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx. \qquad (10.4)$$

В частности, если все значения X принадлежат промежутку (a, b), то

$$M(Y) = \int_{a}^{b} \varphi(x) f(x)\,dx. \qquad (10.4`)$$

Функция двух случайных величин. Распределение суммы независимых слагаемых.

Определение 10.2. Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответ-ствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют **функцией двух случайных аргументов** X и Y : $Z = \varphi(X, Y)$.

Рассмотрим в качестве такой функции сумму $X + Y$. В некоторых случаях можно найти ее закон распределения, зная законы распределения слагаемых.

1) Если X и Y – дискретные *независимые* случайные величины, то для определения закона распределения $Z = X + Y$ нужно найти все возможные значения Z и соответствующие им вероятности.

Пример 4. Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y, законы распределения которых имеют вид:

X	-2	1	3
p	0,3	0,4	0,3

Y	0	1	2
p	0,2	0,5	0,3

Найдем возможные значения Z: -2 + 0 = -2 (p = 0,3·0,2 = 0,06), -2 + 1 = -1 (p = 0,3·0,5 = 0,15), -2 + 2 = 0 (p = 0,3·0,3 = 0,09), 1 + 0 = 1 (p = 0,4·0,2 = 0,08), 1 + 1 = 2 (p = 0,4·0,5 = 0,2), 1 + 2 = 3 (p = 0,4·0,3 = 0,12), 3 + 0 = 3 (p = 0,3·0,2 = 0,06), 3 + 1 = 4 (p = 0,3·0,5 = 0,15), 3 + 2 = 5 (p = 0,3·0,3 = 0,09). Сложив вероятности повторившегося дважды значения Z = 3, составим ряд распределения для Z:

Z	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p	0,06	0,15	0,09	0,08	0,2	0,18	0,15	0,09

3) Если X и Y – непрерывные *независимые* случайные величины, то, если плотность вероятно-сти хотя бы одного из аргументов задана на (-∞, ∞) одной формулой, то плотность суммы $g(z)$ можно найти по формулам

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)dy, \qquad (10.5)$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$ – плотности распределения слагаемых. Если возможные значения аргументов неотрицательны, то

$$g(z) = \int_{0}^{z} f_1(x) f_2(z-x)dx = \int_{0}^{z} f_1(z-y) f_2(y)dy. \qquad (10.6)$$

Замечание. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин называют **композицией**.

Устойчивость нормального распределения.

Определение 10.3. Закон распределения вероятностей называется **устойчивым**, если компози-ция таких законов есть тот же закон (возможно, отличающийся другими значениями парамет-ров).

В частности, свойством устойчивости обладает нормальный закон распределения: композиция нормальных законов тоже имеет нормальное распределение, причем ее математическое ожидание и дисперсия равны суммам соответствующих характеристик слагаемых.

Лекция 11.

Нормальный закон распределения на плоскости. Линейная регрессия. Линейная корреляция.

Определение 11.1. **Нормальным законом распределения на плоскости** называют распре-деление вероятностей двумерной случайной величины (X, Y), если

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right)} \qquad (11.1)$$

Таким образом, нормальный закон на плоскости определяется 5 параметрами: a_1, a_2, σ_x, σ_y, r_{xy}, где a_1, a_2 – математические ожидания, σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения, r_{xy} – коэффи-циент корреляции X и Y. Предположим, что $r_{xy} = 0$, то есть X и Y некоррелированы. Тогда из (11.1) получим:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\cdot e^{-0{,}5\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}\right)}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)f_2(y).$$

Следовательно, из некоррелированности составляющих нормально распределенной двумерной случайной величины следует их независимость, то есть для них понятия независимости и некоррелированности равносильны.

Линейная регрессия.

Пусть составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) зависимы. Будем считать, что одну из них можно приближенно представить как линейную функцию другой, например

$$Y \approx g(X) = \alpha + \beta X, \qquad (11.2)$$

и определим параметры α и β с помощью метода наименьших квадратов.

Определение 11.2. Функция $g(X) = \alpha + \beta X$ называется **наилучшим приближением** Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M(Y - g(X))^2$ принимает наименьшее возможное значение; функцию $g(X)$ называют **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Теорема 11.1. Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид:

$$g(X)=m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x), \qquad (11.3)$$

где $m_x = M(X), m_y = M(Y), \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \sigma_y = \sqrt{D(Y)}, r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ - коэффициент корреляции X и Y.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(\alpha, \beta) = M(Y - \alpha - \beta X)^2 \qquad (11.4)$$

и преобразуем ее, учитывая соот-ношения $M(X - m_x) = M(Y - m_y) = 0$, $M((X - m_x)(Y - m_y)) = K_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$:

$$F(\alpha,\beta)=\sigma_y^2+\beta^2\sigma_x^2-2r\sigma_x\sigma_y\beta+(m_y-\alpha-\beta m_x)^2.$$

Найдем стационарные точки полученной функции, решив систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_y - \alpha - \phi m_x) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_x^2 - 2r\sigma_x\sigma_y = 0. \end{cases}$$ Решением системы будет $\beta = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}, \alpha = m_y - r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x$.

Можно проверить, что при этих значениях функция $F(\alpha, \beta)$ имеет минимум, что доказывает утверждение теоремы.

Определение 11.3. Коэффициент $\beta = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии *Y* на *X***, а прямая

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \text{ -} \qquad (11.5)$$

- прямой среднеквадратической регрессии *Y* на *X*.

Подставив координаты стационарной точки в равенство (11.4), можно найти минимальное значение функции $F(\alpha, \beta)$, равное $\sigma_y^2(1 - r^2)$. Эта величина называется **остаточной дисперсией** *Y* относительно *X* и характеризует величину ошибки, допускаемой при замене *Y* на $g(X) = \alpha + \beta X$. При $r = \pm 1$ остаточная дисперсия равна 0, то есть равенство (11.2) является не приближенным, а точным. Следовательно, при $r = \pm 1$ *Y* и *X* связаны *линейной* функциональной зависимостью. Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии *X* на *Y*:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y) \qquad (11.6)$$

и остаточную дисперсию *X* относительно *Y*. При $r = \pm 1$ обе прямые регрессии совпадают. Решив систему из уравнений (11.5) и (11.6), можно найти точку пересечения прямых регрессии – точку с координатами (m_x, m_y), называемую **центром совместного распределения величин *X* и *Y*.**

Линейная корреляция.

Для двумерной случайной величины (*X, Y*) можно ввести так называемое **условное математи-ческое ожидание *Y*** при $X = x$. Для дискретной случайной величины оно определяется как

$$M(Y \mid X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j / x), \qquad (11.7)$$

для непрерывной случайной величины –

$$M(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y/x)dy. \qquad (11.8)$$

Определение 11.4. **Функцией регрессии *Y* на *X*** называется условное математическое ожидание

$$M(\,Y / x\,) = f(x).$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание *X* и функция регрессии *X* на *Y*.

Определение 11.5. Если обе функции регрессии *X* на *Y* и *Y* на *X* линейны, то говорят, что *X* и *Y* связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

При этом графики линейных функций регрессии являются прямыми линиями, причем можно доказать, что эти линии совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии.

Теорема 11.2. Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Доказательство. Найдем условный закон распределения Y при $X = x$ $\left(\psi(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}\right)$, используя формулу двумерной плотности вероятности нормального распределения (11.1) и формулу плотности вероятности X:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e - \frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}. \qquad (11.9)$$

Сделаем замену $u = \dfrac{x-a_1}{\sigma_x}$, $v = \dfrac{y-a_2}{\sigma_y}$. Тогда $\psi(y/x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}} =$

$= \dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(y-\left(a_2+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)\right)\right)^2}{2\sigma_y^2(1-r^2)}}$. Полученное распределение является нормальным, а его математическое ожидание $M(Y/x) = a_2 + r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)$ есть функция регрессии Y на X (см. опреде-ление 11.4)). Аналогично можно получить функцию регрессии X на Y:

$$M(X/y) = a_1 + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_2).$$

Обе функции регрессии линейны, поэтому корреляция между X и Y линейна, что и требовалось доказать. При этом уравнения прямых регрессии имеют вид

$$y - a_2 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1), \qquad x - a_1 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_2),$$

то есть совпадают с уравнениями прямых среднеквадратической регрессии (см. формулы (11.5), (11.6)).

Лекция 12.

Распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера. Связь этих распределений с нормаль-ным распределением.

Рассмотрим некоторые распределения, связанные с нормальным и широко применяющиеся в математической статистике.

Распределение «хи-квадрат».

Пусть имеется несколько нормированных нормально распределенных случайных величин: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($a_i = 0$, $\sigma_i = 1$). Тогда сумма их квадратов

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (12.1)$$

является случайной величиной, распределенной по так называемому **закону «хи-квадрат»** с $k = n$ степенями свободы; если же слагаемые связаны каким-либо соотношением (например, $\sum X_i = n\overline{X}$), то число степеней свободы $k = n - 1$.

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \quad x > 0. \end{cases} \qquad (12.2)$$

Здесь $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция; в частности, $\Gamma(n+1) = n!$.

Следовательно, распределение «хи-квадрат» определяется одним параметром – числом степе-ней свободы k.

Замечание 1. С увеличением числа степеней свободы распределение «хи-квадрат» постепенно приближается к нормальному.

Замечание 2. С помощью распределения «хи-квадрат» определяются многие другие распреде-ления, встречающиеся на практике, например, распределение случайной величины $\sqrt{\chi^2}$ - длины случайного вектора ($X_1, X_2, \ldots, X_n$), координаты которого независимы и распределены по нормальному закону.

Распределение Стьюдента.

Рассмотрим две независимые случайные величины: Z, имеющую нормальное распределение и нормированную (то есть $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), и V, распределенную по закону «хи-квадрат» с k степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{k}}} \qquad (12.3)$$

имеет распределение, называемое ***t*** **– распределением или распределением Стьюдента** с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Распределение *F* Фишера – Снедекора.

Рассмотрим две независимые случайные величины U и V, распределенные по закону «хи-квадрат» со степенями свободы k_1 и k_2 и образуем из них новую величину

$$F = \frac{U / k_1}{V / k_2}. \qquad (12.4)$$

Ее распределение называют **распределением *F* Фишера – Снедекора** со степенями свободы k_1 и k_2. Плотность его распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0; \\ C_0\dfrac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad x>0, \end{cases} \tag{12.5}$$

где $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}$. Таким образом, распределение Фишера определяется двумя параметрами – числами степеней свободы.